Salvatore Pincherle

Salvatore Pincherle

Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate. Nota II

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Serie 4, Vol. **4** (1888), p. 792–799

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 1, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 231–239

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_1_231>

8 [39].

Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate. Nota II.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti della Classe
di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali (Roma);
(4) **4**$_1$, 792-799 (1888).

6. — Nei §§ **4** e **5** abbiamo preso le mosse da un'equazione differenziale lineare del prim' ordine e ne abbiamo formata la correlativa alle differenze: l'integrale di questa, considerato come funzione di suoi parametri, ci ha date le funzioni ipergeometriche d'ordine superiore ad una o più variabili. Ora, invece, prendiamo a considerare il caso coniugato del precedente, cioè partiamo da un' equazione lineare alle differenze finite del prim' ordine, che scriveremo

$$(5'') \qquad (a_{0,0} + a_{1,0}\, x + a_{2,0}\, x^2 + \ldots + a_{m,0}\, x^m) f(x) + \\ + \{ a_{0,1} + a_{1,1}(x+1) + \ldots + a_{m,1}(x+1)^m \} f(x+1) = 0 ,$$

la quale ammette come trasformata, secondo il metodo indicato al § **2**, l'equazione differenziale lineare d'ordine m:

$$(1'') \qquad (a_{0,0} + a_{0,1}\, e^{-t})\, \psi(t) + (a_{1,0} + a_{1,1}\, e^{-t})\, \psi'(t) + \ldots + \\ + (a_{m,0} + a_{m,1}\, e^{-t})\, \psi^{(m)}(t) = 0 .$$

Ora il Mellin (1) ha dimostrato che, in generale, l'integrale dell'equazione $(5'')$ si può dare nella forma

$$(14) \qquad f(x) = c^x \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\Gamma(x - \varrho_\nu)}{\Gamma(x - \sigma_\nu)} ,$$

---

(1) *Acta Mathematica,* t. VIII, p. 37, Cfr. anche ibid., t. IX, p. 137.

dove le ϱ_ν sono le radici dell'equazione

$$(3'') \qquad a_{0,0} + a_{1,0}\,x + a_{2,0}\,x^2 + \dots + a_{m,0}\,x^m = 0\,.$$

Suppongasi prima che $a_{m,0}$ ed $a_{m,1}$ siano entrambi diversi da zero. In tal caso il numero dei fattori Γ del numeratore e del denominatore nel secondo membro della (14) è il medesimo, e l'espressione di $f(x)$ dà una funzione analitica uniforme coi poli nei punti

$$(15) \qquad \varrho_\nu - n\,, \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \dots, m\,, \\ n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix},$$

dove i punti ϱ_ν si supporranno per maggiore semplicità tutti diversi.

Applicando il metodo indicato al § 3, si consideri una linea λ che avvolga i punti del sistema

$$\varrho_1, \varrho_1 - 1, \varrho_1 - 2, \dots, \varrho_1 - n, \dots\,,$$

escludendo tutti i poli degli altri $m - 1$ sistemi (15). Come si è visto, l'espressione

$$(6') \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{(\lambda)} e^{xt} f(x)\, dx$$

sarà un integrale dell'equazione (1″), purchè essa abbia un significato, e purchè il limite del residuo di $e^{xt} f(x)$ relativo al punto $x = \varrho_1 - n$ sia nullo per $n = \infty$. Questo residuo, ricordando le note proprietà della funzione Γ, si ottiene facilmente dalla (14) sotto la forma

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n!}\, c^{\varrho_1 - n}\, \frac{\prod\limits_{\nu=2}^{m} \Gamma(\varrho_1 - \varrho_\nu - n)}{\prod\limits_{\nu=1}^{m} \Gamma(\varrho_1 - \sigma_\nu - n)}\, e^{(\varrho_1 - n)t}\,.$$

