Salvatore Pincherle

Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies

Acta Mathematica, Vol. **10** (1887), p. 153–182

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 1, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 142–172

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_1_142>

4 [28].

Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies.

Acta Mathematica (Stockholm);
10, 153-182 (1887).

Le présent travail a pour objet d'esquisser quelques points de la théorie des expressions propres à représenter des fonctions analytiques et données sous forme d'intégrales définies. Je me borne ici aux expressions de la forme

$$\int A(x, y)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y\,,$$

où l'intégrale est prise le long d'une ligne quelconque du plan y. Je me place à un point de vue qui n'est pas sans précédents (1), mais qui, à ce que je crois, n'a pas encore été abordé d'une manière générale. Je considère en effet l'expression ci-dessus comme un algorithme appliqué au *sujet* variable $\varphi(y)$ et dont les propriétés essentielles dépendent de la fonction $A(x, y)$. Ces propriétés sont de deux sortes, formelles et effectives, et bien que la démarcation entre elles ne soit pas toujours nettement tranchée, je m'en occuperai séparément dans les deux parties de ce Mémoire.

I.

1. — Soit $A(x, y)$ une fonction analytique de deux variables. D'après la définition de M. Weierstrass, cette fonction est régu-

(1) V. à ce sujet une courte notice historique placée en tête de mon Mémoire « *Sopra alcune operazioni funzionali,* Memorie dell'Accad. di Bologna, S. IV, T. VII, 1886 ».

lière dans le domaine d'une couple de valeurs (x_0, y_0) quand elle est développable, sous les conditions

$$|x - x_0| < \delta, \qquad |y - y_0| < \delta',$$

en une série de puissances entières et positives de $x - x_0, y - y_0$. La fonction $A(x, y)$ pourra d'ailleurs avoir des singularités quelconques, et chaque point $\overline{y}$, pris dans le plan y, déterminera dans le plan x le système, *correspondant à* $\overline{y}$, des singularités de la fonction $A(x, \overline{y})$.

Soit l une ligne, définie analytiquement, et ayant une longueur finie et déterminée, tracée dans le plan y. Si l'on fait varier y le long de cette ligne, les singularités correspondantes décrivent dans le plan x, certains lieux géométriques correspondants à l (*coupures*, selon l'expression de M^rs^ HERMITE et GOURSAT). Dans les cas les plus communs, ces coupures sont des lignes, mais elles peuvent être aussi des points ou des aires. J'indiquerai par T_x un champ connexe, pris dans le plan x, et tel que les coupures correspondant à l n'aient aucun point commun avec T_x.

2. — Cela posé:

A. « Si $\varphi(y)$ est une fonction à une seule valeur, finie et continue, arbitrairement donnée pour les points de la ligne l, l'expression

$$\int_l A(x, y)\, \varphi(y)\, dy \tag{1}$$

où l'intégration est faite le long de la ligne l, représente, à l'intérieur du champ T_x, une fonction analytique et monogène [1] de x. »

Prenons en effet un point quelconque x_0 à l'intérieur de T_x. Du point x_0 comme centre, décrivons un cercle (cercle r) avec un rayon r au plus égal à la limite inférieure des distances de x_0 aux coupures correspondant à l. Pour tout point y de la ligne l, la fonction $A(x, y)$ est régulière pour les valeurs de x comprises dans un cercle de centre x_0 et de rayon au moins égal à r; elle peut par conséquent se développer en une série de puissances de $x - x_0$, dont les coefficients sont des fonctions de y régulières en chaque point

---

[1] Dans le sens adopté par M^rs^ WEIERSTRASS et MITTAG-LEFFLER.

de l. Si donc l'on pose

$$(2) \qquad A(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}(x_0, y)(x - x_0)^n,$$

on aura

$$|A^{(n)}(x_0, y)| < \frac{M}{r'^n},$$

où M est une quantité positive au moins égale à la limite des modules de $A(x, y)$ pour x intérieur au cercle r et y pris le long de la ligne l, et r' est un nombre positif moindre que r. Pour les couples de valeurs de x, y prises comme on vient de le dire, la série (2) est donc convergente absolument et uniformément; on peut la multiplier par $\varphi(y)\,\mathrm{d}y$ et intégrer le long de l, et il vient:

$$\int_l A(x, y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \Sigma\,(x - x_0)^n \int_l A^{(n)}(x_0, y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

L'expression (1) équivaut donc, à l'intérieur du cercle r, à une série convergente de puissances entières et positives de $x - x_0$, et représente par conséquent une fonction analytique, c. q. f. d. [1].

3. — Il est clair que la fonction ainsi définie peut être continuée analytiquement de proche en proche pour tout l'intérieur du champ T_x, et qu'elle représente par conséquent, à l'intérieur de ce champ, une seule et même fonction $f(x)$ monogène. Toutefois, si l'on considère un champ T'_x satisfaisant aux mêmes hypothèses que T_x, mais tel que l'on ne puisse passer de T_x à T'_x sans traverser les coupures, la même expression (1) représentera en général dans les deux champs deux fonctions analytiques différentes.

4. — Une démonstration tout-à-fait semblable servirait à prouver les deux propositions suivantes:

---

(1) Ce théorème, sous des hypothèses différentes et pour y réel, se trouve démontré dans l'*Habilitationsschrift* du jeune et regretté géomètre L. SCHEEFFER; un théorème semblable est admis aussi par M. GOURSAT au début de son beau Mémoire *Sur une classe de fonctions représentées par des intégrales définies* (ce journal T. 2). J'ai cru devoir reprendre ce théorème, d'abord parce qu'il est fondamental pour ce qui va suivre, ensuite parce que la démonstration que j'en donne, faite au point de vue de M. WEIERSTRASS, est toute différente de celle de SCHEEFFER, fondée sur le concept de fonction de variable complexe selon CAUCHY et RIEMANN.

B. « Dans le champ T_x, la dérivée de la fonction $f(x)$ s'obtient en dérivant sous le signe. »

C. « L'expression

$$\int_{l_1}\int_{l} A(x, y)\, B(y, t)\, \varphi(t)\, dy\, dt\,,$$

sous des hypothèses analogues et dans un champ T_x défini comme ci-dessus, représente une fonction analytique de x, et sous les mêmes hypothèses, on peut intervertir l'ordre des intégrations. »

5. — On pourrait aisément rendre moins restrictives les hypothèses faites sur la fonction $\varphi(y)$, mais cela n'est pas nécessaire pour le but de ce travail. Au contraire, je supposerai dorénavant que $\varphi(y)$ soit une fonction analytique de la variable y, régulière pour tous les points de la ligne l.

6. — Si l'on pose

$$f(x) = \int_{l} A(x, y)\, \varphi(y)\, dy,$$

où x est pris dans le champ T_x, on peut regarder $A(x, y)$ comme une fonction donnée, fixe, tandis que $\varphi(y)$ pourra varier, tout en restant comprise en certaines classes déterminées. Je regarderai l'expression (1) comme un algorithme ou une *opération fonctionnelle* exécutée sur la fonction $\varphi(y)$. La nature de cette opération dépend surtout de la fonction $A(x, y)$, que j'appellerai *fonction caractéristique* de l'algorithme.

La fonction caractéristique et la ligne d'intégration restant fixées, la relation entre $\varphi(y)$ et $f(x)$ peut s'écrire d'une façon abrégée:

$$f(x) = A(\varphi)\,. \tag{3}$$

Lorsque la fonction $\varphi(y)$ varie, sans cesser d'appartenir à une certaine classe déterminée, la fonction $f(x)$ varie d'une façon correspondante, en restant comprise dans certaines classes déterminées par la relation (3). Cette relation peut donc servir à exprimer, non seulement une dépendance entre les deux fonctions f et φ, mais encore une correspondance entre deux classes de fonctions analytiques. Pour en donner un exemple, il suffit de rappeler la transformation de LAPLACE, qui n'est autre chose qu'une correspondance de cette espèce, et dont M. POINCARÉ a tout récemment renouvelé l'usage d'une façon si efficace, dans l'étude des intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires (1).

