Salvatore Pincherle

Contributo alla integrazione delle equazioni differenziali lineari mediante integrali definiti

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Serie 5, Vol. **2** (1892), p. 523–546

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 1, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 246–272

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_1_246>

10 [63].

Contributo alla integrazione delle equazioni differenziali lineari mediante integrali definiti. (*)

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna;
(5) **2**, 523-546 (1892).

In vari lavori pubblicati tanto fra le Memorie di questa illustre Accademia quanto in altri Periodici [1], ho trovato opportuno di considerare ogni espressione in forma di integrale definito,

$$J(x) = \int_{\lambda} A(t, x) \, \varphi(t) \, dt \,,$$

come un'*operazione funzionale* eseguita sulla funzione $\varphi(t)$, operazione il cui risultato è una funzione del parametro x. Ho chiamato anche questa operazione una *trasformazione* della $\varphi(t)$ nella $J(x)$ e di tale trasformazione $A(t, x)$ veniva detta la *funzione caratteristica.* Il presente lavoro ha per oggetto di mostrare come questo concetto si possa applicare nello studio dell'integrazione delle equazioni differenziali lineari mediante integrali definiti; più precisamemente, di mostrare come, assumendo per funzione caratteristica

$$(t - x)^{\varrho} \qquad \text{oppure} \qquad G^{\varrho}(t, x),$$

dove $G(t, x)$ è una funzione razionale intera, la trasformazione funzionale applicata all'integrale di un'equazione differenziale lineare regolare e a coefficienti razionali lo trasformi nell'integrale di una

(*) Memoria letta alla R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna nella Sessione del 21 Febbraio 1892.

(1) V., in particolare, Memorie dell'Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, S. IV, T VII, 1886 e S. IV, T. VIII, 1887; Acta Mathematica, T. VII e X.

nuova equazione differenziale lineare, essa pure regolare ed a coefficienti razionali. Giova notare che mentre la seconda di queste trasformazioni è, a mio credere, affatto nuova, la prima di esse è stata usata dal Sig. POCHHAMMER nei suoi lavori sulla generalizzazione delle equazioni ipergeometriche ([1]) e gli ha servito in particolare a trovare l'espressione generale, in forma di integrale definito multiplo, dell'integrale della equazione ipergeometrica generalizzata a due punti singolari del sig. GOURSAT ([2]). In un altro e più recente lavoro ([3]) il sig. POCHHAMMER ha fatto uno studio interessante delle espressioni della forma

$$\int_a^b (t-x)^\varrho \varphi(t)\, dt,$$

dove $\varphi(t)$ è, in generale, una funzione multiforme qualsivoglia, senza aggiungere però ipotesi speciali sulla natura di questa funzione. Il metodo che egli segue, applicato al caso che $\varphi(t)$ soddisfi ad una equazione lineare, permette, come dimostro nel primo Capitolo del presente lavoro, di verificare *a priori* che quella espressione, estesa ad una conveniente linea d'integrazione, è alla sua volta integrale di un'equazione dello stesso genere che si può dire la *trasformata* della prima. Nel secondo Capitolo studio alcuni speciali contorni di integrazione, per i quali l'espressione precedente gode di proprietà che la riavvicinano ai periodi degli integrali abeliani. Nel terzo Capitolo si determina, con calcolo semplice, la forma effettiva dell'equazione differenziale trasformata, mentre nel quarto si considerano sistemi di equazioni della stessa *specie* e fra questi, sistemi ricorrenti di equazioni. Infine il quinto Capitolo ha per oggetto di estendere i risultati precedentemente ottenuti alle trasformazioni funzionali di cui $G^\varrho(t, x)$ è la funzione caratteristica. Quest'ultima parte si può anche riguardare come una estensione del noto teorema dell'HERMITE circa la differenza dei valori che un integrale defi-

---

([1]) *Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihen u. s. w.*, Crelle, T. CII, pag. 76.

([2]) *Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur,* Ann. de l'École Normale, S. II, T. XII, pag. 261.

([3]) *Ueber eine Klasse von Functionen einer complexen Variabeln, welche die Form bestimmter Integrale haben,* Crelle, T. CIV, pag. 151.

nito prende dalle due parti di un taglio [1] anche in un caso in cui la funzione sotto il segno d'integrale è uniforme.

I.

