Salvatore Pincherle

Determinanti

in: Enciclopedia Italiana di Scienze, Lettere ed Arti, vol. 12, G. Treccani, Roma, 1931, p. 691–693
<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_1931_1>

DETERMINANTI. - MATEMATICA. - Termine con cui si designano certe speciali espressioni che si presentano spontaneamente nella risoluzione dei sistemi di equazioni di 1° grado o, come si suol dire, *lineari*. Per riferirci al caso elementare, consideriamo un sistema di due equazioni lineari in due incognite x, y

$$ax + by = c \quad , \quad a'x + b'y = c', \tag{1}$$

dove a, b, c e a', b', c' denotano sei numeri dati. Risolvere questo sistema vuol dire trovare le coppie di valori che, sostituiti nelle (1) al posto di x e y, le rendono soddisfatte entrambe. A tal fine si può procedere nel modo seguente. Si risolve la prima equazione rispetto a una delle incognite, p. es. rispetto alla y, come se la x fosse conosciuta, e l'espressione così ottenuta si sostituisce alla y nella seconda equazione, la quale così diventa un'equazione (ancora di 1° grado) nella sola x e, se $ab' - a'b$ risulta diverso da zero, fornisce un ben determinato valore per questa incognita. Il valore così trovato si sostituisce alla x nella prima equazione, che riducendosi, alla sua volta, a un'equazione (sempre di 1° grado) nella sola y, conduce a un valore ben determinato anche per questa incognita. Si conclude in tal modo che, sotto l'ipotesi essenziale $ab' - a'b \gtrless 0$, il sistema (1) ammette una soluzione e una sola, che è in ogni caso data da

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \quad , \quad y = \frac{ac' - a'c'}{ab' - a'b}.$$

È questa la cosiddetta «regola del Cramer» (per i sistemi di due equazioni lineari in due incognite). Ciascuno dei binomî $ab' - a'b$, $cb' - c'b$, $ac' - a'c$ si chiama il *determinante* (del 2° ordine) dei quattro numeri che vi compaiono.

Daremo qui un breve cenno della teoria dei determinanti d'ordine qualsiasi e di talune fra le loro più importanti applicazioni. Non v'è capitolo dell'analisi o della geometria analitica in cui non torni utile l'uso dei determinanti, quanto meno come mezzo di enunciazione rapida ed espressiva di risultati.

1. Indicato con n un qualsiasi numero intero (positivo), si consideri uno specchio di n^2 numeri, disposti in quadrato, cioè su n righe (orizzontali) e n colonne (verticali), e si denotino tutti questi numeri con una stessa lettera, p. es. a, contrassegnata con due indici, di cui il primo indichi la riga, il secondo la colonna cui appartiene ogni singolo numero. Un simile specchio

$$\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots a_{nn} \end{matrix}\right.$$

è detto *matrice quadrata*, e gli n^2 numeri se ne chiamano gli *elementi*. Essa serve alla formazione del *determinante* (di ordine n), che s'indica con

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

e che si costruisce mediante la seguente regola: Si formi il prodotto $a_{11}\,a_{22}\ldots\,a_{nn}$ degli elementi aventi i due indici uguali (*termine o diagonale* principale); indi si formino tutti i prodotti che da quel termine si deducono tenendo fermi i primi indici e permutando in tutti i modi i secondi, avendo cura di dare a ciascun termine il segno $+$ o $-$, secondo che la rispettiva permutazione dei secondi indici presenta complessivamente un numero pari o dispari d'*inversioni*, dicendosi che due di codesti indici, contigui o no, dànno luogo a una inversione se si susseguono, da sinistra a destra, in ordine contrario a quello naturale. Si ottengono così tanti prodotti quante sono le permutazioni degl' indici 1, 2, ... n, cioè (v. COMBINATORIA, ANALISI) $n! = n\,(n-1)\ldots 3.2.1$. La somma algebrica di questi $n!$ prodotti (termini) è il determinante. Esso si designa di norma con la notazione (2), ma per brevità lo si indica con $\Sigma \pm a_{11}a_{22}\cdots a^{nn}$ o anche con $|a_{rs}|$. Come esempio, per $n=2$ (determinante di 2° ordine) si ha $D = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$; per $n = 3$, $D = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{33}\,a_{22}\,a_{31}$; per $n = 10$, D avrebbe 3.628.800 termini.