7. — Remarquons une fois pour toutes que pour chaque ligne d'intégration l, il existe en général des fonctions analytiques telles que

$$\int_l f(y)\, dy = 0 . \tag{4}$$

J'indique ces fonctions par $\omega_i(y)$.

La fonction

$$\omega(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, \omega_i(y),$$

où les fonctions $a_i(x)$ sont arbitraires, satisfait pareillement à l'équation (4) quel que soit n et même pour $n = \infty$ si la série est intégrable terme à terme. (Il suffit pour cela qu'elle soit convergente uniformément ou qu'elle satisfasse à l'autre condition moins restrictive récemment donnée par M. ARZELÀ (2)).

8. — L'un des problèmes les plus importants qui se présentent dans l'étude de la correspondance définie par la relation (3), est le suivant :

« Etant données la fonction caractéristique $A(x, y)$, la ligne d'intégration l, et une fonction $f(x)$ dans le champ T_x, déterminer la fonction $\varphi(y)$. »

Ce problème, qu'on a appelé « inversion des intégrales définies » (3), et qui se présente fréquemment en Physique mathématique et notamment dans la théorie du potentiel, a été traité dans de nombreux cas particuliers, mais il n'est pas à ma connaissance qu'il en ait été fait une étude générale. Pour l'historique de la question, je renvoie à mon Mémoire déjà cité, publié par l'Académie de Bologne.

---

(1) American Journal of Mathematics, T. 7. — Acta Mathematica, T. 8.

(2) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1885.

(3) LAURENT, *Sur le calcul inverse des intégrales définies,* Journal de Mathém., S. III, T. IV. Dans ce Mémoire le problème est énoncé en général, mais la solution n'en est donnée que pour deux cas particuliers.

Remarquons, en passant, que dans la plupart des cas, le problème du développement d'une fonction en série de fonctions données, se ramène à une question d'inversion d'intégrales définies.

Le problème d'inversion équivaut à la recherche de l'opération inverse de $A(\varphi)$. D'après le § 7, cette opération sera en général multiforme; or, je me propose d'étudier le cas où l'une des déterminations de cette opération inverse peut se représenter par un algorithme de la même espèce que $A(\varphi)$. En d'autres termes, je m'occuperai du cas où il existe une fonction $\boldsymbol{A}(y, t)$ et une ligne d'intégration λ telles que l'on ait (au moins pour certaines classes de fonctions φ et f):

$$\varphi(y) = \int_\lambda \boldsymbol{A}(y, t) f(t) \, dt$$

comme conséquence de

$$f = A(\varphi) .$$

En ce cas, le problème d'inversion revient à la recherche de la fonction $\boldsymbol{A}(y, t)$, que j'appellerai fonction *réciproque* de $A(x, y)$.

Je ferai précéder cette recherche des considérations suivantes.

9. — Soient deux opérations A, B définies par les fonctions caractéristiques $A(x, y)$, $B(y, t)$. Si l'on exécute sur une fonction φ, d'abord l'opération B, puis l'opération A sur le résultat obtenu, cette double opération pourra s'appeler le *produit* des deux opérations A, B, et on pourra l'indiquer par

$$A\,B(\varphi) .$$

On doit toujours supposer vérifiées les conditions sous lesquelles ces opérations ont une signification déterminée, p. ex. les conditions suffisantes énoncées au § 2. Je n'insisterai donc pas ici sur ces conditions, d'autant plus qu'il ne s'agit pour le moment que du côté *formel* de la question. On a, en indiquant par l' la ligne d'intégration dans le plan t,

$$A\,B(\varphi) = \int_l A(x, y) \int_{l'} B(y, t)\, \varphi(t) \, dt \, dy$$

que l'on peut écrire (§ 4, C)

$$\int_{l'}\int_{l} A(x, y) B(y, t) \, dy \, \varphi(t) \, dt ,$$

d'où il suit que l'opération $AB(\varphi)$ est de la même nature que $A(\varphi)$, et a pour fonction caractéristique

$$\int_{l} A(x, y) B(y, t) \, dy .$$

On définirait de même le *produit* de trois ou d'un nombre quelconque d'opérations de la même nature que A.

10. — Le produit des opérations A, tel qu'on vient de le définir, satisfait aux lois distributives et associatives. Cela se vérifie sans difficulté. Mais le produit de deux opérations A ne satisfait pas, en général, à la loi commutative.

11. — Si $\boldsymbol{A}(y, t)$ est la fonction réciproque de $A(x, y)$ on aura

$$A\boldsymbol{A}(\varphi) = \varphi ,$$

c'est-à-dire la fonction

$$U(x, t) = \int A(x, y) \boldsymbol{A}(y, t) \, dy$$

est telle, qu'au moins pour certaines classes de fonctions φ et certaines portions du plan x convenablement choisies, on a

(5) $$U(\varphi) = \varphi .$$

Telle est, par exemple, pour les fonctions φ régulières dans une aire limitée par une courbe fermée, la fonction $\dfrac{1}{t - x}$.

12. — Avant d'aller plus loin, il nous faut examiner une espèce particulière d'opérations (3) : ce sont celles *qui conservent la dérivation* ; c'est-à-dire (en indiquant les dérivées par des accents) telles que l'on ait :

(6) $$A(\varphi) = f , \qquad A(\varphi') = f' .$$

On peut faire sur ces opérations les remarques suivantes :

a) Les fonctions U telles que (5) conservent la dérivation.

b) Si une opération A conserve la dérivation, sa réciproque $\mathbf{A}$ la conserve aussi.

c) Si une opération A conserve la dérivation, les fonctions $A\,(y^n)$ ne sont autre chose que les polynômes de M. APPELL [1].

En effet, d'après l'hypothèse (6), l'opération A appliquée à une constante donnera une constante ; appliquée à y, elle donnera donc une fonction linéaire en x ; appliquée à y^n, elle donnera un polynôme de degré n en x. De plus, par la même hypothèse (6), si l'on pose

$$A\,(y^n) = a_n\,(x)$$

on a

$$\frac{\mathrm{d}\,a_n\,(x)}{\mathrm{d}\,x} = n\,A\,(y^{n-1}) = n\,a_{n-1}\,(x)\,,$$

ce qui est précisément la définition des polynômes de M. APPELL.

d) Réciproquement, si une opération A est telle que les fonctions $A\,(y^n)$ constituent un système de polynômes de M. APPELL, cette opération conserve la dérivation, au moins pour les séries de puissances. Cela se vérifie aisément.

13. — Le produit de deux opérations qui conservent la dérivation jouit de la même propriété. En effet, si les opérations A et B conservent la dérivation, on a d'après ce qui précède :

$$A\,(y^n) = \alpha_0\,x^n + n\,\alpha_1\,x^{n-1} + \binom{n}{2}\alpha_2\,x^{n-2} + \dots + \alpha_n\,, \tag{7}$$

$$B\,(y^n) = \beta_0\,x^n + n\,\beta_1\,x^{n-1} + \binom{n}{2}\beta_2\,x^{n-2} + \dots + \beta_n\,; \tag{7'}$$

or, formons

$$A\,B\,(t^n) = \int\limits_{l'}\int\limits_{l} A\,(x\,,y)\,B\,(y\,,t)\,t^n\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\,,$$

on aura

$$A\,B\,(t^n) = \int\limits_{l} A\,(x\,,y)\left[\beta_0\,y^n + n\,\beta_1\,y^{n-1} + \binom{n}{2}\beta_2\,y^{n-2} + \dots + \beta_n\right]\mathrm{d}y\,,$$

---

(1) *Sur une classe de polynômes* (Annales de l'École Normale Supérieure, 1880).

d'où

$$A B\,(t^n) = \beta_0\, a_n(x) + n\,\beta_1\, a_{n-1}(x) + \ldots + \beta_n\, a_0\,.$$

Mais ceci est encore un des systèmes de polynômes en question, et précisément celui que M. APPELL indique par $(A B)_n$ (1); d'où suit que l'opération $A B$, au moins formellement et pour les séries de puissances, conserve encore la dérivation.