1. — Abbiasi l'equazione differenziale lineare dell'ordine p, omogenea, regolare nel senso del FUCHS ed a coefficienti razionali,

$$P_0 \frac{d^p \varphi}{dt^p} + P_1 \frac{d^{p-1} \varphi}{dt^{p-1}} + \dots + P_p \varphi = 0, \tag{1}$$

dove

$$P_0 = (t - \alpha_1)(t - \alpha_2) \dots (t - \alpha_r). \tag{2}$$

I punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ed il punto $t = \infty$ sono i punti singolari dell'equazione (1).

Faremo l'ipotesi che le radici dell'equazione determinante relativa ad ogni punto α_h, $(h = 1, 2, \dots, r)$, siano tali che la loro parte reale sia maggiore di -1; ne risulta che, essendo φ un integrale particolare qualunque dell'equazione, l'espressione

$$\int \varphi(t)\, dt ,$$

estesa ad un cerchio di centro α_h e di raggio piccolissimo, andrà a zero col raggio del cerchio. Questa ipotesi non costituisce però una restrizione essenziale, perchè colla trasformazione

$$\varphi = P_0^g \psi ,$$

dove g è un esponente intero convenientemente scelto, l'equazione (1) si può sempre trasformare in un'altra che abbia la proprietà indicata.

Si indichi con l una linea chiusa qualsivoglia di lunghezza finita, ma che non passi per alcuno dei punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$; se $\varphi(t)$ è un integrale particolare qualunque dell'equazione (1), il quale si intenda continuato analiticamente lungo la linea l, è noto che

---

[1] *Sur quelques points de la théorie des fonctions,* Acta Soc. Scientiarum Fennicæ, T. XII.

l'espressione

$$\int_l \varphi(t)\,(t-x)^\varrho\,dt \tag{3}$$

(dove l'integrazione s'intende estesa alla linea l percorsa in un senso determinato), la quale si può riguardare come una *trasformazione funzionale* della $\varphi(t)$, rappresenta in tutto il piano x, all'infuori dei punti della linea l, una funzione analitica. Fatto inoltre un taglio che da un punto di questa linea vada fino all'infinito, la (3) rappresenta nel piano così tagliato, ed esclusa l'area contenuta dalla linea l, un ramo ad un valore di una funzione analitica monogena, secondo il concetto del WEIERSTRASS. Nell'espressione (3) supporremo sempre che la parte reale del numero ϱ sia maggiore di -1.

2. — Qualunque sia la linea l chiusa di cui al § precedente, essa si potrà sempre scomporre in un numero finito di contorni elementari (*lacets*) relativi ai punti singolari dell'equazione (1), e l'integrale (3) corrispondente sarà la somma di integrali estesi a tali contorni. Ne viene che basta studiare l'integrale (3) assumendo come linea l uno di questi contorni elementari, ad esempio quello relativo al punto singolare α_h. Questo contorno è formato nel modo usuale:

1⁰) di un segmento $t_0\,t_h$ (rettilineo o curvilineo, ma senza nodi e che non passa per alcuno degli altri punti singolari α_i) che partendo da un punto t_0 qualunque non singolare del piano, termini ad un punto t_h vicinissimo ad α_h;

2⁰) di una circonferenza avente il centro in α_h ed il raggio piccolissimo $t_h\,\alpha_h$, la quale si intende percorsa in senso positivo;

3⁰) del segmento $t_h t_0$.

Essendo

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \dots,\ \varphi_p(t) \tag{4}$$

un sistema fondamentale d'integrali nell'intorno del punto t_0, intenderemo che nell'espressione (3) si parta dal punto t_0 ponendo per la funzione $\varphi(t)$ sotto il segno uno qualunque di questi integrali, per esempio $\varphi_k(t)$, il quale si continuerà analiticamente lungo tutta la linea l. Dopo percorsa questa linea, ci si ritroverà nel punto t_0 con una funzione $\varphi(t)$ sotto il segno che sarà una determinata combinazione lineare, omogenea ed a coefficienti costanti delle (4); sia essa $\overline{\varphi}_k(t)$.

