Salvatore Pincherle

Sulla risoluzione dell'equazione funzionale $\sum h_\nu \phi(x+\alpha_\nu) = f(x)$ a coefficienti costanti

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Serie 4, Vol. **9** (1888), p. 45–71

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 1, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 193–222

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_1_193>

6 [36].

Sulla risoluzione dell'equazione funzionale $\Sigma h_\nu \varphi(x+\alpha_\nu)=f(x)$ a coefficienti costanti. (*)

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; (4) **9**, 45-71 (1888).

Il presente lavoro ha per oggetto principale la risoluzione dell'equazione funzionale

$$(1)\qquad \sum_{\nu=1}^{m} h_\nu \varphi(x+\alpha_\nu)=f(x)$$

rispetto alla funzione incognita $\varphi(x)$. Attorno a questa questione se ne raggrupperanno varie altre, quali la risoluzione di equazioni funzionali affini alla (1), lo studio di certe classi di funzioni che si presentano in questa risoluzione e l'esame di alcuni problemi funzionali che hanno stretto legame colla equazione (1). In questa Memoria verrà esaminato il caso in cui nella equazione (1) *i coeffi-*

(*) (*R.*) Questa Memoria è stata letta alla « R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna » nella Sessione del 19 febbraio 1888. Essa è stata ripubblicata in francese, 38 anni dopo, negli « Acta mathematica (Stockholm); **48**, 279-304 (1926) », per invito del MITTAG-LEFFLER, con la seguente postilla da parte del PINCHERLE:

« C'est en lui offrant cette traduction d'un ancien Mémoire, publié en 1888, « que je me permets de rendre hommage à l'illustre fondateur des Acta. Ce « Mémoire, qui a passé à peu près inaperçu, renferme les germes d'une théorie « qui, retrouvée et développée quelques années plus tard, a pris dans l'Analyse « une place remarquable. J'ai tenu à donner la traduction de la façon la plus « littérale pour conserver à ce travail son caractère d'authenticité, même là où « il présente quelque imperfection de forme et où l'usage d'un langage plus mo- « derne aurait pu rendre la rédaction plus agile. »

cienti h_ν sono quantità costanti, mentre mi propongo di trattare in altro lavoro la medesima equazione nell'ipotesi che le h_ν siano funzioni razionali della x.

§ I. — Un problema d'inversione d'integrale definito e sue varie interpretazioni.

1\. — Abbiasi una serie di potenze di z^{-1}, che rappresenti una funzione analitica di z, regolare fuori di un cerchio di centro O e di raggio R e nulla all'infinito:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}.$$

Si prenda $z = y - x$: la funzione $A(y - x)$ sarà certamente regolare sotto la condizione

$$|y - x| > R, \tag{2}$$

a soddisfare la quale si può porre sia

$$|y| > |x| + R, \tag{3}$$

sia

$$|x| > |y| + R. \tag{4}$$

Nella prima ipotesi, prendendo x interno ad un cerchio di centro O e di raggio σ, ed y fuori di un cerchio di centro O e di raggio $R + \sigma$, si ottiene per $A(y - x)$ sia lo sviluppo

$$A(y - x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{(y - x)^{n+1}}, \tag{5}$$

sia l'altro

$$A(y - x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{A_n(x)}{y^{n+1}}, \tag{6}$$

dove le $A_n(x)$ costituiscono il sistema dei polinomi di APPELL formati coi coefficienti a_n (1).

---

(1) V. la mia Memoria: *Sur certaines opérations fonctionnelles ecc.,* § 33, Acta mathematica, T. X, p. 179, 1887.

Nella seconda ipotesi, prendendo y interno al cerchio σ ed x fuori del cerchio $R+\sigma$, si avrà per $A(y-x)$ sia lo sviluppo (5), sia l'altro

$$A(y-x)=\sum_0^\infty \frac{y^n}{n!} A^{(n)}(-x), \tag{7}$$

indicando con $A^{(n)}(z)$ la n^{ma} derivata di $A(z)$.

2. — Si consideri ora l'espressione

$$A(\psi)=\int_{(l)} A(y-x)\,\psi(y)\,\mathrm{d}y, \tag{8}$$

dove l'integrazione è estesa ad una linea (l) del piano y, e $\psi(y)$ è una funzione analitica senza singolarità nei punti della linea (l); e si distinguano due casi:

a) La linea (l) sia finita od infinita (purchè in quest'ultimo caso l'integrale abbia un significato e rappresenti una funzione analitica), ma il minimo modulo dei suoi punti sia superiore ad R: sia $R+\sigma$. Preso allora $|x|<\sigma$, per i punti della linea (l) è soddisfatta la (3) e si può assumere per la $A(y-x)$ lo sviluppo (5) o (6).

Posto

$$\int_{(l)} \frac{\psi(y)\,\mathrm{d}y}{y-x}=\varphi(x), \tag{9}$$

e sostituendo per la $A(y-x)$ sia la (5), sia la (6), si ha dalla (8), senz'altro se la linea l è finita, e sotto le condizioni d'integrabilità per serie se è infinita,

$$A(\psi)=\sum_0^\infty \frac{a_n}{n!}\varphi^{(n)}(x), \tag{10}$$

$$A(\psi)=\sum_0^\infty c_n A_n(x) \tag{11}$$

con

$$c_n=\int_{(l)} \frac{\psi(y)\,\mathrm{d}y}{y^{n+1}}. \tag{12}$$

b) La linea (l) sia tutta a distanza finita. Detto allora σ il massimo modulo dei suoi punti, si prenda $|x|>R+\sigma$: per i punti della linea (l) sarà soddisfatta la (4) e varranno per $A(y-x)$ gli sviluppi (5) e (7). Sostituendo questi sviluppi nella (8), si avrà

(10) $$A(\psi)=\sum_0^\infty \frac{a_n}{n!}\,\varphi^{(n)}(x),$$

(13) $$A(\psi)=\Sigma\, c'_n \frac{A^{(n)}(-x)}{n!}$$

con

$$c'_n=\int_{(l)} y^n \psi(y)\,dy.$$

3. — Se ora $f(x)$ è una funzione data, proponiamoci di risolvere, rispetto alla funzione incognita $\psi(y)$, l'equazione funzionale

(14) $$A(\psi)=f(x).$$

Questo problema è uno di quelli che si dicono *d'inversione d'integrale definito* e la funzione $A(y-x)$ ne è la funzione caratteristica (*), ora le formule testè trovate dimostrano come esso coincida con altri problemi funzionali. Infatti, secondo che si prende per $A(\varphi)$ l'una o l'altra delle sue espressioni (10), (11) o (13), si ha da risolvere uno dei seguenti problemi:

a) *Risolvere l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti e con infiniti termini:*

(15) $$\sum_0^\infty \frac{a_n}{n!}\,\varphi^{(n)}(x)=f(x).$$

b) *Trovare lo sviluppo della funzione data $f(x)$ in serie*

$$f(x)=\Sigma\, c_n A_n(x)$$

ordinata secondo i polinomi di Appell di un dato sistema.

c) *Sviluppare la funzione data $f(x)$ in serie ordinata per le derivate successive di una data funzione $A(-x)$.*

(*) (*R.*) Va notato che i lavori classici e la nomenclatura su le equazioni integrali sono ben posteriori a questa Memoria.

§ II. — Risoluzione formale del problema. Molteplicità di soluzioni.

4. — Il problema d'inversione d'integrale definito espresso dall'equazione (14) ci conduce adunque nei due casi considerati, alla risoluzione del problema a), espresso dall'equazione (15). Ora, questo problema è più generale di quello dato dalla equazione (14), poichè non solo ogni equazione (14) dà luogo ad una equazione della forma (15), ma anche perchè la serie

$$\Sigma \frac{a_n}{n\,!}\, \psi^{(n)}(z)$$

potrebbe convergere anche se la $A\,(z)$ fosse una serie sempre divergente, perciò senza significato. Converrà dunque cercare prima la soluzione dell'equazione (15). Ora questa si risolve *formalmente* senza difficoltà col seguente metodo:

Si ponga anzitutto

$$a\,(t) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n\, t^n}{n\,!}\,, \tag{16}$$

si determini poi una funzione $\chi\,(t)$ ed una linea d'integrazione (λ) tali che sia

$$\int_{(\lambda)} \chi\,(t)\, e^{xt}\, \mathrm{d}t = f\,(x) \tag{17}$$ [1].