Ora, non solo questo residuo tende a zero, ma l'integrale (6) equivale alla serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n\,,$$

e questa si trova facilmente essere convergente assolutamente ed in egual grado, per tutti i valori di t tali che sia

$$|e^{-t}| < |c|\,,$$

come si vede subito formando il rapporto R_n/R_{n-1}. Questa serie è dunque un integrale della (1''), ed essa si può scrivere

$$e^{\varrho_1 t} \Sigma\, C_n\, e^{-nt}, \tag{16}$$

con

$$C_n = (-1)^n\, c^{\varrho_1 - n} \frac{\Gamma(\varrho_1 - \varrho_2 - n) \ldots \Gamma(\varrho_1 - \varrho_m - n)}{n!\, \Gamma(\varrho_1 - \sigma_1 - n)\, \Gamma(\varrho_1 - \sigma_2 - n) \ldots \Gamma(\varrho_1 - \sigma_m - n)}, \tag{17}$$

ossia, riducendo ed indicando con C un fattore costante comune,

$$C_n = C\, c^{-n} \frac{\prod_{\nu=1}^{m} (\sigma_\nu - \varrho_1 + 1)(\sigma_\nu - \varrho_1 + 2) \ldots (\sigma_\nu - \varrho_1 + n)}{n! \prod_{\nu=2}^{m} (\varrho_\nu - \varrho_1 + 1)(\varrho_\nu - \varrho_1 + 2) \ldots (\varrho_\nu - \varrho_1 + n)}, \tag{17'}$$

dove è manifesta l'analogia coi coefficienti della serie ipergeometrica.

Con un facile cambiamento di variabile, l'equazione (1'') si riconduce all'eqnazione differenziale lineare, a coefficienti razionali, *regolare* all'infinito, considerata dal GOURSAT nella citata Memoria, mentre l'espressione (16) si riduce alla serie ipergeometrica generalizzata, integrale di quell'equazione, che forma l'oggetto della Memoria stessa.

7. — Al sistema $\varrho_1, \varrho_1 - 1, \ldots, \varrho_1 - n, \ldots$ di poli considerato in ciò che precede, si può sostituire uno qualunque degli altri sistemi (15); con ciò si ottengono m integrali dell'equazione (1'') costituenti nel loro insieme un sistema fondamentale. Questi integrali sono tali che, detto $\psi_\nu(t)$ quello relativo al sistema di poli $\varrho_\nu - n$, sarà, per $t \to +\infty$,

$$\lim e^{-xt}\, \psi_\nu(t) = 0$$

se la parte reale di x è maggiore di quella di ϱ_ν.

8. — Nella (5'') si sono supposte le $a_{m,0}, a_{m,1}$ differenti da zero. Se supponiamo che $a_{m,1}$ sia zero, il numero dei fattori Γ sarà maggiore nel numeratore che nel denominatore nel secondo membro della (14); il limite del rapporto R_n/R_{n-1}, considerato al § 6, sarà zero per qualunque valore di t, e la serie integrale ΣR_n sarà una funzione trascendente intera. Si ottengono così le trascendenti accennate nel n. 10 della citata Memoria del GOURSAT.

Se in luogo di $a_{m,1}$, si suppone $a_{m,0} = 0$, la serie ΣR_n del § 6 è sempre divergente, benchè essa continui a soddisfare formalmente all'equazione differenziale. Ma considerando $1/f(x)$ invece di $f(x)$ si ritorna al caso precedente, e con ciò si vede che nel caso di una funzione $f(x)$ che soddisfa ad un'equazione alle differenze del primo ordine, le espressioni della forma (4) per la $f(x)$ e per la $1/f(x)$ sono affatto analoghe. Ciò spiega l'analogia di forma fra l'integrale definito ordinario (euleriano) che rappresenta la funzione $\Gamma(x)$, e l'integrale di HANKEL (¹) che esprime la $1/\Gamma(x)$.

Nel caso in cui $a_{m,1}$ è zero, si può limitare l'integrazione nella (6) in un modo che mi sembra interessante perchè dà un esempio notevole d'*inversione d'integrale definito*. Dico cioè che l'integrale (6) si può scrivere

$$(18) \qquad \psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(x-\varrho_1)\,\Gamma(x-\varrho_2)\ldots\Gamma(x-\varrho_{m-1})\,\Gamma(x-\varrho_m)}{\Gamma(x-\sigma_1)\,\Gamma(x-\sigma_2)\ldots\Gamma(x-\sigma_{m-1})}\, e^{xt}\,\mathrm{d}x\,,$$

dove a è un numero reale maggiore delle parti reali di ciascuna delle $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$. Posto $x = \zeta + i\eta$, sulla linea $\zeta = a$ del piano x nessuna delle funzioni Γ diventa infinita; inoltre al tendere all'infinito di η (supposta positiva) la $\Gamma(x-\varrho_\nu)$ diviene infinitesima di un ordine indicato da

$$\eta^{m+\varepsilon}\, e^{-\frac{\pi\eta}{2}}\,,$$

dove ε è compreso fra $-1/2$ e $+1/2$ (²) ed m è il massimo intero contenuto nella parte reale di $a - \varrho_\nu$. Al tendere di $-\eta$ all'infinito $\Gamma(x-\varrho_\nu)$ diviene infinitesima nello stesso modo.

Da questa osservazione, applicata ai vari fattori del numeratore e del denominatore sotto il segno della (18), si può dedurre la condizione affinchè la (18) stessa abbia un significato. Posto infatti $t = \tau + i\bar{\omega}$, la e^{xt} avrà il valore asintotico $e^{\mp\bar{\omega}\eta}$ per $\eta \to \pm\infty$, e l'integrale avrà un significato sotto le condizioni

$$-\bar{\omega}\eta - \frac{\pi\eta}{2} < 0, \quad \bar{\omega}\eta - \frac{\pi\eta}{2} < 0,$$

(¹) Riportato dal BIGLER (Crelle, T. CII, p. 237).

(²) Vedi Nota alla fine del lavoro.

cioè per i valori di t compresi fra due parallele all'asse reale alla distanza $\pm \frac{\pi}{2}$.

Se ora consideriamo nel piano x un rettangolo coi vertici nei punti

$$A\,(a - i\,\eta),\ B\,(a + i\,\eta),\ C\,(a + 1 - i\,\eta),\ D\,(a + 1 + i\,\eta)\,,$$

l'integrale della $e^{xt} f(x)$ esteso al contorno del rettangolo è nullo per il teorema di CAUCHY; ma per $\eta \to \infty$ l'integrazione estesa ai lati AC, BD è nulla, e rimane

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xt} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{a+1-i\infty}^{a+1+i\infty} e^{xt} f(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

ed anche, mutando x in $x + 1$ nel secondo membro,

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xt} f(x)\, \mathrm{d}x = e^t \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xt} f(x+1)\, \mathrm{d}x\,.$$

Con ciò resta dimostrato che l'espressione (18) soddisfa alle condizioni (7), e che quindi $\psi(t)$ è un integrale dell'equazione (1″) nel caso di $a_{m,1} = 0$.

In particolare, per ogni valore positivo di a, l'integrale

$$\frac{1}{2\,\pi\, i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xt}\, \Gamma(x)\, \mathrm{d}x$$

non differisce da $e^{-e^{-t}}$ che per un fattore costante.

9. — Nello stesso modo che l'integrale (10) della equazione (51), considerato come funzione dei parametri $\alpha_1\, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, soddisfa ad un'equazione differenziale lineare d'ordine m rispetto a ciascuno, e ad equazioni a derivate parziali d'ordine inferiore rispetto a due o più di essi parametri; così, mantenendosi la già notata *dualità*, si trova che l'integrale (6) dell'equazione (1″), considerato come funzione degl'infiniti $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$ della $f(x)$, soddisfa ad un'equazione lineare alle differenze finite dell'ordine m rispetto a ciascuno di essi, e rispetto a due o più, ad equazioni alle differenze parziali, d'ordine in-

feriore. Le quindici note relazioni fra le «functiones contiguae» di GAUSS nella teoria delle serie ipergeometriche, e le generalizzazioni di queste brevemente accennate nel n. 7 della citata Memoria del GOURSAT, non sono che casi speciali di tali equazioni alle differenze ordinarie o parziali.

Queste equazioni si possono ottenere come segue. Si ha, sviluppando la (6′),

$$(19) \qquad \psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int e^{xt}\, c^x \prod_{\nu=0}^{m} \frac{\Gamma(x-\varrho_\nu)}{\Gamma(x-\sigma_\nu)}\, dx = \psi(t;\, \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m) \text{ (1)}.$$

Ora, indicando con q un numero intero positivo qualunque, si ha

$$\Gamma(x-\varrho_1+q) = (x-\varrho_1)(x-\varrho_1+1)\dots(x-\varrho_1+q-1)\,\Gamma(x-\varrho_1),$$

ossia

$$\Gamma(x-\varrho_1+q) = (x^q + g_1 x^{q-1} + g_2 x^{q-2} + \dots + g_{\varrho-1} x + g_\varrho)\,\Gamma(x-\varrho_1),$$

dove le g_ν sono funzioni intere di ϱ_1, di un grado indicato dall'indice. Se dunque nella (19) si sostituisce $\varrho_1 - q$ al posto di ϱ_1, si ottiene immediatamente:

$$(20) \qquad \psi[\varrho_1 - g] = \frac{d^q \psi}{d t^q} + g_1 \frac{d^{q-1}\psi}{d t^{q-1}} + \dots + g_\varrho\, \psi(t).$$

Formando le equazioni (20) per $q = 1, 2, \dots, m$, si potranno dedurre i valori di

$$\psi(t), \quad \frac{d\psi}{dt}, \dots, \frac{d^m \psi}{d t^m}$$

in funzione lineare delle

$$\psi[\varrho_1],\ \psi[\varrho_1 - 1], \dots, \psi[\varrho_1 - m],$$

a coefficienti razionali in ϱ_1, e, sostituendo le espressioni così ottenute nella equazione (1″), si otterrà (volendo, in forma di determi-

---

(1) Scriverò $\psi(t)$ quando non importerà considerare i parametri ϱ_ν; scriverò $\psi[\varrho_h, \varrho_k]$ quando si vorranno considerare i parametri ϱ_h, ϱ_k, p. es., e non la variabile t e gli altri parametri ϱ.

nante) un'equazione alle differenze ordinarie, lineare, dell'ordine m e a coefficienti razionali in ϱ_1, cui soddisfa la ψ considerata come funzione della sola ϱ_1. Analogamente rispetto a ciascuno degli altri parametri.

Partendo invece da una relazione come

$$\Gamma(x-\varrho_1+r)\,\Gamma(x-\varrho_2+s)=(x-\varrho_1)(x-\varrho_1+1)\dots(x-\varrho_1+r-1)\,.$$

$$.(x-\varrho_2)\dots(x-\varrho_2+s-1)\,\Gamma(x-\varrho_1)\,\Gamma(x-\varrho_2)\,,$$

e, procedendo in modo analogo a quanto si è fatto precedentemente, si giungerà ad un'equazione alle differenze parziali, lineare e a coefficienti razionali in ϱ_1, ϱ_2, cui soddisfa la $\psi[\varrho_1, \varrho_2]$. Similmente si troverebbero relazioni fra tre o più parametri.

10. — Riassumendo, l'analogia fra le due classi di funzioni studiate in ciò che precede si può far risultare dal seguente specchio dei risultati dimostrati:

All'equazione differenziale lineare a coefficienti razionali in e^{-t} si fa corrispondere, con una trasformazione, un'equazione alle differenze lineare, a coefficienti razionali in x.

Detto $\psi(t)$ l'integrale della prima, ed $f(x)$ quello della seconda, la formula di trasformazione è della forma

(a) $$f(x)=\int e^{-xt}\,\psi(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

l'integrale essendo preso lungo una linea convenientemente scelta.

Il grado p dei coefficienti della prima in e^{-t} dà l'ordine della seconda; l'ordine m della prima dà il grado in x dei coefficienti della seconda.

Se dunque l'equazione differenziale è del prim'ordine, l'equazione alle differenze è dell'or-

All'equazione alle differenze finite lineare a coefficienti razionali in x si fa corrispondere, con una trasformazione, un'equazione differenziale lineare, a coefficienti razionali in e^{-t}.

Detto $f(x)$ l'integrale della prima, e $\psi(t)$ quello della seconda, la formula di trasformazione è della forma

(b) $$\psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int e^{xt} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

l'integrale essendo preso lungo una linea convenientemente scelta.

Il grado m dei coefficienti della prima dà l'ordine della seconda; l'ordine della prima dà il grado in e^{-t} dei coefficienti della seconda.

Se dunque l'equazione alle differenze è del prim'ordine, l'equazione differenziale lineare è dine p, a coefficienti razionali di primo grado.