14. — Il résulte de ce qui précède que la recherche de la fonction réciproque d'une fonction $A\,(x, y)$ qui conserve la dérivation, pour une ligne d'intégration donnée, dépend de la recherche des polynômes que M. APPELL nomme *inverses* des polynômes $a_n(x)$: or comme on peut toujours construire ces polynômes inverses, il s'ensuit que l'on peut, au moins formellement, intervertir l'opération A.

15. — Cherchons la forme générale des fonctions $A\,(x, y)$ qui conservent la dérivation. A cet effet, soit

$$A\,(x, y) = \frac{\partial \bar{A}\,(x, y)}{\partial y}\,;$$

on aura, par hypothèse,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_l \frac{\partial \bar{A}\,(x, y)}{\partial y}\,\varphi\,(y)\,dy = f\,(x)\,,\\ &\int_l \frac{\partial \bar{A}\,(x, y)}{\partial y}\,\varphi'\,(y)\,dy = f'\,(x)\,.\end{aligned}\right.$$

Intégrons par parties la première de ces équations, et nous aurons :

$$f(x) = [\bar{A}\,(x, y)\,\varphi\,(y)]_l - \int_l \bar{A}\,(x, y)\,\varphi'\,(y)\,dy\,.$$

Or supposons que l'on ait :

$$(9)\qquad [\bar{A}\,(x, y)\,\varphi\,(y)]_l = 0\,,$$

---

(1) Loc. cit., § 3.

il vient

$$f(x) = -\int_l \bar{A}(x, y)\, \varphi'(y)\, dy\,;$$

d'où, en dérivant sous le signe et en tenant compte de la seconde des équations (8), on a:

$$\int_l \left(\frac{\partial \bar{A}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{A}(x, y)}{\partial y} \right) \varphi'(y)\, dy = 0\,. \tag{10}$$

Cette équation est satisfaite quelle que soit la fonction φ si l'on prend

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = 0\,,$$

d'où

$$A(x, y) = \Phi(y - x)\,,$$

où Φ est une fonction arbitraire.

16. — Revenons maintenant à la question générale que nous avons posée au § **8**, c'est à dire à la détermination de la fonction réciproque d'une fonction quelconque $A(x, y)$. Je remarque que ce problème, et par suite celui de l'inversion d'une intégrale définie de la forme (1), sera formellement résolu si l'on pourra déterminer une fonction $B(y, t)$ telle que le produit AB conserve la dérivation. En effet, il suffira alors de déterminer la fonction $C(x, y)$, réciproque de la fonction caractéristique de l'opération AB, ce qui est possible d'après le § **14**; on aura donc

$$ABC(\varphi) = \varphi\,,$$

et puisque les opérations (3) obéissent à la loi associative, on aura,

$$BC = A\,.$$

Notre problème est donc ramené à la recherche de la fonction $B(y, t)$. S'il est possible, il admettra en général une infinité de solutions.

17. — Posons à cet effet:

$$E(x, y) = \int_l A(x, y)\, B(y, t)\, dy\,;$$

il suffira que la fonction $E(x, t)$ satisfasse à l'équation aux limites (9) et à l'équation

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t} = \int_l \left(\frac{\partial A}{\partial x} B + A \frac{\partial B}{\partial t}\right) d\, y = 0 . \tag{11}$$

Or, si nous indiquons, comme au § 7, les fonctions dont l'intégrale est nulle le long de la ligne d'intégration par $\omega_i(y)$, l'equation précédente équivaut à

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} B(y, t) + \frac{\partial B(y, t)}{\partial t} A(x, y) = \Sigma \lambda_i(x, t)\, \omega_i(y) ,$$

où les λ_i sont des fonctions arbitraires. On résout facilement cette équation linéaire du premier ordre en B; mais l'intégrale dépend de x, y et t, tandis que B ne doit contenir que y et t. On devra donc déterminer les fonctions arbitraires λ_i et la fonction arbitraire amenée par l'intégration, en sorte que l'on ait $\dfrac{\partial B}{\partial x} = 0$ et que l'équation aux limites soit satisfaite. Si cela est possible, le problème est résolu.

Comme on l'a déjà remarqué *à priori*, lorsque le problème est possible, B contiendra encore des fonctions arbitraires même après qu'on aura satisfait aux conditions ci-dessus. En effet, lorsqu'on a trouvé une fonction B, on peut en déduire une infinité d'autres. Une détermination spéciale des fonctions arbitraires nous donnera (§ 14) la fonction réciproque de $A(x, y)$.

18. — Le procédé que je viens d'indiquer pour résoudre le problème de l'inversion des intégrales définies, est assez long dans la pratique; toutefois il peut être simplifié selon les formes particulières des fonctions caractéristiques et des lignes d'intégration.

Voici quelques remarques qui peuvent servir à l'abréger dans certains cas particuliers :

a) Si une opération A peut s'écrire sous forme de *produit* de deux autres opérations :

$$A = MN,$$

et que l'opération M conserve la dérivation, il suffira que NB conserve la dérivation pour qu'il en soit de même de AB. Cette remarque pourra, dans certains cas, simplifier la recherche de la fonction B.

b) Si la fonction $A(x, y)$ est de la forme $M(x, y)\,\varphi(y)$ et admet pour fonction réciproque $B(y, t)$, la fonction $M(x, y)$ aura pour fonction réciproque $\dfrac{B(y, t)}{\varphi(y)}$.

c) Si la fonction $A(x, y)$ admet pour fonction réciproque $B(y, t)$, la fonction $\dfrac{\partial A(x, y)}{\partial y}$ admet pour fonction réciproque $\int^{y} B(y,t)\,dy$, sous la condition que l'équation aux limites soit satisfaite; on trouve un résultat analogue pour les dérivées partielles d'ordre supérieur par rapport à y de la fonction $A(x, y)$.

19. — Pour le moment, je me bornerai à examiner un seul cas particulier du problème précédent: celui où les fonctions A et B vérifient l'équation

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} B(y, t) + \frac{\partial B(y, t)}{\partial t} A(x, y) = 0 . \tag{12}$$

Si de telles fonctions existent, l'équation (11) sera satisfaite, quelle que soit la ligne d'intégration. Or l'équation (12) peut s'écrire :

$$\frac{\dfrac{\partial A(x, y)}{\partial x}}{A(x, y)} = - \frac{\dfrac{\partial B(y, t)}{\partial t}}{B(y, t)} ;$$

mais ici le second membre ne contient pas x; il faudra donc qu'il en soit de même du premier, qui devra par conséquent être une fonction de y seulement. On aura donc :

$$\frac{\partial}{\partial x} \log A(x, y) = f(y),$$

d'où, en indiquant par $\chi(y)$ une fonction arbitraire :

$$A(x, y) = \chi(y)\, e^{x f(y)} . \tag{13}$$

Il en résulte

$$\frac{\partial}{\partial t} \log B(y, t) = - f(y)$$

et par conséquent

$$B(y, t) = \tau(y)\, e^{-tf(y)}, \tag{14}$$

où $\tau(y)$ est encore une fonction arbitraire. Comme on l'a vu plus haut (§ 17), pour une détermination spéciale de cette fonction $\tau(y)$, on obtiendra la fonction $A(y, t)$ réciproque de $A(x, y)$. Cette détermination dépendra de $f(y)$, de $\chi(y)$ et des lignes d'intégration.

20. — La transformation de LAPLACE, celle d'ABEL, la transformation analogue

$$\int e^{\frac{x}{y}} \varphi(y) \frac{dy}{y},$$

où l'intégration est étendue à un contour fermé et qui est si utile pour la génération de fonctions trascendantes entières [1], ne sont que des cas particuliers de la transformation dont la fonction caractéristique a la forme (13). Ces opérations fonctionnelles s'appliquent, comme on sait [2], soit à la transformation de certaines équations différentielles en d'autres, soit à la transformation de certaines classes d'équations différentielles linéaires en équations linéaires aux différences finies.

On trouve dans les oeuvres de RIEMANN (p. 140) la solution du problème d'inversion d'une intégrale définie, dont la fonction caractéristique présente un cas particulier de la forme (13). RIEMANN, sous la condition que l'équation aux limites soit vérifiée, obtient en effet, l'expression réciproque de

$$f(x) = \int y^{-x} \varphi(y) \frac{dy}{y},$$

---

(1) V. mon Mémoire déjà cité (Mem. dell'Accad. di Bologna, S. IV, T. VII, §§ 24 et suiv.).

(2) Pour les applications récentes de ces transformations, v. sortout les Mémoires, déjà cités, de M. POINCARÉ; et encore HJ. MELLIN, *Zur Theorie der Gammafunction*, § 12 (Acta Mathematica, T. 8), et *Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen* (Ibid. T. 9), ainsi que ma Note insérée aux Rendiconti del R. Istituto Lombardo, juin 1886.

sous la forme

$$\varphi(y) = \int y^t f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

ce qui peut parfaitement se déduire des formules précédentes.

II.

21. — J'ai montré aux §§ **1** et **2** que l'expression

$$(1) \qquad A(\varphi) = \int_l A(x, y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

représente, dans tout champ connexe qui n'a aucun point commun avec les coupures correspondant à la ligne l, une fonction ou branche de fonction analytique monogène. J'ai considéré l'expression $A(\varphi)$ comme une opération appliquée au *sujet* φ, et j'ai indiqué une méthode pour la résolution, au moins formelle, de l'équation

$$A(\varphi) = \psi,$$

où φ est une fonction inconnue: ce qui revient à la recherche de l'opération $\boldsymbol{A}$ réciproque de A, telle que

$$\varphi = \boldsymbol{A}(\psi).$$

Je me propose maintenant de donner les propriétés, non plus seulement formelles, mais effectives de l'opération A; je serai toutefois forcé de me borner, pour le moment, au cas où la ligne d'intégration est fermée, et plus particulièrement au cas où elle se réduit à une circonference quelconque du plan y. Pour abréger, j'indiquerai par (α, ϱ) une circonférence de centre $y = \alpha$ et de rayon ϱ.

La fonction caractéristique $A(x, y)$ sera aussi soumise à quelques restrictions. Je supposerai que les points singuliers de cette fonction soient les couples de valeurs qui vérifient l'équation algébrique, de degré m,

$$(2) \qquad f(x, y) = 0\,;$$

je supposerai encore que $A(x, y)$ soit une fonction uniforme, et soit nulle du 1er ordre pour $y = \infty$, sauf pour un nombre fini de valeurs de x; mais ces deux dernières restrictions seraient faciles à lever par des méthodes connues.

22. — Examinons d'abord de plus près les coupures correspondant à la circonférence (α, ϱ) [1]. Pour chaque point $\overline{x}$ du plan x, l'équation (2) donne m valeurs pour $y-\alpha$; nous pourrons figurer les modules de ces valeurs par des ordonnées élevées au point $\overline{x}$ perpendiculairement au plan x. Le lieu des extrémités de ces ordonnées sera une surface S_α, formée en général de plusieurs nappes; ces nappes peuvent, en certains cas, se recouvrir en tout ou en partie, ou se rencontrer suivant des lignes ou en des points singuliers de la surface.

Si l'on coupe la surface S_α par un plan w parallèle au plan des x et à la distance ϱ, la section se projette en vraie grandeur sur le plan x en une courbe C_ϱ, lieu des points pour lesquels au moins une des solutions de l'équation (2) vérifie la condition

$$|y-\alpha| = \varrho .$$

Or, les ordonnées élevées au plan x jusqu'à la rencontre du plan sécant w pourront, pour certaines régions du plan x, ne rencontrer aucun point de la surface S_α; pour d'autres régions, elles rencontreront une, deux, ..., m nappes de la surface; et ces diverses régions du plan x, connexes ou non, seront séparées l'une de l'autre par des branches de la courbe C_ϱ. J'indiquerai par

$$E_i(\alpha, \varrho), \qquad (i = 0, 1, 2, ..., m),$$

la région du plan x telle que l'ordonnée élevée en l'un de ses points jusqu'à la rencontre du plan w rencontre i nappes (distinctes ou coïncidentes) de la surface S_α; en sorte que pour tout point de $E_i(\alpha, \varrho)$, i racines de l'équation (2) vérifient l'inégalité

$$|y-\alpha| < \varrho .$$

23. — Je vais maintenant étudier plus en détail l'opération $A(\varphi)$, en commençant par le cas où la variable x est prise à l'intérieur du champ que je viens d'indiquer par $E_m(\alpha, \varrho)$. Pour de

---

[1] Cfr. § 3 de mon Mémoire « *Studi sopra alcune operazioni funzionali,* Mem. della R. Accad. delle Scienze di Bologna, S. IV, T. VII, 1886 ». (*R.*) Questa Memoria è la pubblicazione 3 del presente Volume.

telles valeurs de x, toutes les singularités de $A(x, y)$ sont, par définition, à l'intérieur du cercle (α, ϱ); on peut donc écrire, pour x intérieur à $E_m(\alpha, \varrho)$ et pour $|y| \geqq \varrho$:

$$A(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x)}{(y-\alpha)^{n+1}} . \tag{3}$$

Soit maintenant $\varphi(y)$ une fonction analytique uniforme quelconque, mais qui n'a aucune singularité le long de la circonférence (α, ϱ): on aura dans la couronne circulaire comprise entre les circonférences $(\alpha, \varrho - \varepsilon)$ et $(\alpha, \varrho + \varepsilon)$, où ε est une quantité positive suffisamment petite:

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (y-\alpha)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c'_n}{(y-\alpha)^{n+1}} .$$

Pour abréger, j'indiquerai les deux séries du second membre respectivement par [1]

$$\boldsymbol{i}_\varrho \varphi \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{j}_\varrho \varphi .$$

La première est convergente dans tout le cercle $(\alpha, \varrho + \varepsilon)$; la seconde l'est en dehors du cercle $(\alpha, \varrho - \varepsilon)$.

Or, on vérifie immédiatement que

$$A(\boldsymbol{j}_\varrho \varphi) = 0 , \qquad A(\boldsymbol{i}_\varrho \varphi) = A(\varphi) \tag{4}$$

et que

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A_n(x) . \tag{5}$$

On voit donc que pour les valeurs de x prises à l'intérieur de $E_m(\alpha, \varrho)$, il suffit d'appliquer l'opération A aux séries de puissances convergentes dans un cercle $(\alpha, \varrho + \varepsilon)$. L'opération A fait correspondre à ces séries, des séries de fonctions $A_n(x)$ ayant les mêmes coefficients, convergentes uniformément au moins dans le champ $E_m(\alpha, \varrho)$, et qui représentent dans ce champ la même fonction que l'intégrale (1).

24. — Examinons les cas les plus remarquables auxquels peut donner lieu l'opération A appliquée à une fonction $\varphi(y)$ régulière dans le cercle (α, ϱ), la circonférence comprise.

---

(1) Cfr. mon Mémoire cité, § 2 et passim.

a) Supposons que la fonction $\varphi(y)$ ait un seul point singulier β, situé en dehors de (α, ϱ). On a alors, en négligeant une constante additive,

$$\varphi(y) = \Sigma \frac{a_n}{(y-\beta)^{n+1}};$$

mais, puisque $A(x, y)$ est régulière en dehors de (α, ϱ), on a par le théorème de CAUCHY:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\varrho \frac{A(x, y)}{(y-\beta)^{n+1}} dy = -\frac{1}{n!} \frac{\partial^n A(x, \beta)}{\partial \beta^n}.$$

On a donc

$$A(\varphi) = -2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \frac{\partial^n A(x, \beta)}{\partial \beta^n}. \tag{6}$$

Ce développement est convergent dans tout le champ $E_m(\alpha, \varrho)$ et y coïncide avec le développement (5); mais il converge aussi en dehors de ce champ. En effet, pour une valeur quelconque $\bar{x}$ de x on a:

$$A(\bar{x}, y) = \sum_0^{\infty} \frac{(y-\beta)^n}{n!} \frac{\partial^n A(\bar{x}, \beta)}{\partial \beta^n};$$

la série du second membre converge dans un cercle de centre β et de rayon égal à la plus petite distance $\delta(\bar{x})$ du point β aux points singuliers de $A(\bar{x}, y)$. On aura donc, en indiquant (cfr. FROBŒNIUS, Journal de CRELLE, T. 73) par la notation $a_n \backsim b_n$ que les séries $\Sigma a_n z^n$ et $\Sigma b_n z^n$ ont le même cercle de convergence,

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial^n A(x, \beta)}{\partial \beta^n} \backsim \frac{1}{\delta(x)^n},$$

et $\delta(x)$ ne devient nul qu'aux m points x qui vérifient l'équation

$$f(x, \beta) = 0.$$

Par conséquent, si l'on excepte ces points en nombre fini, la série

$$\Sigma \frac{a_n}{n!} \frac{\partial^n A(x, \beta)}{\partial \beta^n}$$

converge partout uniformément. Elle représente par conséquent une fonction uniforme ayant un nombre fini de points singuliers.

b) Supposons que $\varphi(y)$ ait un nombre fini de points singuliers $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$. Cette fonction pourra s'écrire

$$\varphi(y) = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{\nu,n}}{(y-\beta)^{n+1}},$$

d'où l'on tire comme précédemment, par le théorème de CAUCHY,

$$A(\varphi) = -2\pi i \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{\nu,n}}{n!} \frac{\partial^n A(x, \beta_\nu)}{\partial \beta_\nu^n}. \tag{7}$$

Le même raisonnement appliqué ci-dessus sert à démontrer que cette expression coïncide avec la série (5) dans le champ $E_m(\alpha, \beta)$ et représente d'ailleurs une fonction uniforme régulière dans tout le plan, sauf aux points en nombre fini qui vérifient l'une des équations

$$f(x, \beta_\nu) = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p).$$

Cette fonction est donc dans tout le plan (sauf les dits points) la continuation analytique de la fonction représentée dans $E_m(\alpha, \beta)$ par la série (5) ou l'intégrale (1).

c) Supposons enfin que la fonction $\varphi(y)$ soit singulière en une infinité de points donnés

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots$$

de telle façon que la différence

$$\varphi(y) - G_\nu\left(\frac{1}{y-\beta_\nu}\right),$$

où $G_\nu(z)$ est une fonction donnée, se comporte régulièrement au point β_ν. Le groupe (β_ν) pourrait avoir des groupes limites de n'importe quelle sorte; je me bornerai toutefois au cas le plus simple, où il n'y a qu'un point limite b [1]. Dans ce cas, on peut procéder comme il suit:

---

[1] Les cas plus généraux peuvent se traiter sans difficulté d'après celui-ci, et en se servant des méthodes employées par M. MITTAG-LEFFLER dans la démonstration des théorèmes de son grand Mémoire : *Sur la représentation des fonctions uniformes* (Acta Mathematica, T. 4).

Développons $G_\nu\left(\frac{1}{y-\beta_\nu}\right)$ en série convergente en dehors du cercle $(b, |b-\beta_\nu|)$:

$$G_\nu\left(\frac{1}{y-\beta_\nu}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{\nu,n}}{(y-b)^{n+1}};$$

et posons

$$F_\nu(y) = \sum_{n=m_\nu}^{\infty} \frac{h_{\nu,n}}{(y-b)^{n+1}};$$

la fonction représentée par cette série étant régulière dans tout le plan, sauf aux points β_ν et b. D'après les démonstrations connues des théorèmes de M. MITTAG-LEFFLER, on sait qu'on peut déterminer les nombres m_ν de telle sorte que l'on ait

$$\varphi(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(y) + \overline{G}\left(\frac{1}{y-\beta}\right);$$

ou encore, en distribuant les termes de la série additive $\overline{G}$ dans les fonctions $F_\nu(y)$, que l'on pourra indiquer par $\overline{F}_\nu(y)$ après ce changement, on aura

(8) $$\varphi(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{F}_\nu(y),$$

et, en dehors du cercle $(b, |b-\beta_\nu|)$, $\overline{F}_\nu(y)$ aura un développement de la forme

$$\sum_{n=m_\nu}^{\infty} \frac{k_{\nu,n}}{(y-b)^{n+1}}.$$

Or, si l'on fait abstraction des premiers termes de la série (8), les cercles $(b, |b-\beta_\nu|)$ seront assez petits pour être extérieurs au cercle (α, ϱ); par conséquent, sur la circonférence de ce cercle la série (8) convergera uniformément, et l'on aura en ce cas pour $A(\varphi)$ l'expression:

(9) $$A(\varphi) = -2\pi i \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=m_\nu}^{\infty} \frac{k_{\nu,n}}{n!} \frac{\partial^n A(x, b)}{\partial b^n}.$$

Je dis maintenant que cette expression, qui coïncide avec $A(\varphi)$ dans le champ $E_m(\alpha, \varrho)$, représente dans tout le plan x une même fonction analytique monogène, régulière partout, sauf aux points x

racines des équations

$$f(x, b) = 0 , \qquad f(x, \beta_\nu) = 0 , \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Démonstration. Prenons un point $x = \xi$ quelconque, qui ne soit racine d'aucune des équations ci-dessus, et supposons que λ indique la plus petite distance de b aux points racines de $f(\xi, y) = 0$. Je pose

$$\delta_\nu = |b - \beta_\nu| , \qquad \lim_{\nu=\infty} \delta_\nu = 0 ;$$

je pourrai donc toujours déterminer μ assez grand pour que l'on ait, pour $\nu \geqq \mu$,

$$\delta_\nu < \lambda .$$

Or, d'après le procédé de démonstration du théorème de M. MITTAG-LEFFLER, les nombres m_ν sont tellement choisis que l'on ait

$$\sum_{m_\nu}^{\infty} \left| \frac{k_{\nu,n}}{(y - b)^{n+1}} \right| < \varepsilon_\nu ,$$

où ε_ν est une quantité positive donnée. Mais cette série converge en dehors du cercle (b, δ_ν); on en déduit donc, par un théorème connu sur les séries de puissances,

$$|k_{\nu,n}| < \delta'_\nu \, \varepsilon_\nu ,$$

où δ'_ν est une quantité supérieure à δ_ν d'aussi peu que l'on voudra.

D'un autre côté, la série

$$A(\xi, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y - b)^n}{n!} \frac{\partial^n A(\xi, b)}{\partial b^n}$$

converge évidemment dans le cercle (b, λ); on aura donc, par le même théorème sur les séries,

$$\frac{1}{n!} \left| \frac{\partial^n A(\xi, b)}{\partial b^n} \right| < \frac{M}{\lambda'^n} ,$$

où M est un nombre positif et λ' une quantité positive moindre que λ d'aussi peu que l'on voudra.