Il calcolo dei determinanti è fondato sulle seguenti proprietà:

I. Se si scambiano le righe con le colonne, D non cambia.

II. Se si scambiano due righe o colonne, D cambia segno.

III. Se D ha due righe o colonne con elementi rispettivamente uguali o proporzionali, D ha il valore zero.

IV. *Complemento algebrico* dell'elemento a_{rs} è il determinante A_{rs} di ordine $n-1$, che si ottiene sopprimendo in D la riga r^{ma} e la colonna s^{ma}, moltiplicando poi per $(-1)^{r+s}$. Ora, se tutti gli elementi della riga r^{ma} di D sono nulli meno a_{rs}, si ha $D = a_{rs}\,A_{rs}$.

V. Si ha che $a_{r1}\,A_{s1} + a_{r2}\,A_{s2} + \cdots a_{rn}\,A_{sn}$ è uguale a D se è $r = s$, e a zero se r è differente da s. Questa proprietà fondamentale permette di ricondurre il calcolo di un determinante d'ordine n a quello di determinanti d'ordine inferiore.

VI. Se gli elementi di una riga o colonna sono polinomî di p termini, D si decompone nella somma di p determinanti a elementi monomî.

VII. Non si altera il valore di D quando a una sua linea (colonna) si aggiungono ordinatamente gli elementi di un'altra linea (colonna) moltiplicati per un fattore comune.

VIII. Un determinante ottenuto da D sopprimendo, in D, m righe e m colonne si dice *minore* o *sotto-determinante* di ordine m di D; *complementare* di questo si dice il minore di ordine n-m, costituito dagli elementi comuni alle righe e colonne soppresse, preso con segno tale che il prodotto dei termini principali nei due minori sia un termine effettivo di D. Il determinante D è la somma dei prodotti dei minori di ordine m presi dalle stesse m righe per i proprî complementari: regola di decomposizione, detta di Laplace, che generalizza la proposizione V.

2. Varî tipi di determinanti speciali si sono presentati in molteplici questioni. Fra i più notevoli sono da ricordare: 1. i determinanti *simmetrici*, in cui è $a_{rs} = a_{sr}$, onde segue $A_{rs} = A_{sr}$; 2. i determinanti *emisimmetrici*, in cui è $a_{rs} = -a_{sr}$ e $a_{rr} = 0$: quelli di ordine dispari sono nulli, quelli di ordine pari sono i quadrati di espressioni razionali (pfaffiani) formate con le a_{rs}; 3. i determinanti *ortogonali*, in cui la somma dei quadrati degli elementi di ogni riga è uguale a 1, mentre la somma dei prodotti degli elementi di ogni riga per i corrispondenti di un'altra qualsiasi è nulla; cioè

$$a_{r1}^2 + a_{r2}^2 + \cdots + a_{rn}^2 = 1 \quad , \quad a_{r1}\,a_{s1} + a_{r2}\,a_{s2} + \cdots + a_{rn}\,a_{sn} = 0;$$

onde poi risulta che le stesse condizioni valgono per le colonne. Questi determinanti sono uguali a ± 1; e sono di questo tipo, in coordinate cartesiane ortogonali, i determinanti dei nove coseni direttori delle terne trirettangole di rette (v. CINEMATICA; COORDINATE); 4. i determinanti di Vandermonde-Cauchy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\cdots\cdots 1 \\ a_1 & a_2 & a_3\cdots\cdots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\cdots\cdots a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1}\quad a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Un tale determinante è uguale al prodotto delle differenze dei numeri $a_1, a_2, \cdots, a_n$, presi a due a due in tutti i modi possibili.

3. Oltre alle matrici quadrate, vanno considerate quelle rettangolari, in cui il numero m delle righe è diverso dal numero n delle colonne. Da una tale matrice

$$\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\cdots a_{mn} \end{matrix}\right.$$

si possono estrarre matrici quadrate, e quindi formare determinanti degli ordini successivi 1, 2, 3, ..., fino al minore dei due numeri

m, n. Se tutti i determinanti d'ordine p estratti dalla matrice sono nulli, lo sono anche quelli d'ordine $p+1$. *Caratteristica* o *rango* della matrice è l'ordine massimo che può avere un determinante non nullo estratto dalla matrice.

Date due matrici di elementi a_{rs}, b_{rs} rispettivamente con ugual numero m di linee e n di colonne, le somme $C_{rs} = a_{r1} b_{s1} + a_{r2} b_{s2} + \cdots a_{rn} b_{sn}$, essendo in numero di m^2, dànno luogo a una matrice quadrata e quindi a un determinante C. Se è $m > n$, C è nullo; se è $m = n$, le due matrici, in tal caso quadrate, dànno luogo a due determinanti A, B, ed è $C = AB$; se è $m < n$, C è uguale alla somma dei prodotti che si hanno moltiplicando fra loro i determinanti d'ordine m che si ottengono sopprimendo, in entrambe le matrici, $n - m$ colonne di ugual posto.

Il caso $m = n$ dà la moltiplicazione dei determinanti. Il quadrato di un determinante è un determinante simmetrico. Il determinante i cui elementi sono gli A_{rs} è uguale a D^{n-1}.

4. La prima e più importante applicazione della teoria dei determinanti si ha, come fu accennato da principio, nella risoluzione e discussione dei sistemi di equazioni lineari:

$$(3) \qquad a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \cdots + a_{rn} x_n = h_r \quad , \quad (r = 1, 2, \cdots m),$$

omogenee se tutte gli h_r (termini noti) sono nulli, non omogenee se uno almeno degli h_r è diverso da zero. 1. Se è $m = n$, e $D = |a_{rs}|$ è diverso da zero, il sistema non omogeneo ammette l'unica soluzione $x_i = D_i : D$ $(i = 1, 2, ..., n)$, essendo D_i il determinante ottenuto da D sostituendo in esso gli h_r agli elementi a_{ri} (regola di Cramer). 2. Quando $D = 0$, il sistema è impossibile, se almeno uno dei D_i è diverso da zero, indeterminato se tutti i D_i sono nulli. 3. Per un sistema omogeneo con $m = n$, il sistema è possibile con valori non tutti nulli delle x_i, se e soltanto se è $D = 0$. Per m e n quali si vogliono, il sistema è possibile, con grado d'indeterminazione (numero delle x, cui si possono dare valori arbitrarî) uguale a $n - p$ se p è la caratteristica (v. n. 3) della matrice dei coefficienti: certe $m - p$ delle equazioni sono conseguenze delle altre p. 4. Un sistema non omogeneo, con m diverso da n, è possibile e col grado di indeterminazione n-p sempreché la caratteristica p della matrice dei coefficienti sia uguale a quella della matrice dei coefficienti e dei termini noti (teorema di Rouché-Capelli).

5. Poiché quasi in ogni teoria analitica o geometrica si è condotti a considerare sistemi di equazioni lineari, altrettanti sono i casi in cui trovano applicazione i determinanti.

In particolare i determinanti forniscono uno dei metodi più comodi (metodo dialitico del Sylvester) per il calcolo e lo studio del risultante di due equazioni algebriche e del discriminante di un'equazione (v. ALGEBRA, nn. 14, 15). E nella geometria analitica in innumerevoli formule, intervengono con ufficio essenziale i determinanti (v. COORDINATE).

Qui, come essenzialmente legata all'uso dei determinanti, conviene ricordare, per il suo interesse analitico e geometrico, la *teoria delle trasformazioni lineari*. Si designa con questo nome ogni trasformazione di una n^{pla} di variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in un'altra $y_1, y_2, \ldots, y_n$, espressa da un sistema di equazioni della forma

$$(\mathrm{T}) \qquad y_r = a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \cdots + a_{rn} x_n \qquad (r = 1, 2, \cdots n),$$

dove gli a_{rs} denotano n^2 costanti date, il cui determinante $D = |a_{rs}|$ si dice *modulo* della trasformazione. Questa è invertibile, e quindi biunivoca, sempre e solo quando sia $D \gtrless 0$. Se $D = 0$, si dice *degenere*.

Ove le x e le y s'interpretino come coordinate non omogenee (cartesiane o anche proiettive) dei punti di uno spazio a n dimensioni, la (T) definisce in questo spazio un'*affinità* (proiettività fra i punti dello spazio, che trasforma in sé l'iperpiano improprio); se invece le x e y s'interpretano come coordinate omogenee dei punti di uno spazio a $n - 1$ dimensioni, la (T) definisce in codesto spazio un'omografia generale. Si ha una correlazione generale, se delle due n^{ple} x e y, una si considera costituita da coordinate di punti, l'altra da coordinate d'iperpiani.

Data una seconda trasformazione lineare (T_1), e fatto il prodotto – in senso operativo – delle due trasformazioni, si ottiene una nuova trasformazione lineare (le trasformazioni lineari formano dunque un *gruppo*), e il modulo del prodotto è uguale al prodotto dei moduli. Fra le trasformazioni lineari sono da segnalare le *ortogonali*, generalizzazione delle trasformazioni di coordinate cartesiane ortogonali nel piano o nello spazio (v. COORDINATE). Il relativo determinante D è ortogonale (n. 2), ed è perciò uguale a ± 1.

Se si cercano gli elementi uniti di una trasformazione lineare operata su due spazî sovrapposti, si giunge all'equazione in k:

$$(4) \qquad f(k) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0,$$

equazione (detta *fondamentale*) che si presenta in varie altre questioni di geometria e di meccanica; la riduzione di (T) alla sua forma più semplice dipende dallo studio dei minori del determinante a primo membro della (4). Nel caso simmetrico ($a_{rs} = a_{sr}$) essa ha tutte le radici reali, se sono reali gli elementi a_{rs}, e l'equazione è detta *secolare* perché presentatasi nello studio delle perturbazioni secolari dei pianeti.

6. Mentre si sono considerati finora determinanti a elementi numerici (costanti), non si deve omettere di ricordare quelli i cui elementi sono funzioni di una o più variabili. Se gli elementi sono funzioni continue, derivabili, tale è anche il determinante. La derivata di D rispetto a una variabile contenuta nelle a_{rs} è la somma di n determinanti, in cui ordinatamente gli elementi della prima, seconda, ... colonna di D sono sostituiti dalle rispettive derivate.

Determinante funzionale o *Jacobiano* di un sistema di n funzioni di altrettante variabili, $u_i(x_1, x_2, \ldots x_n)$, è il determinante

$$J = \Sigma \pm \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial u_n}{\partial x_n},$$

che si denota anche con $\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)/\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)$; esso è in un certo senso la generalizzazione dell'ordinaria derivata, cui si riduce per $n = 1$. L'annullarsi identico di J esprime che le u_i sono legate fra loro da una relazione (cioè non sono indipendenti); le equazioni $u_i(x_1, x_2, \cdots x_n) = y_i$ determinano univocamente le x_s in funzione delle y_i in un certo campo, se in quel campo J non si annulla mai; infine, J ha importanza nella trasformazione degl'integrali multipli, in cui l'elemento differenziale $dy_1\, dy_2 \cdots dy_n$ va sostituito con $|J| dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$.

Anche in geometria ricorre la considerazione del Jacobiano: ad esempio, essendo $\lambda_1 u_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 u_2(x_1, x_2, x_3) + \lambda_3 u_3(x_1, x_2, x_3) = 0$ l'equazione di una rete di curve algebriche dello stesso ordine, l'equazione $\partial(u_1, u_2, u_3)/\partial(x_1, x_2, x_3) = 0$ dà il luogo dei punti doppî delle curve della rete. Il Jacobiano delle n derivate prime di una funzione di n variabili è detto *Hessiano* della funzione; esso ha pure applicazioni in geometria; interviene inoltre nella discussione di problemi di massimi e minimi.

La condizione necessaria è sufficiente perché n funzioni $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ di una variabile siano *linearmente dipendenti*, cioè perché esistano n costanti c_r, non tutte nulle, tali che sia $c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots + c_n u_n(x) = 0$, è data dall'annullarsi identico del determinante

$$\left| \frac{d^s u_r(x)}{dx^s} \right|, \qquad (s = 0, 1, 2, \cdots n - 1),$$

detto determinante *Wronskiano*. Perché le funzioni siano dipendenti linearmente nel senso del calcolo delle differenze (le c_r funzioni periodiche di periodo 1), è necessario e sufficiente che si annulli il determinante $|u_r(x + s)|$ $(s = 0, 1, 2, \cdots n - 1)$ detto *determinante del Casorati*.