3. — Siano x, x' due valori del parametro x rappresentati da punti vicinissimi alla linea l d'integrazione, ma l'uno da una parte, l'altro dall'altra di questa linea. Posto per brevità

$$\underset{l}{f}(x) = \int_l \varphi_k(t)\,(t-x)^\varrho\, dt\,,$$

ci proponiamo di esprimere la differenza fra $f(x')$ ed $f(x)$. A questo scopo ci gioveremo di un ragionamento analogo a quello che si trova nel citato lavoro del sig. POCHHAMMER (¹). Incominceremo pertanto a cercare la differenza dei valori dell'espressione (3) estesa a due contorni elementari l, l' aventi il medesimo estremo t_0, relativi allo stesso punto α_h e comprendenti fra loro il punto x, ma nessun punto singolare α_i dell'equazione (1). Sia $t_0\, m\, t_h$ il segmento fra t_0 e t_h per il contorno l, $t_0\, n\, t_h$ per il contorno l'.

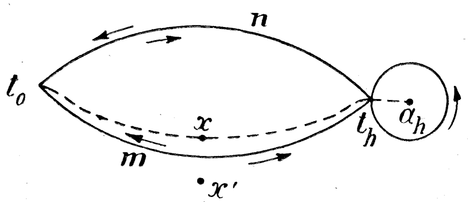

Fig. 1

L'integrale esteso al piccolo cerchio α_h essendo nullo per l'ipotesi fatta al § 1, l'integrale esteso alla curva l si riduce a

$$\underset{l}{f}(x) = \int_{t_0 m t_h} \varphi_k(t)\,(t-x)^\varrho\, dt + \int_{t_h m t_0} \overline{\varphi}_k(t)\,(t-x)^\varrho\, dt\,;$$

invece quando si percorre la linea l', mentre in t_h la funzione $\varphi_k(t)$ giunge collo stesso valore che percorrendo la linea l, il fattore $(t-x)^\varrho$ vi giunge moltiplicato per $e^{-2\pi i\varrho}$, e perciò si avrà

$$\underset{l'}{f}(x) = \int_{t_0 n t_h} \varphi_k(t)\,(t-x)^\varrho\, dt + e^{-2\pi i\varrho} \int_{t_h n t_0} \overline{\varphi}_k(t)\,(t-x)^\varrho\, dt\,.$$

Ora facendo la differenza di queste espressioni si trova senza difficoltà, mediante il citato ragionamento del POCHHAMMER, che la

(¹) *Ueber eine Klasse von Functionen u. s. w.*, Crelle, T. CIV, pag. 153.

differenza dei primi due integrali dei secondi membri è

$$(1-e^{-2\pi i \varrho})\int_{x}^{a_h} \varphi_k(t)\,(t-x)^{\varrho}\,dt\,,$$

mentre la differenza dei secondi è

$$(1-e^{-2\pi i \varrho})\int_{a_h}^{x} \overline{\varphi}_k(t)\,(t-x)^{\varrho}\,dt\,;$$

donde

$$\int_{l}(x)-\int_{l'}(x)=(1-e^{-2\pi i \varrho})\int_{x}^{a_h}\{\varphi_k(t)-\overline{\varphi}_k(t)\}\,(t-x)^{\varrho}\,dt\,.$$

Ciò premesso, riprendiamo i due punti x ed x' vicinissimi al segmento $t_0\,m\,t_h$, l'uno da una parte e l'altro dall'altra di esso; descriviamo poi la linea l' per modo che x rimanga fra $t_0\,m\,t_h$ e $t_0\,n\,t_h$, mentre x' è fuori dell'area racchiusa da queste. Si ha allora, poichè fra l ed l' non cade nè x' nè alcun punto singolare della (1),

$$\int_{l}(x')-\int_{l'}(x')=0\,,$$

mentre, x ed x' essendo da una stessa parte di l', si ha

$$\int_{l'}(x')-\int_{l'}(x)=\varepsilon\,,$$

essendo ε una quantità che tende a zero con $|x'-x|$. Dalla combinazione di queste differenze ricaviamo

$$(5)\qquad \int_{l}(x')-\int_{l}(x)=(1-e^{-2\pi i \varrho})\int_{x}^{a_h}\{\overline{\varphi}_k(t)-\varphi_k(t)\}\,(t-x)^{\varrho}\,dt+\varepsilon\,.$$