La soluzione formale dell'equazione (15) sarà data da

$$\varphi\,(x) = \int_{(\lambda)} \frac{\chi\,(t)\, e^{xt}}{a\,(t)}\, \mathrm{d}t\,, \tag{18}$$

poichè derivando si ottiene

$$\varphi^{(n)}(x) = \int_{(\lambda)} \frac{\chi\,(t)\, e^{xt}\, t^n\, \mathrm{d}t}{a\,(t)}$$

che sostituita nell'equazione (15) la rende formalmente verificata.

---

[1] Per questa determinazione, V. la mia Memoria: *Della trasformazione di Laplace e di alcune sue applicazioni,* Mem. della R. Accademia delle Scienze di Bologna, S. IV, T. VIII, 1887.

5. — Risoluta così formalmente l'equazione (15), la quale contiene l'inversione d'integrale che abbiamo preso a studiare, dobbiamo cercare in quali casi quella soluzione formale dia luogo ad una soluzione effettiva; ora noi faremo questa ricerca per il caso che la $A(z)$ abbia una forma speciale, colla quale la (14) si trasforma in quella equazione (1) la cui soluzione forma il principale oggetto di questo lavoro.

Ma prima di procedere in questa via, conviene osservare che l'equazione (15) è suscettibile di una molteplicità di soluzioni. Infatti la (18) ci definisce una funzione che soddisfa formalmente al problema per qualunque linea d'integrazione per la quale valga la (17). Se dunque prendiamo due di queste linee, fra cui sia compreso qualche zero della funzione $a(t)$, si prevede che si otterranno due funzioni $\varphi(x)$ differenti, e che per conseguenza il numero e le relazioni fra le varie soluzioni dipenderanno dagli zeri di $a(t)$.

Ciò è confermato dal fatto che la differenza fra due soluzioni della (15) soddisfa all'equazione

$$\Sigma \frac{a_n}{n\,!} \varphi^{(n)}(x) = 0 \,, \tag{19}$$

la quale, come è ben noto, ammette l'integrale sotto la forma

$$\Sigma\, C_\nu\, e^{\beta_\nu x} \,, \tag{20}$$

dove le β_ν sono radici, prese in numero arbitrario, della funzione $a(t)$, e le C_ν sono costanti arbitrarie.

§ III. — Forma speciale della funzione caratteristica che conduce all'equazione (1).

6. — Porremo

$$A(z) = \frac{h_1}{z - \alpha_1} + \frac{h_2}{z - \alpha_2} + \dots + \frac{h_m}{z - \alpha_m} \,, \tag{21}$$

dove le $h_1, h_2, \dots, h_m$ e le $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sono numeri costanti, e le α si suppongono ordinate in ordine crescente rispetto alle loro parti reali. Il numero indicato dianzi con R non è altro che il massimo modulo delle α.

Nell'integrale (8) la funzione caratteristica è ora

$$A(y-x)=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{h_\nu}{y-x-\alpha_\nu},$$

ed i polinomi di APPELL corrispondenti sono

$$A_n(x)=\sum_{\nu=1}^{m}h_\nu(x+\alpha_\nu)^n.$$

In questa ipotesi, l'equazione (14) si trasforma in

$$\sum_{\nu=1}^{m}h_\nu\int_{(l)}\frac{\psi(y)\,dy}{y-x-\alpha_\nu}=f(x),$$

ossia, per la (9), in

$$(1)\qquad \sum_{\nu=1}^{m}h_\nu\,\varphi(x+\alpha_\nu)=f(x).$$

La funzione $a(t)$ definita dalla (16) diviene

$$a(t)=\Sigma\,h_\nu\,e^{\alpha_\nu t},$$

e l'equazione (1) viene risoluta formalmente dalla formula (18) trovata al § II e che si scrive

$$(18')\qquad \varphi(x)=\int_{(\lambda)}\frac{\chi(t)\,e^{xt}}{\Sigma\,h_\nu\,e^{\alpha_\nu t}}\,dt:$$

e di ciò persuade la semplice sostituzione di (18') nel primo membro della (1).

Mostreremo ora come questa soluzione formale dia anche la soluzione effettiva del problema in due casi notevoli, il primo dei quali è già stato considerato dal Sig. HALPHEN, benchè sotto un punto di vista diverso dal nostro.

§ IV. — Caso di una funzione trascendente intera. Il problema dell'Halphen.

7. — Suppongasi che la funzione data $f(x)$ sia intera (trascendente in generale), e posto

$$f(x) = \Sigma \frac{k_n x^n}{n!}, \tag{22}$$

suppongasi che sia

$$k_n \backsim \varrho^n ,$$

dove ϱ è un numero positivo (*); il che equivale a dire che la serie

$$\chi(t) = \Sigma \frac{k_n}{t^{n+1}}$$

converge fuori del cerchio di centro O e raggio ϱ. Indicando con (λ) una linea chiusa tutta esterna al cerchio ϱ, si verifica immediatamente che

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\lambda)} \chi(t)\, e^{xt}\, dt. \tag{23}$$

Ne consegue che per ogni tale funzione $f(x)$ l'espressione (18) rappresenta una funzione $\varphi(x)$ trascendente intera che dà una soluzione non più soltanto formale, ma *effettiva* dell'equazione (15). È necessario avvertire che la linea (λ) non deve passare per nessuna radice della $a(t)$.

Se si varia la linea d'integrazione (λ), la soluzione $\varphi(x)$ varierà ogni qualvolta la linea d'integrazione oltrepasserà una radice della $a(t)$, per modo che la differenza fra due soluzioni sarà, come si scorge facilmente, una funzione della forma (20).

Riassumendo, l'espressione (18) ci dà in questo caso, per ogni linea (λ) esterna al cerchio ϱ e che non passi per qualche radice di $a(t)$, una funzione (trascendente, in generale) intera che risponde alle seguenti questioni:

a) Risoluzione dell'equazione (15), dove $f(x)$ è della forma (22).

(*) (*R.*) Una simile funzione intera venne poi chiamata dal PÒLYA « di tipo esponenziale » [Math. Ann. **89**, p. 180 (1923)].

b) Inversione dell'integrale

$$f(x) = \int_{(l)} A(y - x)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y \tag{8}$$

rispetto alla funzione φ, essendo (l) una linea chiusa qualunque esterna al cerchio R.

c) Sviluppo della funzione $f(x)$ in serie di polinomi di APPELL. La (12) mostra che il coefficiente di $A_n(x)$ in questa serie è quello di x^n nello sviluppo di $\varphi(x)$ in serie di potenze.

La differenza fra due soluzioni della (15) dà una soluzione dell'equazione (19) ed uno sviluppo dello zero in serie di polinomi $A_n(x)$.

8. — Merita speciale menzione il caso in cui le radici di $a(t)$, ad eccezione della radice nulla, sono maggiori di ϱ in valore assoluto, nel qual caso si può descrivere una linea (λ') chiusa, tutta esterna al cerchio ϱ e che non contiene nel suo interno alcuna radice di $a(t)$ diversa da zero. Indicherò con $\Phi(x)$ la funzione $\varphi(x)$ che si ottiene dalla (18) prendendo (λ') come linea d'integrazione. Questa funzione $\Phi(x)$ presenta notevoli relazioni di reciprocità colla funzione data $f(x)$. Infatti, $e^{xt}/a(t)$ non contenendo nel suo sviluppo secondo le potenze di t che un numero finito o nullo di potenze negative di t, si avrà

$$\frac{e^{xt}}{a(t)} = \sum_{n=-m}^{\infty} \frac{t^n \boldsymbol{A}_n(x)}{n!}, \tag{24}$$

dove le $\boldsymbol{A}_n(x)$ costituiscono il sistema di polinomi di APPELL *inversi* di $A_n(x)$. Ricordando ora che i coefficienti di $f(x)$ sono dati, per la (23), da

$$k_n = \int_{(\lambda')} \chi(t)\, t^n\, \mathrm{d}t,$$

si trova, sostituendo lo sviluppo (24) nella espressione (18) di $\Phi(x)$,

$$\Phi(x) = \sum_0^{\infty} \frac{k_n}{n!} \boldsymbol{A}_n(x).$$

Così pure, sostituendo nella (18) lo sviluppo

$$\frac{1}{a(t)} = \sum_{-m}^{\infty} \boldsymbol{a}_n t^n,$$

si trova

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty a_n f^{(n)}(x).$$

Giovandosi di queste osservazioni, si può comporre il seguente specchio che pone in evidenza le proprieta reciproche di $f(x)$ e $\Phi(x)$:

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{array}{ll} f(x) = \sum_0^\infty \frac{k_n x^n}{n!}, & \Phi(x) = \sum_0^\infty \frac{k_n A_n(x)}{n!}, \\ f(x) = \sum_0^\infty c_n A_n(x), & \Phi(x) = \sum_0^\infty c_n x^n, \\ a(t) = \sum \frac{a_n t^n}{n!}, & \frac{1}{a(t)} = \sum a_n t^n, \\ f(x) = \sum_0^\infty \frac{a_n \Phi^{(n)}(x)}{n!}, & \Phi(x) = \sum_0^\infty a_n f^{(n)}(x). \end{array}\right.$$

9. — In ciò che precede la $A(z)$ si è supposta affatto qualunque, come al § I. Se ora diamo ad $A(z)$ la forma speciale (21), le funzioni $\varphi(x)$ ora trovate risolvono l'equazione (1) per ogni $f(x)$ della forma (22). Quando il numero ϱ è minore della minima radice di $a(t)$ in valore assoluto, eccettuata sempre la radice nulla, si ottiene una soluzione $\Phi(x)$ che è legata ad $f(x)$ dalle proprietà espresse nello specchio (I). Queste funzioni $\Phi(x)$ sono quelle considerate dal Sig. HALPHEN (1); osservando che si ha, per la (8),

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{h_\nu}{y - x - \alpha_\nu} \Phi(y)\, dy$$

onde

$$k_n = \sum_{\nu=1}^{m} h_\nu \Phi^{(n)}(\alpha_\nu),$$

esse sono tali che

$$(25)\qquad \Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \{h_1 \Phi^{(n)}(\alpha_1) + h_2 \Phi^{(n)}(\alpha_2) + \dots + h_m \Phi^{(n)}(\alpha_m)\} \frac{A_n(x)}{n!},$$

che è la proprietà assunta dal Sig. HALPHEN come punto di partenza.

---

(1) Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 93, p. 781, 1881.

§ V. — **Caso di una funzione regolare fuori di un cerchio.** (1)

10. — Premettiamo l'enunciato di due proposizioni ausiliarie di cui dovremo fare uso in questo paragrafo (2).

Teorema 1°. Quando una funzione analitica $\chi(t)$ soddisfa alla condizione

$$\lim_{t \to \infty} \chi(t)\, e^{-xt} = 0 \tag{a}$$

per t reale e positivo e per ogni x la cui parte reale è maggiore di un numero reale ϱ, l'espressione

$$\int_0^\infty \chi(t)\, e^{-xt}\, dt \tag{b}$$

rappresenta, per quei valori di x, una funzione analitica regolare.

Teorema 2°. Se

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{k_n}{x^{n+1}}$$

è una serie di potenze convergente fuori di un cerchio di centro O e di raggio ϱ, e si pone

$$\chi(t) = \sum_0^\infty \frac{k_n t^n}{n!},$$

la funzione $\chi(t)$ soddisfa alla proprietà (a) e l'espressione (b) coincide, per i valori di x la cui parte reale è maggiore di ϱ, colla $f(x)$ stessa.

11. — Riprendiamo ora l'equazione (1) e supponiamo che la funzione data $f(x)$ del secondo membro di questa equazione sia re-

---

(1) (*R.*) In questo § è contenuta in germe la teoria della sommabilità di Borel.

(2) Per la dimostrazione del primo teorema, v. Scheeffer, *Ueber einige bestimmte Integralen, ecc.*, p. 5 (Habilitationsschrift, Berlin 1883). La dimostrazione dello Scheeffer si potrebbe però notevolmente semplificare facendo uso di un teorema del Prof. Morera (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, s. II, t. XIX). Per la dimostrazione del secondo, v. la mia Memoria già citata: *Della trasformazione di Laplace ecc.*, § 5.

golare fuori del cerchio di centro O e raggio ϱ e nulla all'infinito, e perciò sviluppabile in una serie

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{k_n}{x^{n+1}} \tag{26}$$

convergente fuori del cerchio stesso. Per il Teorema 2^0, e posto $\chi(t)$ eguale alla funzione intera $\Sigma \frac{k_n t^n}{n!}$, si ha

$$f(x) = \int_0^\infty \chi(t)\, e^{-xt}\, dt, \tag{27}$$

e la soluzione dell'equazione (1) è data formalmente dalla formula (18′) che nel nostro caso diviene:

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \frac{\chi(t)\, e^{-xt}\, dt}{\Sigma h_\nu\, e^{-\alpha_\nu t}}\,. \tag{28}$$

12. — Si tratta ora di intraprendere un esame più attento della espressione trovata, e cioè di vedere prima se la espressione (28) rappresenta, e per quali valori di x, una funzione analitica che dia la soluzione effettiva dell'equazione (1): poi, dimostrato che la (28) rappresenta in un certo campo del piano x una funzione analitica, di studiare se la funzione così rappresentata si possa estendere oltre al campo dei valori di x in cui è definita dall'espressione (28). Ci è necessario pertanto di entrare in alcune considerazioni particolareggiate onde poter rispondere a tali domande.

Indicheremo con $\mathcal{R}(a)$ la parte reale di un numero complesso a qualunque; rappresenteremo con $u + iv$ la variabile complessa x, e con $L_{\alpha,\delta}$ la retta che nel piano di questa variabile, e riferita agli assi u e v, è rappresentata dall'equazione in forma normale

$$u \cos\alpha + v \operatorname{sen}\alpha - \delta = 0\,.$$

Infine supporremo per ora che la $a(t)$ non sia nulla per $t = 0$.

Ciò posto, dimostreremo le seguenti proposizioni:

a) Essendo $\chi(t) = \Sigma \frac{k_n t^n}{n!}$ con $k_n \backsim \varrho^n$, si potrà determinare x in modo che

(29) $$\chi(t)\, e^{-xt}$$

tenda a zero quando t cresce indefinitamente nella direzione di argomento qualunque μ.

Infatti, posto $t = \tau(\cos\mu + i \operatorname{sen}\mu)$ ed essendo

$$k_n < M \varrho_1^n,$$

dove ϱ_1 è maggiore di ϱ per tanto poco quanto si vuole, viene

(30) $$|\chi(t)\, e^{-xt}| < M\, e^{\tau(\varrho_1 - u\cos\mu + v \operatorname{sen}\mu)},$$

ed affinchè il limite di questa espressione sia zero basta prendere u in modo che sia

$$u\cos\mu - v\operatorname{sen}\mu > \varrho_1 > \varrho.$$

Il significato geometrico di questa diseguaglianza è che x deve trovarsi in quello dei semipiani determinati dalla retta $L_{-\mu,\varrho}$ nel quale non è l'origine: indicheremo questo semipiano con $P_{-\mu,\varrho}$.

b) Mantenendo le stesse notazioni, se x è compreso nella regione comune ai semipiani $P_{-\mu',\varrho}$ e $P_{-\mu'',\varrho}$ e t va all'infinito con un argomento qualunque μ compreso fra μ' e μ'', l'espressione (29) tende a zero *uniformemente.*

Infatti, essendo ε e σ due numeri positivi arbitrariamente piccoli, se prendiamo x nella regione comune ai due semipiani $P_{-\mu',\varrho+\varepsilon}$ e $P_{-\mu'',\varrho+\varepsilon}$, per la (30) avremo

$$|\chi(t)\, e^{-xt}| < M\, e^{-\varepsilon\tau}$$

e qui potremo prendere τ_0 tanto grande che per $\tau > \tau_0$ sia $Me^{-\tau\varepsilon} < \sigma$.

c) Una funzione intera della forma

$$a(t) = h_1\, e^{\alpha_1 t} + h_2\, e^{\alpha_2 t} + \ldots + h_m\, e^{\alpha_m t}$$

ammette infinite radici che hanno per punto limite l'infinito. Ma su ogni semiretta che parte dall'origine (eccettuate alcune in numero finito), si può prendere τ_0 tanto grande che su quella retta non si trovi alcuna radice di $a(t)$ maggiore di τ_0 in valore assoluto.