7. Se gli elementi $a_{rs}(r, s = 1, 2, 3 \cdots n)$ di una matrice quadrata sono tali da conservare significato anche se n percorre tutta la serie dei numeri naturali 1, 2, 3, ..., si può costruire una successione di determinanti $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$, che, sotto condizioni opportune, può tendere a un limite determinato Δ quando n tende all'infinito: Δ viene detto allora *determinante infinito*, e a tali determinanti è lecito, sotto le accennate condizioni, di estendere le proprietà dei determinanti ordinarî; in particolare, lo sviluppo a mezzo degli elementi reciproci. Sono da notare i determinanti infiniti *normali*, in cui $a_{rr} = 1 + \lambda_r$, e la serie $\Sigma\lambda_r + \Sigma a_{rs}$ (r diverso da s) è assolutamente convergente: essi sono convergenti e ammettono l'estensione della teoria ordinaria. I determinanti infiniti trovano applicazione nella risoluzione di sistemi d'infinite equazioni lineari a infinite incognite. Sono stati usati, nella teoria delle equazioni differenziali lineari, determinanti infiniti in cui n percorre la serie dei numeri interi da $-\infty$ a $+\infty$. Nella teoria delle equazioni integrali ha parte fondamentale una trascendente intera (*determinante del Fredholm*) che è un determinante d'ordine infinito.

8. I determinanti sono pure stati generalizzati in un altro senso, considerando matrici non più quadrate, ma cubiche, e anche a un numero qualsiasi di dimensioni. Il determinante cubico $|a_{rst}|$ $(r, s, t = 1, 2, \ldots n)$, consta di n^3 elementi; esso è dato dalla somma algebrica dei prodotti che si deducono dal termine principale $a_{111}\, a_{222}\, a_{333} \ldots a_{nnn}$, permutando in tutti i modi i secondi e i terzi indici e dando a ogni termine il segno $+$ o $-$ a seconda che è pari o dispari il numero complessivo delle inversioni contenute nelle due permutazioni. Il determinante cubico d'ordine n consta dunque di $(n!)^2$ termini. Analoga definizione per i determinanti a quattro o più dimensioni. Di questa generalizzazione dei determinanti si sono occupati varî autori, ma non sembra per ora che la loro utilità sia tale da compensarne la complicazione.

9. CENNO STORICO. – Il concetto di determinante, insieme con la legge di formazione, compare per la prima volta in una lettera di Leibniz a L'Hôpital (1693); vi si trova già l'opportuno espediente d'indicare gli elementi mediante due indici. E. Bezout (1750) studia sistemi di equazioni lineari; G. Cramer ritrova (1750) la costruzione dei determinanti e ne dà l'applicazione alla risoluzione delle equazioni lineari mediante la regola che ne porta il nome. P. Laplace (1772) scopre lo sviluppo del determinante mediante la somma dei prodotti dei suoi minori. A. Cauchy mette in uso il nome di determinante (già usato da Gauss in un caso particolare, a indicare cioè il discriminante $b^2 - ac$ della forma quadratica $ax^2 + 2bx + c$) e dà (1815) della teoria una prima trattazione organica. La teoria

e le applicazioni si vanno poi sviluppando per opera di Jacobi, Cayley, Sylvester, Brioschi, Trudi, Frobenius, Kronecker, ecc. Al Brioschi si deve (1854) il primo trattato sui determinanti, al quale segue (1857) quello del Baltzer. Il concetto di caratteristica è di Frobenius (1887): il teorema fondamentale relativo (v. n. 4) è stato trovato indipendentemente (1885-89) da questo autore, da Rouché e da Capelli. Alla teoria dei determinanti infiniti hanno contribuito Hill (1886), Poincaré (1886), H. von Koch (1891) e T. Cazzaniga (1897); a quella dei determinanti cubici o a più dimensioni De Gasparis (1861), Gegenbauer (1885), Lecat (1910).

BIBL.: F. Brioschi, *La teoria dei determinanti*, Pavia 1854; R. Baltzer, *Theorie und Anwendung der Determinanten*, Lipsia 1857; N. Trudi, *Teoria dei determinanti e loro applicazioni*, Napoli 1862; S. Günther, *Lehrbuch der Determinantentheorie*, Erlangen 1877; P. Mansion, *Éléments de la théorie des déterminants*, Parigi 1883; E. Pascal, *I determinanti*, Milano 1897; G. Kowalewski, *Einführung in die Determinantentheorie*, Lipsia 1909; M. Lecat, *Leçons sur la théorie des déterminants à n dimensions*, Gand 1910. – Per la completa bibliografia fino al 1918: Th. Muir, *The theorie of Determinants in the historical order of development*, voll. 3, Londra 1906-1920. S. Pin.