4. — Della equazione differenziale data (1) si conosce il gruppo; ne viene che si conoscono i coefficienti della sostituzione che si

opera sul sistema fondamentale (4) dopo che la variabile ha percorso il contorno elementare l. Sia dunque

$$\overline{\varphi}_k(t) = c_{k1}\,\varphi_1 + c_{k2}\,\varphi_2 + \dots + c_{kp}\,\varphi_p\,, \qquad (k = 1, 2, \dots, p);$$

ne risulta che la (5) prende la forma

$$\int_l (x') - \int_l (x) = \sum_{s=1}^{p} C_{ks} \int_x^{a_h} \varphi_s(t)\,(t-x)^\varrho\,\mathrm{d}t + \varepsilon\,, \tag{6}$$

dove

$$C_{ks} = \begin{cases} (1 - e^{-2\pi i\varrho})\, c_{ks} & \text{per} \quad s \gtrless k\,, \\ (1 - e^{-2\pi i\varrho})\,(c_{kk} - 1) & \text{per} \quad s = k\,. \end{cases}$$

5. — Siamo ora in grado di riconoscere quale è la modificazione che subisce la espressione (3) quando la variabile x descrive una linea chiusa qualunque nel suo piano. Se la linea non attraversa nè circonda la linea l, la funzione riprende lo stesso valore quando x torna al punto di partenza. Se la linea chiusa descritta dalla x circonda la linea l, si vede senza difficoltà che la funzione si ritrova moltiplicata per $e^{2\pi i\varrho}$ (¹). Infine, se la linea attraversa la linea l, abbiamo visto dal § precedente che al valore della funzione si aggiunge un'espressione della forma

$$\sum_{h=1}^{p} C_k \int_x^{a_i} \varphi_k(t)\,(t-x)^\varrho\,\mathrm{d}t\,.$$

Da ciò la conseguenza che lo studio dell'integrale (3) porta necessariamente a quello degli rp integrali

$$\eta_{hk}(x) = \int_x^{a_h} \varphi_k(t)\,(t-x)^\varrho\,\mathrm{d}t\,, \qquad (h = 1, 2, \dots, r;\ k = 1, 2, \dots, p); \tag{7}$$

(¹) POCHHAMMER, loc. cit., pag. 159.

la linea d'integrazione essendo un segmento (rettilineo o curvilineo, ed in quest'ultimo caso senza nodi) che non passa per alcun punto singolare α_i diverso da α_h.

6. — Venendo dunque a considerare gli integrali (7), indicheremo uno di essi genericamente con $\eta(x)$. Esso rappresenta una funzione analitica della x di cui il lavoro più volte citato ci permette di riconoscere il modo di comportarsi quando la variabile x descrive un contorno chiuso qualsiasi nel suo piano. Infatti [1] se il contorno descritto da x racchiude un punto singolare α_i diverso da α_h, l'integrale si aumenta per una espressione della forma

$$\int_x^{\alpha_i} \{\varphi(t) - \overline{\overline{\varphi}}(t)\} (t - x)^\varrho \, dt,$$

dove $\overline{\overline{\varphi}}(t)$ è ciò che diviene $\varphi(t)$ dopo un giro della variabile t intorno ad α_i; mentre se il contorno descritto da x include il punto α_h la $\eta(x)$ si trasforma nella espressione

$$e^{2\pi i\varrho} \int_x^{\alpha_h} \overline{\varphi}(t) (t - x)^\varrho \, dt,$$

essendo $\overline{\varphi}(t)$ ciò che diviene $\varphi(t)$ dopo un giro della variabile t intorno al punto α_h. Combinando questi due risultati, si ha il modo di comportarsi di $\eta(x)$ per qualunque contorno chiuso descritto da x.

Ma $\overline{\varphi}(t)$, $\overline{\overline{\varphi}}(t)$, ... sono espressioni lineari a coefficienti costanti di $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$; onde segue che ogni $\eta_{hk}(x)$ è una funzione della x tale che quando questa variabile descrive una linea chiusa, essa si trasforma in una funzione lineare omogenea a coefficienti costanti delle rp funzioni $\eta_{hk}(x)$. Da ciò il

Teorema. *Ogni espressione*

$$\eta(x) = \int_x^{\alpha_h} \varphi(t) (t - x)^\varrho \, dt,$$

(1) POCHHAMMER, loc. cit., pag. 161.

dove $\varphi(t)$ *è un integrale particolare qualunque dell'equazione differenziale lineare* (1) *d'ordine* p, *di cui* α_h, $(h = 1, 2, \ldots, r)$ *sono i punti singolari, è integrale particolare di una equazione differenziale lineare omogenea in* x *a coefficienti uniformi, di un ordine non maggiore di* rp, *ma riducibile, come si vedrà in seguito, ad un ordine notevolmente inferiore. Questa equazione si dirà* t r a s f o r m a t a *dalla* (1) *mediante la trasformazione funzionale* (3).

Da questa proposizione, e dal modo di comportarsi dell'integrale definito (3) quando la variabile x descrive un giro qualunque nel suo piano (§ **5**) risulta che l'integrale (3) dopo un giro qualunque compiuto dalla x riprende lo stesso valore moltiplicato per una costante ed aumentato di una funzione lineare delle $\eta(x)$ a coefficienti costanti; da cui risulta subito il

T e o r e m a. *Ogni espressione*

$$\int_l \varphi(t)(t-x)^\varrho \, dt,$$

dove l *è una linea chiusa del piano* t, *è integrale di un'equazione lineare non omogenea dell'ordine* rp *al più, il cui primo membro coincide col primo membro dell'equazione differenziale lineare omogenea trasformata della* (1).

7. — Le considerazioni dei §§ **2-5**, e segnatamente le espressioni date al § **4** per la C_{ks}, permettono di dedurre immediatamente dalle sostituzioni subite dal sistema d'integrali $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ quando la variabile t descrive un contorno chiuso, la sostituzione subita dalle $\eta_{hk}(x)$ quando la x percorre lo stesso contorno. In altre parole *si può, dal gruppo dell'equazione lineare* (1), *dedurre il gruppo dell'equazione lineare trasformata.*

Inoltre nell'intorno di ogni punto x diverso da uno dei punti α_h o da $x = \infty$ le funzioni $\eta(x)$ sono ad un valore, finite e continue; onde segue che *l'equazione lineare trasformata ha per soli punti singolari i punti* $x = \alpha_h$ *ed* $x = \infty$.

II.

8. — Preso nel piano della variabile t un punto qualunque non singolare t_0, si descrivano gli r contorni elementari che partendo da t_0, si riferiscono ai vari punti singolari dell'equazione (1), e sia

l_h il contorno elementare relativo ad α_h. Qualunque linea λ che partendo da t_0 vi ritorna, si può sempre considerare come formata da una successione di contorni elementari percorsi in ordine determinato, ognuno di essi potendo anche essere percorso più volte. Si potrà dunque porre

$$(8) \qquad \lambda = \pm\, m_1\, l_1 \pm m_2\, l_2 + \dots ,$$

essendo $m_1, m_2, \dots$ numeri interi positivi, e converrà anche scrivere:

$$(8') \quad \lambda = \pm (l^1 + l^2 + \dots + l^{m_1}) \pm (l^{m_1+1} + l^{m_1+2} + \dots + l^{m_1+m_2}) + \dots ,$$

essendo

$$l^1 = l^2 = \dots = l^{m_1} = l_1 , \quad l^{m_1+1} = l^{m_1+2} = l^{m_1+2} = \dots = l^{m_1+m_2} = l_2 , \dots .$$

Nelle (8) ed (8′), si prenderà il segno $+$ oppure $-$ secondo che il contorno corrispondente è percorso in senso positivo o negativo; è da notare che l'ordine di successione dei contorni elementari in queste due formole non si può alterare. Nella linea λ si riguarderanno come ammissibili tutte quelle deformazioni (*deformazioni continue*) per le quali, tenuta ferma l'origine t_0, nessuna parte della linea stessa viene ad oltrepassare qualche punto singolare della funzione $\varphi(t)$.

Consideriamo ora l'integrale

$$\int_\lambda \varphi(t)\,(t-x)^\varrho\, \mathrm{d}t ,$$

in cui x è esterno alla linea d'integrazione e dove $\varphi(t)$ è un integrale particolare determinato per $t = t_0$ e che si continua analiticamente lungo λ; si indichi con $\varphi^s(t)$ la determinazione che conviene a $\varphi(t)$ quando la variabile t ritorna in t_0 dopo percorsa la parte l^{s-1} della linea λ: allora l'integrale definito precedente si scrive

$$\Sigma_s \int_{l^s} \varphi_s(t)\,(t-x)^\varrho\, \mathrm{d}t ,$$

e questo alla sua volta, per essere nullo l'integrale esteso ad un piccolo cerchio intorno ad α_i secondo l'ipotesi fatta al § 1, si può ridurre a

$$\Sigma_s \int_{t_0}^{\alpha_i} \{\varphi_s(t) - \varphi_{s+1}(t)\} (t-x)^\varrho \, dt . \tag{9}$$

9. — