SALVATORE PINCHERLE

Un teorema sulle frazioni continue

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Serie 4, Vol. **7** (1891), p. 604–607

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 1, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 240–245

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_1_240>

9 [58].

Un teorema sulle frazioni continue.

Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali (Roma); (4) **7**$_1$, 604-607 (1891).

Scopo della presente Nota è di esporre un metodo che permette di esprimere il valore di una frazione continua

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{c_1\, a_2}{b_2 + \cfrac{c_2\, a_3}{b_3 + \ddots}}}$$

mediante il rapporto di due integrali definiti, quando le a_n, b_n, c_n sono polinomi razionali interi e dello stesso grado rispetto al numero d'ordine n.

1. — Verrà indicata col simbolo Λ l'espressione differenziale lineare

$$\sum_{k=0}^{m} (a_k\, t^2 + b_k\, t - c_k)\, t^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k},$$

dove a_m è essenzialmente diverso da zero. L'equazione

$$\Lambda\, \varphi = 0 \tag{1}$$

ammette come singolarità i punti $t = 0$, $t = \infty$ ed inoltre le radici α_1, α_2 dell'equazione

$$a_m\, t^2 + b_m\, t - c_m = 0\,; \tag{2}$$

per evitare una digressione escluderò, in questa breve Nota, il caso speciale in cui è $|\alpha_1| = |\alpha_2|$, supponendo $|\alpha_1| > |\alpha_2|$, ed il caso, pure speciale, in cui le equazioni determinanti relative ai punti singolari $t = \alpha_1$, $t = \alpha_2$ hanno tutte le loro radici intere. Sia dunque ϱ_1 la radice non intera dell'equazione determinante relativa al punto α_1, e φ_1 l'integrale particolare della (1) che, secondo il senso adottato dal FUCHS, *appartiene all'esponente* ϱ_1 nell'intorno del punto α_1; ϱ_2 e φ_2 abbiano lo stesso significato relativamente al punto α_2.

2. — Non si potrà generalmente soddisfare all'equazione omogenea (1) mediante uno sviluppo in serie di potenze intere e positive della variabile t:

$$\varphi(t) = p_\mu t^\mu + p_{\mu+1} t^{\mu+1} + p_{\mu+2} t^{\mu+2} + \dots, \tag{3}$$

ma invece si potrà soddisfare mediante un tale sviluppo all'equazione non omogenea:

$$\varDelta \varphi = t^\mu (e\, t + f) \tag{4}$$

dove e ed f sono costanti qualunque. I coefficienti p_n saranno allora legati dall'equazione ricorrente a tre termini, valida da $n = \mu$ ad $n = \infty$,

$$c(n)\, p_{n+2} = b(n)\, p_{n+1} + a(n)\, p_n, \tag{5}$$

dove si è posto:

$$a(n) = a_m\, n(n-1)\dots(n-m+1) + \\ + a_{m-1}\, n(n-1)\dots(n-m+2) + \dots + a_1 n + a_0,$$

$$b(n) = b_m (n+1) n \dots (n-m+2) + \\ + b_{m-1}(n+1) n \dots (n-m+3) + \dots + b_1 (n+1) + b_0,$$

$$c(n) = c_m (n+2)(n+1)\dots(n-m+3) + \\ + c_{m-1}(n+2)(n+1)\dots(n-m+4) + \dots + c_1(n+2) + c_0;$$

essi coefficienti sono determinati dalla (5) in funzione delle costanti

e ed f, mediante le relazioni iniziali

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} & c(\mu-2)\,p_\mu = -f\,, \\ & c(\mu-1)\,p_{\mu+1} - b(\mu)\,p_\mu = -e\,. \end{aligned}\right.$$

Essi si possono ancora determinare in funzione dei valori arbitrari $p_{\mu-1}, p_{\mu-2}$, ammettendo la (5) valida anche per $n=\mu-1$, $n=\mu-2$; queste arbitrarie sono legate alle e, f dalle relazioni:

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} & b(\mu-2)\,p_{\mu-1} + a(\mu-2)\,p_{\mu-2} = -f\,, \\ & a(\mu-1)\,p_{\mu-1} = -e\,. \end{aligned}\right.$$

Lo sviluppo (3) è convergente entro un cerchio di centro $t=0$ e raggio uguale a $|\alpha_2|$ ed eccezionalmente a $|\alpha_1|$, come risulta dai principi generali della teoria delle equazioni lineari; è noto anzi che è $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{p_{n+1}} = \alpha_2$, ed eccezionalmente $=\alpha_1$.

3. — In seguito all'ipotesi che a_m è diverso da zero, qualunque integrale dell'equazione (1) avrà per $t=\infty$ un ordine d'infinito positivo, nullo o negativo, ma finito. Perciò si potrà sempre determinare un numero intero μ tale che per ogni integrale $\varphi(t)$ dell'equazione (1) il prodotto $\varphi(t)\,t^{2-\mu}$ sia nullo per $t=\infty$.