Si donc je considère la série :

$$A(\overline{F}_\nu) = \sum_{m_\nu}^{\infty} \frac{k_{\nu,n}}{n\,!} \; \frac{\partial^n A\,(\xi, b)}{\partial\, b^n} \,,$$

j'aurai :

$$|\,A\,(\overline{F}_\nu)\,| < M \sum_{m_\nu}^{\infty} \frac{\delta_\nu'^{\,n}\,\varepsilon_\nu}{\lambda'^{\,n}}\,;$$

mais puisque l'on a $\delta_\nu < \lambda$, on peut supposer aussi $\delta_\nu' < \lambda'$ et par conséquent :

$$|\,A\,(\overline{F}_\nu)\,| < M\,\varepsilon_\nu \left(\frac{\delta_\nu'}{\lambda'}\right)^{m_\nu} \frac{1}{1 - \dfrac{\delta_\nu'}{\lambda'}}\,,$$

et puisque les quantités δ_ν' décroissent quand ν croît, on aura, en indiquant par M' une quantité positive,

$$\sum_{\nu=\mu}^{\infty} |\,A\,(\overline{F}_\nu)\,| < M' \sum_{\mu}^{\infty} \varepsilon_\nu\,.$$

Il suit de là que la série

$$\sum_{\nu=\mu}^{\infty} \; \sum_{n=m_\nu}^{\infty} \frac{k_{\nu,n}}{n\,!} \; \frac{\partial^n A\,(x, b)}{\partial\, b^n}$$

est convergente absolument et uniformément pour toutes les valeurs de x telle que la quantité λ soit $> \delta_\nu$ pour $\nu \geqq \mu$. Elle représente donc pour ces valeurs une fonction analytique régulière. La somme complémentaire

$$\sum_{\nu=0}^{\mu-1} A\,[\overline{F}_\nu\,(y)]$$

rentre dans le cas b) précédent, et représente une fonction analytique régulière partout, sauf aux points tels que

$$f\,(x, \beta_\nu) = 0\,, \qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \mu - 1);$$

le théorème se trouve donc démontré.

25. — En même temps que le champ $E_m\,(\alpha, \varrho)$, on peut considérer le champ $E_m\,(\alpha_1, \varrho_1)$ et il pourra se faire que ces deux champs aient une partie commune. Par exemple, si le cercle (α_1, ϱ_1)

est intérieur au cercle (α, ϱ), le champ $E_m(\alpha_1, \varrho_1)$ sera nécessairement compris dans le champ $E_m(\alpha, \varrho)$.

Or, soient deux champs $E_m(\alpha, \varrho)$, $E_m(\alpha_1, \varrho_1)$ qui aient une partie commune; les deux cercles auront aussi une partie commune dans laquelle on pourra décrire un cercle intérieur (α_2, ϱ_2); et le champ $E_m(\alpha_2, \varrho_2)$ sera intérieur à $E_m(\alpha, \varrho)$ et $E_m(\alpha_1, \varrho_1)$. D'après le théorème de Cauchy, si $\varphi(y)$ est une fonction uniforme régulière dans les cercles (α, ϱ) et (α_1, ϱ_1), on aura, pour un point x pris à l'intérieur de $E_m(\alpha_2, \varrho_2)$,

$$A_\varrho(\varphi) = A_{\varrho_1}(\varphi) = A_{\varrho_2}(\varphi).$$

Par conséquent, on aura aussi, en indiquant par $A_n^{(1)}(x)$, $A_n^{(2)}(x)$ les fonctions analogues au système $A_n(x)$ dans les nouveaux champs considérés,

$$\Sigma\, c_n A_n(x) = \Sigma\, c_n^{(1)} A_n^{(1)}(x) = \Sigma\, c_n^{(2)} A_n^{(2)}(x).$$

Ces formules nous donnent, pour les développements (5), un concept tout à fait analogue à celui de la *continuation analytique* pour les séries de puissances; ainsi la série $\Sigma\, c_n^{(2)} A_n^{(2)}(x)$ peut être regardée comme la continuation analytique de la série $\Sigma\, c_n A_n(x)$, la série $\Sigma\, c_n^{(1)} A_n^{(1)}(x)$ comme la continuation de la série $\Sigma\, c_n^{(2)} A_n^{(2)}(x)$ et ainsi de suite. Notons encore que les coefficients c_n, $c_n^{(1)}$, $c_n^{(2)}$, ... sont précisément ceux des continuations analytiques correspondantes de la série

$$\varphi(y) = \Sigma\, c_n (y - \alpha)^n. \tag{10}$$

26. — On pourrait ajouter ici plusieurs remarques sur les développements (5); je me bornerai aux suivantes:

a) Etant donnée la série de puissances $\varphi(y)$ de la forme (10), on aura

$$A(\varphi) = c_0 A_0(x) + c_1 A_1(x) + c_2 A_2(x) + \dots,$$

$$A\left(\frac{\varphi}{y - \alpha}\right) = c_1 A_0(x) + c_2 A_1(x) + c_3 A_2(x) + \dots,$$

d'où

$$\begin{aligned} A\left\{\varphi(y)\left(h_0 + \frac{h_1}{y - \alpha} + \dots + \frac{h_p}{(y - \alpha)^p}\right)\right\} &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 c_n + \lambda_1 c_{n+1} + \dots + \lambda_p c_{n+p}) A_n(x). \end{aligned} \tag{11}$$

De cette formule et du § 24, b), on déduit sans difficulté le théorème suivant [1] :

« De même qu'une fonction rationnelle est représentée par une série récurrente de puissances, de même une fonction de la forme

$$\sum_{\nu=1}^{p}\left(k_{\nu,0}\, A\,(x,\alpha_\nu) + k_{\nu,1}\frac{\partial\, A\,(x,\alpha_\nu)}{\partial\,\alpha_\nu} + \dots + k_{\nu,r_\nu}\frac{\partial^{r_\nu} A\,(x,\alpha_\nu)}{\partial\,\alpha_\nu^{r_\nu}}\right)$$

est représentée par une série récurrente de fonctions $A_n(x)$. »

La réciproque de ce théorème n'est vraie que dans le cas où l'on sait qu'avec les fonctions $A_n(x)$ on ne peut former des développements de zéro (*Nullentwickelungen*).

b) La formule (11) peut s'étendre au cas où le multiplicateur de $\varphi(y)$ devient une série de puissances. Dans ce cas, on aura

$$A\left\{\varphi\,(y)\ \Sigma\frac{h_\mu}{(y-\alpha)^\mu}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{\mu=0}^{\infty} \lambda_\mu\, c_{n+\mu}\, A_n(x)\,.$$

Sous les conditions de convergence, qui sont satisfaites si $\varphi\,(y)$ et

$$\Sigma\frac{h_\mu}{(y-\alpha)^\mu}$$

ont une circonférence commune de convergence, le second membre peut s'écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(h_0\, A_n + h_1\, A_{n-1} + \dots + h_n\, A_0)\,.$$

En posant

$$h_n(A) = h_0\, A_n + h_1\, A_{n-1} + \dots + h_n\, A_0\,, \tag{12}$$

on trouve aisément que ces polynômes généraux $h_n(A)$ jouissent de propriétés distributives analogues à celles des polynômes de M. APPELL.

c) Si l'on particularise la fonction caractéristique $A\,(x\,,y)$, l'opération A pourra servir, non seulement à la transformation des fonctions φ, mais encore à la transformation des équations fonctionnelles auxquelles elles satisfont. Cette transformation s'opère au

---

(1) V. dans mon Mémoire déjà cité, §§ 24-29, plusieurs applications de ce théorème, notamment la transformation des fonctions rationnelles en intégrales des équations différentielles ou aux différences linéaires et à coefficients constants.

moyen de la relation (11) et des égalités

$$A\left(\frac{d\,\varphi}{d\,y}\right) = \Sigma\, n\, c_n\, A_{n-1}(x),$$

$$\frac{d}{d\,x}\, A\,(\varphi) = \Sigma\, c_n\, \frac{d\, A_n(x)}{d\,x}\,.$$

Je me propose de revenir sur l'étude de cette transformation d'équations fonctionnelles (équations différentielles, aux différences, etc.) notamment pour le cas où la fonction caractéristique est l'intégrale d'une équation linéaire aux dérivées partielles. Pour le moment, je me bornerai à citer les transformations des équations différentielles linéaires en équations différentielles ou aux différences finies linéaires, données par les opérations considerées aux §§ 19-20, et en particulier par la transformation de LAPLACE. Rappelons aussi les transformations d'équations linéaires données par M. APPELL aux §§ 14-16 de son Mémoire déjà cité : *Sur une classe de polynômes.*

27. — Nous avons considéré jusqu'ici le cas où la variable x est prise à l'intérieur du champ $E_m(\alpha, \varrho)$. Supposons maintenant qu'elle soit prise à l'intérieur du champ $E_0(\alpha, \varrho)$. Pour de telles valeurs de x, aucune singularité de $A\,(x, y)$ ne se trouve à l'intérieur du cercle (α, ϱ); on peut donc écrire, pour x à l'intérieur de $E_0(\alpha, \varrho)$ et pour $|y| \leqq \varrho$,

$$A\,(x, y) = \sum_0^\infty \frac{1}{n\,!}\,\frac{\partial^n A\,(x, \alpha)}{\partial\, \alpha^n}\,(y - \alpha)^n\,.$$

Soit maintenant $\varphi\,(y)$ une fonction analytique uniforme, pour laquelle je conserve les mêmes hypothèses et notations qu'au § 23; on aura :

$$A\,(i_\varrho\, \varphi) = 0\,, \qquad A\,(\varphi) = A\,(j_\varrho\, \varphi) \tag{13}$$

et

$$A\,(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c'_n}{n\,!}\, \frac{\partial^n A\,(x, \alpha)}{\partial\, \alpha^n}\,. \tag{14}$$

Ce développement se continue analytiquement dans les champs $E_0(\alpha_1, \varrho_1)$, $E_0(\alpha_2, \varrho_2)$, ... dont chacun a une partie commune avec le précédent, au moyen des développements

$$\Sigma\, \frac{c_n^{(1)}}{n\,!}\, \frac{\partial^n A\,(x, \alpha_1)}{\partial\, \alpha_1^n}\,, \qquad \Sigma\, \frac{c_n^{(2)}}{n\,!}\, \frac{\partial^n A\,(x, \alpha_2)}{\partial\, \alpha_2^n}\,, \ldots\quad.$$

Je n'insiste pas sur des remarques analogues à celles que l'on a faites pour le cas précédent, et qu'il serait facile de répéter ici.

28. — Enfin, on peut considérer le cas où l'on prend x dans une des aires

$$E_1(\alpha, \varrho)\,, \qquad E_2(\alpha, \varrho)\,, \ldots, E_{m-1}(\alpha, \varrho)\,.$$

Les fonctions analytiques représentées par $A(\varphi)$ dans ces divers champs se déduisent de celles qu'on vient d'étudier, par l'application du théorème de M. HERMITE [1]; je ne reviens pas ici sur cette application que j'ai déjà donnée [2], non plus que sur les conséquences qu'on en déduit.

29. — Nous avons appris, aux §§ 16 et 17, à déterminer formellement la fonction $\boldsymbol{A}(y, t)$ que nous avons appelée *réciproque* de $A(x, y)$.

Supposons à présent que cette fonction ait une existence effective, et que les singularités de cette fonction soient les couples de valeurs qui vérifient une équation de degré m':

$$\mathscr{F}(y, t) = 0\,.$$

J'indiquerai par $\boldsymbol{E}_h(\alpha, \varrho)$ la région du plan t où h singularités de $\boldsymbol{A}(y, t)$ tombent à l'intérieur du cercle (α, ϱ). Supposons enfin que la ligne d'intégration l' de l'opération réciproque soit dans le champ $\boldsymbol{E}_0(\alpha, \varrho)$.

Cela posé, proposons-nous le problème suivant. Etant donnée une fonction $\psi(x)$ dans le champ $\boldsymbol{E}_m(\alpha, \varrho)$, on demande de la développer en série de fonctions $A_n(x)$:

$$\psi(x) = \Sigma\, c_n\, A_n(x), \tag{15}$$

problème qui revient à la détermination du système de coefficients c_n.

A cet effet, formons

$$\int\limits_{l'} \boldsymbol{A}(y, t)\, \psi(t)\, \mathrm{d}t = \varphi(y);$$

---

(1) Voir le Mémoire: *Sur quelques points de la théorie des fonctions* (Acta Soc. Scient. Fennicæ, T. 12, 1881).

(2) V. mon Mémoire déjà cité, § 34, et ma Note *Sur une formule dans la théorie des fonctions* (Öfversigt af Svenska Vetensk. Akad. Förhandl. 1886, pp. 51-55).

puisque la ligne l' est contenue dans le champ $\boldsymbol{E}_0(\alpha, \varrho)$, on aura le long de cette ligne :

$$\boldsymbol{A}(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y-\alpha)^n}{n!} \frac{\partial^n \boldsymbol{A}(\alpha, t)}{\partial \alpha^n},$$

d'où

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (y-\alpha)^n$$

avec

(16) $$c_n = \frac{1}{n!} \int_{l'} \frac{\partial^n \boldsymbol{A}(\alpha, t)}{\partial \alpha^n} \psi(t)\, dt.$$

Cette formule (lorsque elle a un sens) nous détermine les coefficients du développement cherché (15). Ce développement pourra n'être pas unique, parce que la ligne l' elle-même pourra admettre plusieurs déterminations, et alors on pourra former avec les fonctions $A_n(x)$ des développements de zéro [1].

30. — En certains cas, le problème précédent se simplifie beaucoup. Si, par exemple, la fonction $\psi(x)$ est déjà connue sous la forme

$$\psi(x) = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{\nu,n}}{n!} \frac{\partial^n A(x, \alpha_\nu)}{\partial \alpha_\nu^n}, \qquad |\alpha_\nu - \alpha| > \varrho,$$

les coefficients c_n s'obtiennent sans recourir à la fonction réciproque : ils ne sont en effet que les coefficients du développement de la fonction

$$\varphi(y) = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{\nu,n}}{(y-\alpha_\nu)^{n+1}}$$

en série de puissances entières et positives de $y - \alpha$.

En particulier, si la fonction $\psi(x)$ est de la forme

$$\sum_{\nu=1}^{p} \sum_{n=0}^{r_\nu} \frac{a_{\nu,n}}{n!} \frac{\partial^n A(x, \alpha_\nu)}{\partial \alpha_\nu^n},$$

---

[1] Sur ces développements, v. pour un cas particulier remarquable : FROBŒNIUS, *Über die Entwickelungen etc.* (Journal de CRELLE, T. 73). V. aussi mon second Mémoire *Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie etc.* (Annali di Matematica, S. II, T. XII, p. 127).

elle est développable en une série de fonctions $A_n(x)$ à coefficients récurrents.

31. — Supposons que nous ayons obtenu le développement d'une fonction $\psi(x)$ en série $A_n(x)$, et cherchons le développement de la même fonction en série de polynômes $h_n(A)$ [V. § **26**, b)]; en faisant désormais $\alpha = 0$ pour simplifier l'écriture.