Si indichi, infatti, con μ l'argomento di una direzione qualunque e si ponga $\alpha_\nu = \gamma_\nu + i\,\gamma'_\nu$. Si avrà

$$\mathcal{R}\,(\alpha_\nu\, t) = \tau\,(\gamma_\nu \cos\mu - \gamma'_\nu \operatorname{sen}\mu)\,, \quad (\nu = 1, 2, \dots, m).$$

Vi sarà soltanto un numero finito di direzioni in cui due delle $\mathcal{R}\,(\alpha_\nu\, t)$ possono essere eguali, infatti se deve essere

$$\gamma_r \cos\mu - \gamma'_r \operatorname{sen}\mu = \gamma_s \cos\mu - \gamma'_s \operatorname{sen}\mu$$

ne viene per μ il valore speciale

$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{\gamma_r - \gamma_s}{\gamma'_r - \gamma'_s}\,. \tag{31}$$

Tolte dunque queste direzioni che sono in numero finito, vi sarà fra le $\mathcal{R}\,(\alpha_\nu\, t)$ una massima: sia quella corrispondente all'indice s. Si potrà allora scrivere

$$a\,(t) = \{h_s + h_1\, e^{(\alpha_1 - \alpha_s)t} + h_2\, e^{(\alpha_2 - \alpha_s)t} + \dots\}\, e^{\alpha_s t}.$$

Ma le parti reali di $\alpha_1 - \alpha_s, \alpha_2 - \alpha_s, \dots$ essendo negative, posso prendere τ_0 tale che per $\tau > \tau_0$ sia

$$|\,h_1\, e^{(\alpha_1 - \alpha_s)t} + h_2\, e^{(\alpha_2 - \alpha_s)t} + \dots| < |\,h_s|/2\,,$$

onde

$$|\,a\,(t)\,| > \frac{1}{2}\,|\,h_s e^{\alpha_s t}\,|,$$

e qui il secondo membro non è zero per nessun valore finito di t.

Le direzioni date da (31), lungo le quali si possono trovare radici di $a\,(t)$ per $|\,t\,|$ grande quanto si vuole, verranno dette *direzioni limiti.* La (31) dimostra che esse sono perpendicolari alle simmetriche (rispetto all'asse reale) delle direzioni dei lati del poligono che ha per vertici i punti α_ν.

d) Se si prendono due semirette di argomenti μ', μ'', abbastanza vicine per non comprendere fra di loro alcuna direzione limite, l'espressione

$$\frac{\chi\,(t)\, e^{-xt}}{a\,(t)} \tag{32}$$

converge a zero *uniformemente* quando t tende all'infinito con un argomento qualunque compreso fra μ' e μ'', per tutti i valori di x compresi nella regione comune ai due semipiani $P_{-\mu',\varrho}$ e $P_{-\mu'',\varrho}$.

Infatti si ha

$$\frac{\chi(t)\, e^{-xt}}{a(t)} = \frac{\chi(t)\, e^{-(x+\alpha_s)t}}{h_s + h_1\, e^{(\alpha_1-\alpha_s)t} + \ldots},$$

dove per tutti i valori di μ compresi fra μ' e μ'' le $\mathfrak{R}(\alpha_1-\alpha_s)$, $\mathfrak{R}(\alpha_2-\alpha_s)$, ... non divengono mai zero e perciò rimangono sempre negative. Si potrà dunque trovare un tal valore τ_0 che, per $\tau > \tau_0$ e per tutti i valori di μ fra μ' e μ'', sia

$$|h_1\, e^{(\alpha_1-\alpha_s)t} + h_2 e^{(\alpha_2-\alpha_s)t} + \ldots| < |h_s|/2,$$

da cui segue che il denominatore della (32) risulta in valore assoluto maggiore di $|h_s|/2$. In quanto al numeratore della (32), sappiamo che esso converge uniformemente a zero per ogni valore di μ fra μ' e μ'' ed i valori di x presi nella regione comune ai semipiani $P_{-\mu',\varrho-\mathfrak{R}(\alpha_s)}$, $P_{-\mu'',\varrho-\mathfrak{R}(\alpha_s)}$; pertanto per quei valori di x converge a zero la (32), c. d. d. .

13. — Mediante i principi ora stabiliti, è facile riconoscere che l'espressione (28) rappresenta una funzione analitica di x. Supponiamo prima che la direzione dell'asse reale positivo non sia una direzione limite, e che su quest'asse non si trovi alcuna radice della $a(-t)$. Indicando con α_1 quella delle α_ν che ha la minima parte reale, la funzione sotto il segno nella (28) si può scrivere

$$\frac{\chi(t)\, e^{-(x-\alpha_1)t}}{\Sigma\, h_\nu\, e^{-(\alpha_\nu-\alpha_1)t}},$$

e quindi, per x tale che $\mathfrak{R}(x-\alpha_1) > \varrho$, cioè preso x nel semipiano $P_{0,\varrho+\alpha_1}$, essa tende a zero e (Teor. 1°) l'integrale (28) rappresenta, per quei valori di x, una funzione analitica regolare che è una soluzione effettiva dell'equazione (1).

Se invece la direzione dell'asse reale positivo contiene qualche radice della $a(-t)$, oppure è una direzione limite, si consideri in luogo dell'integrale (28) l'espressione

$$(28') \qquad \int_0^\infty \frac{\chi(\tau\, e^{i\mu})\, e^{-x\tau e^{i\mu}}\, e^{i\mu}\, d\tau}{\Sigma\, h_\nu\, e^{-\alpha_\nu \tau e^{i\mu}}},$$

dove la semiretta di argomento μ non contiene radici di $a(-t)$ nè è direzione limite, e si trova come prima che la (28′) rappresenta nel semipiano $P_{-\mu, \varrho+\mathfrak{R}(\alpha_s)}$ una funzione analitica regolare che soddisfa alla (1); $\alpha_s t$ indica quella delle $\alpha_\nu t$ che ha la minima parte reale.

Risulta da ciò che la soluzione formale (28) della equazione (1) dà sempre luogo ad una soluzione effettiva.

14. — Dobbiamo ora rispondere all'altra domanda posta in principio del n. **12**: come si possa continuare analiticamente la funzione ora trovata fuori del semipiano in cui essa è rappresentata dalla (28). A questo scopo consideriamo un settore circolare limitato da un arco di cerchio di centro O e raggio r grandissimo, e da due raggi aventi per argomenti μ' e μ''; questi ultimi presi in modo da non essere direzioni limiti, nè comprendere fra essi direzioni limiti, nè alcuna radice di $a(-t)$.

L'integrale di $\chi(t)\, e^{-xt}/a(-t)$ esteso al contorno del settore, sarà nullo. Ma la parte d'integrale esteso all'arco di cerchio si può [n. **12**, d)] al crescere del raggio r, rendere piccola quanto si vuole. Ne risulta

$$\int_0^\infty \frac{\chi(\tau\, e^{i\mu'})\, e^{-x\tau e^{i\mu'}}\, e^{i\mu'}\, d\tau}{a(-\tau\, e^{i\mu'})} = \int_0^\infty \frac{\chi(\tau\, e^{i\mu''})\, e^{-x\tau e^{i\mu''}}\, e^{i\mu''}\, d\tau}{a(-\tau\, e^{i\mu''})}\,.$$

Ma la prima di queste espressioni dà una funzione analitica nel semipiano $P_{-\mu', \varrho+\mathfrak{R}(\alpha_s)}$ e la seconda, nel semipiano $P_{-\mu'', \varrho+\mathfrak{R}(\alpha_s)}$; onde nella parte comune ai due semipiani esse rappresentano la stessa funzione analitica: si può dunque concludere che la espressione del secondo membro ci dà la continuazione analitica della funzione rappresentata dal primo.

15. — Se, come nel numero precedente, integriamo lungo due semirette di argomenti μ' e μ'', che non siano, nè comprendano fra di loro direzioni limiti, ma che comprendano radici della $a(-t)$ (in numero necessariamente finito) che indicheremo con $-\beta_h$, $(h = 1, 2, \ldots, k)$, l'integrale esteso al contorno del settore ora considerato sarà eguale alla somma degli integrali

$$\int_{(-\beta_h)} \frac{\chi(t)\, e^{-xt}\, dt}{a(-t)}$$

estesi a cerchi piccolissimi intorno alle radici $-\beta_h$. Questi integrali, nel caso delle $-\beta_h$ radici semplici, sono della forma $C\,e^{\beta_h}$: tralasciandosi per brevità la modificazione assai ovvia nel caso delle radici multiple. Si avrà dunque

$$(33)\qquad \int\limits_0^\infty \frac{\chi(\tau\, e^{i\mu'})\, e^{-x\tau e^{i\mu'}}\, e^{i\mu'}\, d\tau}{a(-\tau\, e^{i\mu'})} = \int\limits_0^\infty \frac{\chi(\tau\, e^{i\mu''})\, e^{-x\tau e^{i\mu''}}\, e^{i\mu''}\, d\tau}{a(-\tau\, e^{i\mu''})} + \sum_{h=1}^{k} C_h e^{\beta_h x}\,;$$

ma gli integrali definiti che compaiono nella formula precedente sono ambedue soluzioni effettive dell'equazione (1); perciò la sommatoria sarà soluzione dell'equazione

$$(34)\qquad \Sigma\, h_\nu\, \varphi(x + \alpha_\nu) = 0\,,$$

che rientra nella equazione (19). Questo risultato è consono a quello ottenuto al § II, poichè la sommatoria è appunto della forma (20) ivi scritta.

16. — Un caso speciale degno di nota si ha quando la funzione $\chi(t)$ riesce divisibile per $a(-t)$, cioè quando il quoziente di queste funzioni è trascendente intero. In tal caso la funzione analitica rappresentata dalla (23) si potrà continuare in tutto il campo esterno ad un cerchio di centro O e raggio $\varrho + |\alpha_r|$, essendo $|\alpha_r|$ il massimo modulo delle α_ν. Questa funzione è dunque sviluppabile fuori di questo cerchio in una serie

$$\Sigma \frac{c_n}{x^{n+1}}$$

e soddisfa alla relazione

$$\int\limits_{(l)} A(y - x)\, \varphi(y)\, dy = f(x)\,,$$

essendo (l) una linea chiusa, p. es. un cerchio di centro O e raggio $l > \varrho + |\alpha_r|$. Preso allora $x > R + l$, ne risulterà (cfr. § I) la $f(x)$ sviluppata in una serie di derivate della $A(-x)$:

$$f(x) = \Sigma \frac{c_n\, A^{(n)}(-x)}{n\,!}\,.$$

17. — Abbiamo mantenuta fin qui l'ipotesi, fatta in principio del n. 12, che la $a(t)$ non sia nulla per $t = 0$. Quando ciò fosse, $t = 0$ sarebbe radice di ordine necessariamente finito p, e mentre l'espressione

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \frac{\chi(t)\, e^{-xt}\, dt}{a(-t)}$$

non avrebbe significato, l'espressione

$$\varphi_p(x) = \int_0^\infty \frac{\chi(t)\, e^{-xt}\, t^p\, dt}{a(-t)}$$

avrebbe un significato nei casi e sotto le condizioni trovate precedentemente, e verificherebbe l'equazione

$$\Sigma\, h_\nu\, \varphi_p(x + \alpha_\nu) = f^{(p)}(x)\,.$$

Perciò si può prendere per espressione di $\varphi(x)$ l'integrale indefinito p^{mo} di $\varphi_p(x)$, determinando opportunamente le costanti arbitrarie.

§ VI. — Trascendenti notevoli cui conduce la soluzione trovata.

18. — L'equazione (1), dove $f(x)$ è una funzione regolare fuori di un cerchio di centro O e raggio ϱ, ammette come soluzione, per quanto si è visto, l'espressione

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \frac{\chi(t)\, e^{-xt}\, dt}{a(-t)}\,, \tag{18}$$

dove l'integrazione è estesa lungo una semiretta di argomento μ che non passi per alcuna radice della $a(-t)$ nè sia direzione limite per la $a(-t)$ stessa. L'espressione (18) si prende come soluzione se $x = 0$ non è radice di $a(-t)$: in caso contrario vale l'osservazione del n. 17. La (18) rappresenta una funzione analitica di x per i valori di x posti nel semipiano $P_{-\mu,\varrho+\Re(\alpha_g)}$ e si può continuare come è stato indicato al n. 14.

Supponiamo ora che la $1/a(-t)$ sia sviluppabile in una serie d'esponenziali:

$$1/a(-t) = \Sigma\, c_n\, e^{-\beta_n t}.$$

Verrà, sostituendo nella (18) e supposta lecita l'integrazione termine a termine,

$$\varphi(x) = \Sigma\, c_n f(x + \beta_n). \tag{35}$$

Allorquando lo sviluppo trovato così formalmente per la $\varphi(x)$ ha anche un significato effettivo, si ottiene la soluzione della (1) sotto una forma assai degna di nota, anche per la reciprocità che apparisce fra la (1) e la (35).

19. — Vogliamo ora prendere la funzione $a(t)$ sotto la forma

$$a(t) = (1 - h_1\, e^{\alpha_1 t})(1 - h_2\, e^{\alpha_2 t}) \dots (1 - h_m\, e^{\alpha_m t}). \tag{36}$$

In questo caso le soluzioni delle equazioni (1) corrispondenti ammettono sviluppi della forma (35). Questi sviluppi ci condurranno ad una classe notevole di funzioni, nella quale sono contenute certe trascendenti già incontrate dal Sig. APPELL per altra via [1] e che dànno una interessante generalizzazione delle funzioni euleriane.

Nella (36) si suppongano per semplicità tutte le $\mathfrak{R}(\alpha_\nu)$ positive: inoltre nessuna delle radici di $a(t)$ sia sull'asse reale. Non sarebbe difficile togliere in tutto od in parte queste restrizioni, che noi però conserveremo per brevità e perchè esse limitano un caso che racchiude già quanto vi è d'essenziale nella teoria che vogliamo adombrare.

L'espressione (18) prende nel nostro caso la forma

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \frac{\chi(t)\, e^{-xt}\, dt}{\Pi(1 - h_\nu\, e^{-\alpha_\nu t})}, \tag{37}$$

dove $\chi(t)$ è una funzione intera come al n. **11**: e ricordiamo che in forza del n. **12** si può assegnare un numero M tale che per ogni x la cui parte reale è maggiore od eguale a $\varrho_1 > \varrho$, sia

$$\int_0^\infty |\chi(t)\, e^{-xt}|\, dt < M, \qquad \text{ed anche} \qquad \int_0^\infty |\chi(t)\, e^{-xt}|\, t^m\, dt < M. \tag{38}$$

---

[1] Mathematische Annalen, Bd. XIX.

20. — Ciò posto, distingueremo vari casi.

1^0 Caso. Tutte le h_ν abbiano i loro moduli minori dell'unità. La condizione

$$|h_\nu e^{-\alpha_\nu t}| < 1$$

sarà soddisfatta per ogni t reale e tale che sia

$$t > \frac{1}{\mathcal{R}(\alpha_\nu)} \log |h_\nu| ,$$

e quindi, per essere $|h_\nu| < 1$, da un valore negativo di t fino a $t = +\infty$. Segue da ciò che $1/(1 - h_\nu e^{-\alpha_\nu t})$ si può sviluppare in una serie $\Sigma h_\nu^n e^{-n\alpha_\nu t}$ che converge assolutamente ed uniformemente per ogni t da zero a $+\infty$, compreso il punto $t = 0$. Lo stesso avverrà dunque del prodotto di queste serie relative ai diversi valori di ν, ed indicando con $\Sigma C_n e^{-\beta_n t}$ la serie prodotto e sostituendo nella (37), si potrà integrare termine a termine. Infatti, preso un numero ε piccolo a piacere, si può determinare un indice m tale che per $n \geq m$ il resto della serie precedente sia $< \varepsilon$ per ogni t da zero (incluso) a $+\infty$. Fissato tale m, si ha

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \chi(t) e^{-xt} \sum_0^m C_n e^{-\beta_n t} dt + \int_0^\infty \chi(t) e^{-xt} \sum_{m+1}^\infty C_n e^{-\beta_n t} dt ,$$

da cui

$$|\varphi(x) - \sum_0^m C_n \int_0^\infty \chi(t) e^{-(x+\beta_n)t} dt | \leq \varepsilon \int_0^\infty |\chi(t) e^{-xt}| dt$$

e per la (38) ed eseguendo l'integrazione nel primo membro:

$$\left| \varphi(x) - \sum_0^m C_n f(x + \beta_n) \right| < \varepsilon M .$$

Questa diseguaglianza dimostra che la serie $\sum_0^\infty C_n f(x + \beta_n)$ è convergente ed ha per somma la $\varphi(x)$. La (35) ha dunque in questo caso una esistenza effettiva.

21. — Per vedere come sia formata la serie ora trovata, noto che

$$\Sigma C_n e^{-\beta_n t} = \frac{1}{\Pi(1 - h_\nu e^{-\alpha_\nu t})} = \Sigma h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} \dots h_m^{\lambda_m} e^{-(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_m\alpha_m)t} ,$$

dove l'ultima sommatoria è estesa a tutti i sistemi di valori interi positivi o nulli delle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, e da questa risulta

$$\varphi(x) = \Sigma h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} \ldots h_m^{\lambda_m} f(x + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_m \alpha_m). \tag{39}$$

Se questa si riguarda come funzione delle $m+1$ variabili x ed $h_1, h_2, \ldots, h_m$, essa è regolare per tutti i valori delle h_ν minori di uno in valore assoluto e per x tale che $\mathfrak{R}(x) > \varrho$.

Facendo in particolare $\chi(t) = 1$, si ha la formula

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\,dt}{\Pi(1 - h_\nu e^{-\alpha_\nu t})} = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_m = 0}^{\infty} \frac{h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} \ldots h_m^{\lambda_m}}{x + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_m \alpha_m}. \tag{40}$$

I due membri rappresentano la medesima funzione analitica, ma la seconda vale in un campo più esteso della prima: infatti la prima vale soltanto per $\mathfrak{R}(x) > 0$, mentre l'altra vale per ogni valore di x, eccettuati quelli compresi in

$$-(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_m \alpha_m)$$

relativamente a tutti i valori interi (positivi o nulli) delle λ. Questa funzione soddisfa all'equazione funzionale

$$\varphi(x) - \Sigma h_\nu \varphi(x + \alpha_\nu) + \Sigma h_\mu h_\nu \varphi(x + \alpha_\mu + \alpha_\nu) -$$

$$- \ldots \pm h_1 h_2 \ldots h_m \varphi(x + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m) = 1/x.$$

Nel caso speciale di un solo binomio questa equazione diventa

$$\varphi(x) - h\,\varphi(x + \alpha) = 1/x, \tag{41}$$

la cui soluzione è data, per $|h| < 1$, da

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\,dt}{1 - h\,e^{-\alpha t}} = \Sigma \frac{h^n}{x + n\alpha} \tag{42}$$

la quale non è altro che la serie ipergeometrica

$$\frac{1}{x} F\left(\frac{x}{\alpha},\ 1,\ \frac{x}{\alpha} + 1,\ h\right),$$

22. — 2º Caso. Prendiamo ora a considerare il caso che alcune delle h_ν abbiano i moduli maggiori dell'unità, senza che però le radici dei binomi $1 - h_\nu e^{-\alpha_\nu t}$ si trovino sulla linea d'integrazione. In tal caso le serie considerate al n. **20** non sono più convergenti per tutti i valori di t da zero a $+\infty$ e quindi la formula (39) non si può più stabilire. Perciò, mentre esiste per la $\varphi(x)$ la sua espressione in integrale definito, si perde lo sviluppo in serie che valeva nel caso precedente: tuttavia le altre proprietà della funzione si conservano. Così, nel caso più semplice dell'equazione funzionale (41) la serie del secondo membro della (42) è divergente, mentre l'integrale del primo membro rappresenta per $\mathfrak{R}(x) > 0$ una funzione analitica che soddisfa alla (41) e all'equazione differenziale delle funzioni ipergeometriche.

23. — 3º Caso. Si potrebbe ora considerare il caso di alcune delle h_ν minori di uno e delle altre uguali ad uno in valore assoluto; ma tralasceremo questo caso per limitarci al più interessante, vogliamo dire quello in cui tutte le h_ν sono uguali all'unità; caso che ci condurrà alla annunciata generalizzazione delle funzioni euleriane (¹).

Supponiamo pertanto di avere

$$a(-t) = \prod_{\nu=1}^{m} (1 - e^{-\alpha_\nu t}),$$

dove tutte le α_ν hanno la parte reale positiva. In questo caso l'espressione (37) non ha significato perchè, ognuno dei suoi fattori essendo nullo per $t = 0$, la funzione sotto al segno è infinita d'ordine m per quel valore di t; invece avrà significato l'espressione

$$(43) \qquad (-1)^m \varphi^{(m)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\chi(t)\, e^{-xt}\, t^m\, dt}{\Pi(1 - e^{-\alpha_\nu t})}\,.$$

In questo caso resta soddisfatta da sè la condizione che nessuna delle radici di $a(t)$ sia sull'asse reale.

24. — Passiamo ora a dimostrare che l'espressione integrale (43) si può sostituire con una serie analoga a quella studiata nel primo caso.

(¹) Cfr. la mia Nota nei Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, t. CXI (23 janvier 1888).

A quest'effetto, dimostreremo prima il seguente

Lemma. Il valore dell'espressione (43) tende a zero quando la parte reale di x tende a $+\infty$.

Pongo $x = \varrho_1 + \zeta$, $\varrho_1 > \varrho$, e scrivo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\chi(t)\, e^{-xt}\, t^m \, dt}{a(-t)} = \int_0^{\eta} \frac{\chi(t)\, e^{-xt}\, t^m \, dt}{a(-t)} + \int_{\eta}^{\infty} \frac{\chi(t)\, e^{-(\varrho_1+\zeta)t}\, t^m \, dt}{a(-t)} .$$

Nel primo integrale del secondo membro $t^m/a(-t)$ non è infinita per $t = 0$, ed ha quindi per t compreso fra 0 ed η un massimo valore assoluto; lo stesso varrà per $\chi(t)\, e^{-xt}$. Indicando il massimo valore del modulo del prodotto con N, sarà

$$\left| \int_0^{\eta} \frac{\chi(t)\, e^{-xt}\, t^m \, dt}{a(-t)} \right| < N\eta ;$$

ed ora, impiccolendo η, il valore di N ne è indipendente e perciò si può prendere η inferiore a $\sigma/(2N)$, essendo σ una quantità positiva arbitrariamente piccola. Fissato così il valore di η, la $1/a(-t)$ tende ad 1 per $t \to +\infty$ ed avrà perciò un limite superiore L fra η e $+\infty$.

