Salvatore Pincherle

Operazioni funzionali permutabili con la derivazione

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Vol. **2** (1923), p. 52–53

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_1923_1>

Operazioni funzionali permutabili colla derivazione.

Nota di Salvatore Pincherle

In una interessante nota *Su un problema di meccanica ereditaria* (1) ed anche in qualche lavoro posteriore, il dott. G. Andreoli incontra equazioni integrali la cui soluzione viene agevolata dal fatto che esse dipendono da operazioni funzionali le quali generalizzano le forme differenziali lineari a coefficienti costanti, in quanto, come queste, applicate alla esponenziale e^{ax}, la riproducono all'infuori di un fattore indipendente da x.

Ora, è facile vedere come questa proprietà appartenga a tutte le operazioni funzionali lineari permutabili colla operazione di derivazione. Essendo infatti A il simbolo di una tale operazione, e D il simbolo della derivazione, dall'essere

$$DA = AD \tag{1}$$

risulta che ponendo $A(e^{ax}) = \alpha(a, x)$, si avrà

$$DA = \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad AD = A(ae^{ax}),$$

ma per essere A lineare, è

$$A(ae^{ax}) = a\alpha(a, x),$$

onde, per la (1),

$$\alpha(a, x) = f(a)e^{ax}, \tag{2}$$

essendo $f(a)$ funzione del solo parametro a. Questa funzione dipende essenzialmente dalla natura dell'operazione A, che essa caratterizza, ed a buon diritto il dott. Andreoli, in analogia alla denominazione usata per le equazioni differenziali lineari, ha dato il nome di *equazione caratteristica* alla equazione, corrispondente ad $f(a) = 0$, che si presenta nei tipi che egli considera.

(1) Rendic. della R. Accademia di Torino, T. 50, pag. 1036 (1915).

Alle operazioni permutabili colla derivazione appartengono quelle rappresentate da operatori integrali il cui nucleo sia della forma $N(x-y)$, sotto ad opportune condizioni per i limiti d'integrazione, e che ho avuto occasione di considerare fino dal 1887 (¹). Nella teoria della composizione, dovuta al VOLTERRA e che egli pone a base della risoluzione delle equazioni integrali ed integro-differenziali, simili operatori, che sono quelli generati dalle funzioni permutabili coll'unità, occupano un posto notevole, poichè essi vengono a costituire la base dell'importante teoria del ciclo chiuso (²).

Conviene aggiungere una osservazione. L'importanza delle operazioni soddisfacenti alla (1) e la semplicità e l'efficacia della loro algoritmia risiedono nella seguente proprietà, la quale consegue immediatamente dalla (1), che cioè « la caratteristica del prodotto di due operazioni soddisfacenti alla (1) è uguale al prodotto delle caratteristiche ». Ed infatti, se è

$$A(e^{ax}) = f(a)e^{ax}, \quad B(e^{ax}) = g(a)e^{xa},$$

ne viene immediatamente

$$A\,B(e^{ax}) = f(a)g(a)e^{ax}\,;$$

osservazione le cui conseguenze sono in parte note, ma che essa permette di coordinare ad un unico punto di vista; la deduzione di alcune di queste conseguenze formerà l'oggetto di un lavoro più esteso.

Bologna, 31 dicembre 1922.

(¹) *Acta Math.*, T. X. V. anche PINCHERLE e AMALDI, *Le operazioni distributive*, cap. VIII, pagg. 119-139 (Bologna, 1901).

(²) V. VOLTERRA, *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1910, 1° sem.) e *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, pagg. 52 e 150 (Paris, 1913).

(³) Continuazione della nota a pag. 6.