Soit donc

$$A(\varphi) = \psi(x), \qquad \varphi(y) = \Sigma\, c_n y^n, \qquad \psi(x) = \Sigma\, c_n A_n(x);$$

on aura à résoudre l'équation fonctionnelle en φ_1 :

$$A(\varphi_1 \chi) = \psi(x), \tag{17}$$

où l'on a posé

$$\chi(y) = \Sigma \frac{h_\mu}{y^\mu};$$

c'est-à-dire que l'on demande le système de coefficients c'_n tel que:

$$\varphi_1(y) = \Sigma\, c'_n y^n, \qquad \text{d'où} \qquad \psi(x) = \Sigma\, c'_n h_n(A).$$

Or, cette équation (17) se résout sans difficulté, pas suite de la remarque du § **26**, en prenant

$$\varphi_1(y) = i_\varrho \frac{\varphi(y)}{\chi(y)},$$

ce qui signifie que l'on développe le quotient $\dfrac{\varphi}{\chi}$ en série de LAURENT dans une couronne qui comprenne la circonférence ϱ; et que l'on prend la partie de cette série qui contient les puissances positives de y.

32. — L'on peut encore se proposer la solution de l'équation fonctionnelle, en φ_1,

$$A(\varphi_1 \chi) = 0. \tag{18}$$

Il suffira pour cela que la fonction $\varphi_1 \chi$ soit développable sur la circonference $(0, \varrho)$ et en dehors, en une série de puissances négatives de y, $(i\, \varphi_1 \chi = 0)$. D'où il résulte, puisque φ_1 doit être régulière dans tout le cercle $(0, \varrho)$, circonférence comprise, que φ_1 doit se réduire à une fonction rationnelle, diviseur de χ. Cette fonction φ_1 nous donne donc les coefficients (récurrents) d'un développement de zéro en série de polynômes $h_n(A)$.

33. — Comme application de ce qui précède, supposons que la fonction caractéristique soit de la forme $A(y-x)$, où $A(z) = \Sigma \frac{a_n}{z^{n+1}}$ est une fonction uniforme dont toutes les singularités (qu'il n'est pas nécessaire, pour le moment, de spécifier davantage) sont à l'intérieur du cercle $(0, R)$. Le champ du plan x, pour lequel les singularités de $A(y-x)$ sont toutes à l'intérieur du cercle $(0, \varrho > R)$, est l'intérieur du cercle $(0, \varrho - R)$.

Pour tout point α du cercle $(0, \varrho - R)$, la fonction $A(y-\alpha)$ admet le développement en série:

$$A(y-x) = \Sigma \frac{A_n(x)}{y^{n+1}}$$

convergente pour toutes les valeurs de $|y| > \varrho$. Les fonctions $A_n(x)$ forment un système de polynômes de M. APPELL; en effet, on a, en indiquant les dérivées par des accents,

$$A'(y-x) = \Sigma \frac{A'_n(x)}{y^{n+1}} = \Sigma \frac{(n+1) A_n(x)}{y^{n+2}},$$

d'où

$$A'_n(x) = n A_{n-1}(x),$$

qui est la relation caractéristique de ces polynômes.

34. — Si $\varphi(y)$ est une fonction analytique uniforme qui n'a aucune singularité le long de la circonférence $(0, \varrho)$, en conservant les notations du § 23, on aura:

$$A(\varphi) = A(\boldsymbol{i}\,\varphi) = \Sigma c_n A_n(x).$$

C'est là le développement que M. APPELL indique par $\varphi(A)$. Ce développement converge dans le cercle $(0, \varrho - R)$, si $\boldsymbol{i}\,\varphi$ converge dans le cercle ϱ [1].

---

[1] Cfr. ma Note: *Alcune osservazioni sui polinomi del prof. Appell* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, S. IV, T. II).

On pourra sans difficulté répéter pour ce cas particulier les considérations faites au § 24, au sujet des divers cas auxquels pourra donner lieu la fonction $\varphi(y)$.

35. — Etant donnée une fonction $\psi(x)$, on demande de la développer en série de polynômes $A_n(x)$. Les coefficients du développement seront donnés par la formule (16), où $\boldsymbol{A}(y, t)$ est la fonction réciproque de $A(x, y)$. Mais pour déterminer cette fonction, il suffit de la prendre sous la forme

$$\boldsymbol{A}(y-t) = \Sigma \frac{\alpha_n}{(y-t)^{n+1}},$$

de telle sorte que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)} A(x-y)\,\boldsymbol{A}(y-t)\,dy = \frac{1}{t-x};$$

d'où l'on déduit aisément le système d'équations qui détermine les coefficients α_n:

$$(19) \quad \begin{cases} \alpha_0 a_0 = 1, \\ \alpha_0 a_n + \binom{n}{1}\alpha_1 a_{n-1} + \binom{n}{2}\alpha_2 a_{n-2} + \dots + \alpha_n a_0 = 0. \end{cases}$$

De ces relations il résulte

$$(19') \quad \Sigma \frac{\alpha_n}{n!} z^n = 1/\Sigma \frac{a_n}{n!} z^n,$$

ce qui prouve que les polynômes de M. APPELL formés avec les coefficients α sont les *inverses* [1] de ceux formés avec les coefficients a.

Les equations (19) donnent la solution *formelle* du problème; ce sera une solution *effective* s'il existe une circonférence $(0, \varrho)$ le long de laquelle les deux séries

$$A(x-y) = \Sigma \frac{A_n(x)}{y^{n+1}}, \qquad \boldsymbol{A}(y-t) = \Sigma \frac{y^n}{n!}\boldsymbol{A}^{(n)}(t)$$

---

[1] APPELL, Mém. cité, § 3.

convergent ensemble uniformément. Toutefois, la transformation de LAPLACE permet facilement de déduire la solution effective du problème de la solution formelle.

36. — Nous trouvons ainsi, pour les coefficients de développement de $\psi(x)$ en série de $A_n(x)$, la formule

$$2\pi i\, c_n = \frac{1}{n!}\int_{(\varrho)} A^{(n)}(t)\,\psi(t)\,dt\,.$$

Supposons que la fonction $A(t)$ soit, dans un cas particulier, de la forme:

$$A(t) = \Sigma\,\frac{h_\nu}{t-\alpha_\nu}\,,$$

où les points α_ν sont intérieurs au cercle ϱ; d'ailleurs les formules (19) ou (19′) permettent de trouver quelle sera, dans ce cas, la forme des polynômes $A_n(x)$. Il en résulte

$$\frac{A^{(n)}(t)}{n!} = \Sigma\,\frac{h_\nu}{(t-\alpha_\nu)^{n+1}}\,,$$

d'où, si le cercle de convergence de ψ est plus grand que ϱ,

$$2\pi i\, c_n = h_1\,\psi^{(n)}(\alpha_1) + h_2\,\psi^{(n)}(\alpha_2) + \ldots + h_\nu\,\psi^{(n)}(\alpha_\nu) + \ldots\,.$$

La fonction $\psi(x)$ satisfait donc, dans ces hypothèses, à l'équation

$$(20) \qquad \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\,[h_1\,\psi^{(n)}(\alpha_1) + h_2\,\psi^{(n)}(\alpha_2) + \ldots]\,A_n(x)\,.$$

C'est là une formule donnée par M. HALPHEN (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1881, T. 93, p. 781).

Une autre formule trouvée par le même auteur (ibid., p. 832) se déduit avec la même facilité. Nous venons d'apprendre à résoudre l'équation en $F(y)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int A(y-x)\,F(y)\,dy = f(x)\,.$$

Or, en mettant $x + t, y + t$ à la place de x, y, il vient:

$$f(x+t) = \frac{1}{2\pi i} \int A(y-x) F(y+t)\, dy ;$$

et d'après les développements ci-dessus:

$$f(x+t) = \Sigma A_n(x) \frac{F^{(n)}(t)}{n!} . \tag{21}$$

C'est la seconde formule de M. HALPHEN, qu'on peut regarder comme une généralisation du théorème de TAYLOR. Il s'y manifeste une sorte de *dualité*, qu'il serait aisé de poursuivre, entre les systèmes de polynômes de M. APPELL et les systèmes de dérivées successives d'une même fonction.