Ora avremo

$$\left| \int_{\eta}^{\infty} \frac{\chi(t)\, e^{-(\varrho_1+\zeta)t}\, t^m \, dt}{a(-t)} \right| < L \int_{\eta}^{\infty} |\chi(t)| \cdot e^{-\varrho_1 t} |e^{-\zeta t}|\, t^m \, dt ;$$

ma per le ipotesi del n. 12 la $|\chi(t)|\, e^{-\varrho_1 t}$ tende a zero al crescere di t, ed ha quindi pure fra η ed ∞ un limite superiore L_1; infine

$$|e^{-\zeta t}| = e^{-R(\zeta)t} .$$

Onde

$$\left| \int_{\eta}^{\infty} \frac{\chi(t)\, e^{-(\varrho_1+\zeta)t}\, t^m \, dt}{a(-t)} \right| < LL_1 \int_{\eta}^{\infty} e^{-R(\zeta)t}\, t^m \, dt < LL_1 \int_0^{\infty} e^{-R(\zeta)t}\, t^m \, dt ,$$

talchè, infine, questo integrale risulta minore di $m!\, LL_1/\mathfrak{R}(\zeta)^{m+1}$. Essendo dunque L ed L_1 già fissati per quanto precede, si potrà prendere $\mathfrak{R}(\zeta)$ tanto grande che questa espressione sia minore di

$\sigma/2$, e così

$$\int_0^\infty \frac{\chi(t)\, e^{-xt}\, t^m\, dt}{a(-t)}$$

si rende, per $\mathfrak{R}(x)$ abbastanza grande, minore in valore assoluto di una quantità σ arbitrariamente piccola, c. d. d. .

25. — Ciò posto, indicando con μ_ν numeri interi e positivi qualunque, il prodotto $\Pi(1 - e^{-\mu_\nu \alpha_\nu t})$ è divisibile per $\Pi(1 - e^{-\alpha_\nu t})$ dando luogo all'identità:

$$\frac{1}{\Pi(1 - e^{-\alpha_\nu t})} = \sum_{\lambda_\nu = 0}^{\mu_\nu - 1} e^{-(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m) t} +$$

$$+ \frac{e^{-\mu_1 \alpha_1 t} + e^{-\mu_2 \alpha_2 t} + \dots \pm e^{-(\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_m \alpha_m) t}}{\Pi(1 - e^{-\alpha_\nu t})},$$

dove nella sommatoria l'indice λ_ν può prendere, indipendentemente dagli altri tutti, i valori interi e positivi da zero a $\mu_\nu - 1$. Moltiplicando ambo i membri per $\chi(t)\, e^{-xt}\, t^m\, dt$ ed integrando fra zero ed η:

1⁰) il primo membro dà $(-1)^m \varphi^{(m)}(x)$;

2⁰) il primo termine del secondo membro dà

$$(-1)^m \sum_{\lambda_\nu = 0}^{\mu_\nu - 1} f^{(m)}(x + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m);$$

3⁰) il secondo termine del secondo membro dà luogo ad un numero finito di termini (in numero di $2^m - 1$) della forma

$$\int_0^\infty \frac{\chi(t)\, e^{-(x+p)t}\, t^m\, dt}{\Pi(1 - e^{-\alpha_\nu t})},$$

dove p è una quantità della forma $\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \dots$, la cui parte reale è positiva: se questa si prende abbastanza grande, sappiamo dal Lemma del n. **24** che il valore assoluto dell'integrale si potrà ridurre piccolo quanto si vuole. Essendo dunque σ una quantità positiva presa arbitrariamente piccola, si potranno prendere le μ_ν tanto grandi che ognuno dei $2^m - 1$ integrali precedenti sia minore di $\sigma/(2^m - 1)$. Pertanto le $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ si potranno prendere tanto grandi da ridurre

$$\left| \varphi^{(m)}(x) - \sum_{\lambda_\nu = 0}^{\mu_\nu} f^{(m)}(x + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m) \right| < \sigma \,,$$

e con ciò è dimostrato che per $\mathfrak{R}(x) > \varrho$ vale l'eguaglianza

$$(44) \qquad (-1)^m \int_0^\infty \frac{\chi(t)\, e^{-xt}\, t^m \, \mathrm{d}t}{\Pi(1 - e^{-\alpha_\nu t})} =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots = 0}^{\infty} f^{(m)}(x + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m) \,.$$

Il ragionamento precedente dimostra oltre a ciò anche la convergenza assoluta della serie precedente, potendosi sostituire dappertutto alla $\chi(t)$ la serie formata coi medesimi coefficienti presi in valore assoluto.

26. — Facendo $\chi(t) = 1$ la formula precedente si muta in

$$(45) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-xt}\, t^m \, \mathrm{d}t}{\Pi(1 - e^{-\alpha_\nu t})} = m\,! \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots = 0}^{\infty} \frac{1}{(x + \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m)^{m+1}} \,,$$

e dal numero precedente è dimostrata la convergenza della serie del secondo membro per $\mathfrak{R}(x) > 0$.

§ VII. — **Dimostrazione diretta della convergenza della serie precedente. Cenno sulle proprietà della funzione che essa rappresenta.**

27. — La serie che compare nel secondo membro della (45) avendo una speciale importanza, converrà dimostrare direttamente che essa converge non solo per $\mathfrak{R}(x) > 0$, ma per tutti i valori di x che non sono compresi nel sistema di numeri

$$(46) \qquad w = -(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m) \,,$$

essendo le α_ν quantità aventi le parti reali positive, ed i numeri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ essendo interi nulli o positivi.

Consideriamo in generale la serie

$$(47) \qquad \Sigma \frac{1}{(x+w)^k};$$

questa convergerà insieme a

$$(48) \qquad \Sigma' \frac{1}{w^k} \quad (^1),$$

come si vede formando il rapporto fra due termini corrispondenti.

Ora si ha evidentemente

$$|w| \geq \mathcal{R}(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_m \alpha_m)$$

ossia, avendo posto $\mathcal{R}(\alpha_\nu) = \gamma_\nu$,

$$|w| \geq \lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 + \ldots + \lambda_m \gamma_m .$$

Sia ora γ_1 la minima fra le γ_ν, ed almeno uno degli interi λ_ν eguale ad l, e sarà

$$(49) \qquad |w| > l \gamma_1 .$$

Ciò posto, raggruppo i termini della (49) nel seguente modo: prendo prima quella w in cui tutte le λ sono eguali ad uno, poi quel gruppo di quantità w in cui almeno un indice λ è uguale a 2 mentre i rimanenti sono uguali ad uno (questo gruppo comprende $2^m - 1$ termini), poi quel gruppo in cui almeno un indice è uguale a 3 mentre gli altri sono 1 oppure 2 (questo comprende $3^m - 2^m$ termini), ..., in generale quel gruppo in cui almeno un indice è uguale ad n mentre gli altri sono $1, 2, \ldots, n-1$ (questo contiene $n^m - (n-1)^m$ termini). Ma per la (49) si ha, per un termine di quest'ultimo gruppo,

$$\frac{1}{|w^k|} < \frac{1}{n^k \gamma_1^k},$$

(1) Col segno Σ' si indica (secondo il WEIERSTRASS) che dalla sommatoria va escluso il sistema degli indici zero. La dimostrazione qui data è, con qualche modificazione, una generalizzazione di quella che si dà per $m = 2$, nel caso cioè delle serie che servono alla sviluppo delle funzioni ellittiche trattate col metodo del WEIERSTRASS. (Vedi, p. es., HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, T. I, p. 358.)

onde per tutto il gruppo la somma dei termini corrispondenti della (48), presi in valore assoluto, sarà minore di

$$\frac{1}{\gamma_1^k} \frac{n^m - (n-1)^m}{n^k},$$

che sviluppata dà

$$\frac{1}{\gamma_1^k} \left\{ \frac{m}{n^{k-m+1}} - \frac{\binom{m}{2}}{n^{k-m+2}} + \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{n^k} \right\}.$$