In questo caso l'espressione (a) di $f(x)$ dipende da p parametri, i cui logaritmi sono i punti singolari dell'equazione differenziale. Rispetto a ciascuno di questi, la $f(x)$ soddisfa ad una equazione differenziale lineare (ipergeometrica del POCHHAMMER) a coefficienti razionali e dell'ordine p. Rispetto a due o più parametri, essa soddisfa ad equazioni a derivate parziali simultanee, d'ordine inferiore a p, e a coefficienti razionali.

dell'ordine m a coefficienti di primo grado in e^{-t} (equazione del GOURSAT facendo $e^{-t}=z$).

In questo caso l'espressione (b) dipende da m parametri [poli della $f(x)$]. Rispetto a ciascuno di questi, la $\psi(t)$ soddisfa ad una equazione alle differenze finite, lineare e dell'ordine m. Rispetto a due o più parametri, essa soddisfa ad equazioni alle differenze finite parziali simultanee, a coefficienti razionali nei parametri stessi.

N o t a. Al § 8 del presente lavoro è stato enunciato un modo di tendere a zero della funzione $\Gamma(x)$ quando x tende all'infinito nella direzione dell'asse immaginario. Quell'asserto si può dimostrare semplicemente come segue.

Pongasi

$$F(x)=\frac{1}{\Gamma(x)}, \qquad (x=\xi+i\,\eta, \quad \xi>0).$$

Si ha:

$$F(x)=e^{cx}\,x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}},$$

dove c è una nota costante; onde si ottiene facilmente

$$\frac{F(\xi+i\,\eta)}{F(\xi)}=e^{i\eta}\left(1+\frac{i\,\eta}{\xi}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{i\,\eta}{n+\xi}\right)e^{-\frac{\eta i}{n}},$$

e prendendo i valori assoluti:

$$\left|\frac{F(\xi+i\eta)}{F(\xi)}\right|^2=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{\eta^2}{(n+\xi)^2}\right);$$

si indichi questo prodotto assolutamente convergente con $P(\eta)$.

Si ha pure l'altro sviluppo noto:

$$\operatorname{senh} \pi \eta = \pi \eta \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\eta^2}{n^2}\right),$$

onde

$$\frac{\pi P(\eta)}{\operatorname{senh} \pi \eta} = \frac{1}{\eta \{1 + \eta^2\} \{1 + (\eta^2/4)\} \dots \{1 + [\eta^2/(m-1)^2]\}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 + [\eta^2/(n+\xi)^2]}{1 + [\eta^2/(n+m)^2]} .$$

Se ora m è il massimo intero contenuto in ξ, ognuna delle frazioni sotto il segno Π sarà minore o eguale all'unità, e quindi per $\eta \to \pm \infty$, $P(\eta)$ andrà all'infinito d'ordine inferiore od eguale a

$$\frac{\operatorname{senh} \pi \eta}{\eta^{2m-1}} ;$$

perciò $\Gamma(\xi + i\eta)$ andrà a zero di ordine inferiore od eguale a $\bar{\eta}^{\,m-\frac{1}{2}} e^{-\pi \bar{\eta}/2}$ dove $\bar{\eta}$ indica il valore assoluto di η. Ma siccome possiamo anche scrivere

$$\frac{\pi P(\eta)}{\operatorname{senh} \pi \eta} = \frac{1}{\eta (1 + \eta^2) \dots (1 + (\eta^2/m^2))} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 + [\eta^2/(n+\xi)^2]}{1 + [\eta^2/(n+m+1)^2]} ,$$

dove sotto il segno Π ogni fattore è maggiore dell'unità, $P(\eta)$ sarà infinito d'ordine eguale o superiore a

$$\frac{\eta^{2m+2}}{\operatorname{senh} \pi \eta} ,$$

e perciò $\Gamma(\xi + \eta)$ andrà a zero di ordine eguale o superiore a $\bar{\eta}^{\,m+\frac{1}{2}} e^{-\pi \bar{\eta}/2}$. L'ordine d'infinitesimo di $\Gamma(x)$ per $\bar{\eta} \to \infty$ è dunque dato effettivamente da

$$\eta^{m+\varepsilon} e^{-\pi\eta/2} ,$$

dove ε è compreso fra $-1/2$ e $+1/2$.