Descriviamo ora una linea l_1 che, partendo dall'infinito secondo la direzione che dall'origine va al punto α_1, circondi questo punto α_1 e torni poi all'infinito secondo la stessa direzione. Consideriamo poi l'espressione

$$(8)\qquad \psi_1(t) = \int_{(l_1)} \frac{\varphi_1(z)\,dz}{z^\mu\,(z-t)}\,.$$

Quest'integrale ha un significato per ogni t non posto sulla linea d'integrazione; esso è sviluppabile in serie di potenze di t della forma (3) convergente entro un cerchio di centro $t=0$ e di raggio inferiore a $|\alpha_1|$ per tanto poco quanto si vuole, i cui coefficienti sono dati da

$$(9)\qquad p_n = \int_{(l_2)} \frac{\varphi_1(z)\,dz}{z^{n+1}}\,.$$

Infine, si verifica con un calcolo semplice che l'integrale $\psi_1(t)$ soddisfa ad un'equazione della forma (4), nella quale e, f sono date dalle (6), od anche dalle (7) nelle quali sia posto

$$p_{\mu-2} = \int_{(l_1)} \frac{\varphi(z)\, dz}{z^{\mu-1}}, \qquad p_{\mu-1} = \int_{(l_1)} \frac{\varphi(z)\, dz}{z^{\mu}}.$$

Da ciò, e dall'osservazione fatta alla fine del § 2 risulta che lo sviluppo $\psi(t) = \Sigma\, p_n t^n$ converge entro il cerchio di centro $t = 0$ e raggio $|\alpha_1|$, ed anzi si ha $\lim \dfrac{p_n}{p_{n+1}} = \alpha_1$.

Si noti che qualora fosse $\varrho_1 > -1$ alla linea l_1 si potrebbe sostituire, in ciò che precede, il prolungamento da α_1 fino all'infinito del raggio che dall'origine va al punto α_1.

4. — Le stesse considerazioni si possono ripetere relativamente al punto α_2; si può cioè descrivere una linea l_2 che, provenendo dall'infinito nella direzione della congiungente i punti $t = 0$, $t = \alpha_2$, circondi il punto α_2 e torni all'infinito secondo la stessa direzione, senza includere il punto α_1. Si forma poi

$$\psi_2(t) = \int_{(l_2)} \frac{\varphi_2(z)\, dz}{z^{\mu}(z - t)} = \sum_{n=\mu}^{\infty} p'_n\, t^n ;$$

le stesse considerazioni del § precedente permettono di concludere che quest'espressione soddisfa ad un'equazione della forma (4), e che $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p'_n}{p'_{n+1}} = \alpha_2$. Da ciò segue che il rapporto p_n/p'_n tende a zero per $n \to \infty$.

5. — Riprendiamo ora l'equazione ricorrente (o alle differenze)

$$c(n)\, F(n+2) = b(n)\, F(n+1) + a(n)\, F(n).$$

Di questa equazione abbiamo con p_n e p'_n due integrali linearmente indipendenti, per cui ogni altro integrale avrà la forma

$$F(n) = h\, p_n + h'\, p'_n.$$

e per ogni coppia di valori h, h', escluso il valore zero per h', si avrà

(10) $$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{F(n)} = 0 .$$

In particolare determiniamo due integrali P_n e P'_n della (5) mediante le condizioni iniziali

$$P_{\mu-2} = 1 , \quad P_{\mu-1} = 0 ,$$

$$P'_{\mu-2} = 0 , \quad P'_{\mu-1} = 1 ,$$

i quali saranno linearmente indipendenti; si potrà quindi porre

(11) $$p_n = k\, P_n + k'\, P'_n$$

con

$$\begin{cases} k = p_{\mu-2} = \displaystyle\int_{(l_1)} \varphi_1(z)\, z^{1-\mu}\, dz , \\ k' = p_{\mu-1} = \displaystyle\int_{(l_1)} \varphi_1(z)\, z^{-\mu}\, dz . \end{cases}$$

6. — Consideriamo ora la frazione continua

$$\sigma = \cfrac{\dfrac{a(\mu-2)}{c(\mu-2)}}{\dfrac{b(\mu-2)}{c(\mu-2)} + \cfrac{\dfrac{a(\mu-1)}{c(\mu-1)}}{\dfrac{b(\mu-1)}{c(\mu-1)} + \ddots}} ;$$

i numeratori delle sue ridotte sono due integrali dell'equazione (5) i quali, come è facile verificare, coincidono rispettivamente con P_n e P'_n.

Onde segue che il valore della frazione continua σ coincide col limite (se esiste) di $\dfrac{P_n}{P'_n}$ per $n = \infty$. E questo limite esiste non solo, ma è di semplicissima determinazione, perchè dalla (11) risulta

$$\frac{p_n}{P'_n} = k \frac{P_n}{P'_n} + k'$$

e passando al limite, tenuto conto della (10), viene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P'_n} = -\frac{k'}{k}\,.$$

Ponendo per k e k' i loro valori, e facendo sulla σ una evidente trasformazione, viene infine la formula:

$$\text{(12)}\qquad \cfrac{a(\mu-2)}{b(\mu-2)+\cfrac{a(\mu-1)\,c(\mu-2)}{b(\mu-1)+\cfrac{a(\mu)\,c(\mu-1)}{b(\mu)+\ddots}}} = -\frac{\displaystyle\int_{(l_1)} \varphi_1(z)\, z^{-\mu}\, dz}{\displaystyle\int_{(l_1)} \varphi_1(z)\, z^{1-\mu}\, dz}\,.$$

Tale è la formula che volevamo stabilire. Essa permette di esprimere il valore di una frazione continua, le cui frazioni parziali sono della forma $\dfrac{c(n-1)\,a(n)}{b(n)}$, dove a, b, c, sono polinomi interi dello stesso grado n, mediante il quoziente di due integrali definiti; e si è visto il modo di determinare la funzione φ_1 sotto il segno ed il cammino d'integrazione.

Inversamente la formula (12) permette il calcolo del quoziente dei due integrali definiti per mezzo dello sviluppo in frazione continua, coll'approssimazione di cui è suscettibile questo genere di sviluppo.

Le note formule di Gauss, che dànno lo sviluppo in frazione continua del quoziente di due funzioni ipergeometriche sono contenute come caso particolare nella formula (12).