Ora è chiaro che i gruppi formati nel modo indicato esauriscono tutte le w, eccettuato quelle in cui uno degli indici è zero. Indicando con Σ'' la somma fatta con questa restrizione, si avrà

$$\Sigma'' \frac{1}{|w^k|} < \frac{1}{\gamma_1^k} \left\{ m \sum_1^\infty \frac{1}{n^{k-m+1}} - \binom{m}{2} \sum_1^\infty \frac{1}{n^{k-m+2}} + \dots + (-1)^m \sum_1^\infty \frac{1}{n^k} \right\}.$$

Nel secondo membro di questa disuguaglianza abbiamo un numero finito di serie armoniche generalizzate le quali sono convergenti se gli esponenti nei denominatori sono > 1, e perciò la condizione di convergenza della serie precedente è

$$k > m, \tag{50}$$

ossia, se k deve essere intero,

$$k \geq m + 1. \tag{50'}$$

In Σ'' mancano quei termini dove uno degli indici è zero: ma è chiaro che questi ci conducono ad un numero finito di serie analoghe a Σ'', ma con un numero di indici inferiore ad m, le quali per $k > m$ sono a fortiori convergenti. Dunque le (50) e (50') sono anche le condizioni di convergenza assoluta delle serie

$$\Sigma' \frac{1}{w^k}, \qquad \Sigma' \frac{1}{(x+w)^k}.$$

28. — Pongasi

$$(-1)^m \, m! \, \Sigma \frac{1}{(x + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m)^{m+1}} = \tag{51}$$

$$= \psi^{(m)}(x) = \psi^{(m)}(x\,;\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m).$$

La funzione così definita è uniforme, regolare in tutto il piano eccettuati i punti w, e soddisfa all'equazione (1), che in questo caso è della forma

$$(52) \quad \psi^{(m)}(x) - \psi^{(m)}(x+\alpha_1) - \psi^{(m)}(x+\alpha_2) - \dots - \psi^{(m)}(x+\alpha_m) + \\ + \psi^{(m)}(x+\alpha_1+\alpha_2) + \dots + (-1)^m \psi^{(m)}(x+\alpha_1+ \\ + \alpha_2 + \dots + \alpha_m) = (-1)^m m!/x^{m+1}.$$

Inoltre, dall'espressione (45) si ricava, fra la $\psi^{(m)}(x;\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$ e la $\psi^{(m)}(x;\alpha_2,\dots,\alpha_m)$, la relazione

$$(53) \quad \psi^{(m)}(x;\alpha_2,\dots,\alpha_m) = \psi^{(m)}(x;\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m) - \psi^{(m)}(x+\alpha_1;\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m).$$

29. — Posto analogamente, per qualunque intero k maggiore di m,

$$(54) \qquad \psi^{(k)}(x) = (-1)^k k! \, \Sigma \frac{1}{(x+w)^{k+1}},$$

le funzioni $\psi^{(k)}(x)$ godono pure delle proprietà espresse dalle equazioni (52) e (53). Queste funzioni si possono riguardare come le derivate successive di una medesima funzione, ma tali derivate non ammettono l'espressione in serie convergenti della forma (47) se non per indici di derivazioni eguali o maggiori di m.

Queste funzioni dànno una generalizzazione assai ovvia delle derivate successive della funzione di GAUSS $\Psi(x)$ (¹), che è la derivata logaritmica della funzione euleriana $\Gamma(x)$. Serie della forma (47) valgono in questo caso a partire dalla derivata prima di $\Psi(x)$, per la quale, come è ben noto, si ha

$$\Psi'(x) = \Sigma \frac{1}{(x+n)^2}.$$

Per $m=2$ si ottiene per prima serie convergente della forma (47) la serie

$$\Psi''(x;\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{\lambda_1,\lambda_2} \frac{1}{(x+\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)^3},$$

(¹) GAUSS, *Werke*, Bd. III, p. 201.

che sarebbe la derivata seconda logaritmica della funzione O di HEINE (1) e che entra a far parte della funzione $\mathcal{P}'(x)$ nella teoria delle funzioni ellittiche, secondo la trattazione del WEIERSTRASS (2).

30. — Se la (51) s'integra termine a termine si ottiene una serie divergente, ma se ad ogni termine si toglie la costante $1/w^m$ è facile vedere che essa si riduce convergente: con ciò non si fa altro che applicare il noto procedimento del teorema di MITTAG-LEFFLER. Integrando successivamente ed applicando ad ogni successiva integrazione il detto procedimento del teorema di MITTAG-LEFFLER, si giunge ad una serie convergente della forma

$$\psi'(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \Sigma\left(\frac{1}{x+w} - r_w(x)\right),$$

dove $r_w(x)$ è una funzione razionale intera di grado $m-1$. La funzione così ottenuta gode di proprietà espresse dalle equazioni

$$(52') \qquad \psi(x) - \psi(x+\alpha_1) - \psi(x+\alpha_2) - \dots + \\ + \psi(x+\alpha_1+\alpha_2) + \dots + (-1)^m \psi(x+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m) = 1/x,$$

$$(53') \quad \psi(x+\alpha_1; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \psi(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) - \psi'(x; \alpha_2, \dots, \alpha_m).$$

Questa funzione, toltane una lieve differenza di forma, non è altro che la derivata logaritmica della funzione $O(x)$ del Sig. APPELL (3). Nel lavoro del Sig. APPELL la relazione (53') (4) è presa come fondamentale.

Su queste funzioni, che offrono uno speciale interesse (perchè nel caso di più di due periodi, quando mancano le funzioni uniformi periodiche propriamente dette, esse vengono a conservare parecchie delle proprietà più notevoli della periodicità), basti per ora questo rapido cenno; riserbandoci di riprendere l'argomento e svolgere con maggiori particolari le loro proprietà. Osserviamo però fin d'ora come nella formula (54) si possa riguardare quale variabile, oltre alle $x, \alpha_1, \dots, \alpha_m$, anche la k, e come si ottenga rispetto a questa variabile una nuova classe di funzioni, di cui il primo esempio è la nota

(1) HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, Bd. I, p. 109.

(2) V. p. es. HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, T. I. p. 369.

(3) Mathematische Annalen, Bd. XIX, p. 84.

(4) Ivi espressa dalla corrispondente formula (4), p. 85.

funzione indicata con $\zeta(k)$ dal RIEMANN e da esso applicata alla teoria dei numeri primi.

Nel chiudere la prima parte di questo lavoro, faremo notare che insieme alla equazione (1) si sono implicitamente risolute, negli stessi casi, altre equazioni analoghe per le quali varrebbero le stesse considerazioni fatte per la (1). Tale sarebbe l'equazione, apparentemente più generale,

$$(55)\qquad \sum_{\nu=1}^{m}\left\{h_{\nu,0}\,\varphi(x+\alpha_\nu)+h_{\nu,1}\,\varphi'(x+\alpha_\nu)+\ldots+\frac{h_{\nu,r_\nu}}{r_\nu\,!}\,\varphi^{(r_\nu)}(x+\alpha_\nu)\right\}=f(x)$$

per la quale la funzione caratteristica $A(z)$ ha la forma

$$A(z)=\sum_{\nu=1}^{m}\left(\frac{h_{\nu,0}}{z-\alpha_\nu}+\ldots+\frac{h_{\nu,r_\nu}}{(z-\alpha_\nu)^{r_\nu+1}}\right).$$

Tutte le formule di risoluzione ottenute per la (1) nelle pagine precedenti valgono anche per la (55) colle considerazioni relative, la funzione indicata con $a(t)$ essendo presentemente

$$\sum_{\nu=1}^{m}\left(h_{\nu,0}+h_{\nu,1}\,t+\ldots+\frac{h_{\nu,r_\nu}\,t^{r_\nu}}{r_\nu\,!}\right)e^{\alpha_\nu t}.$$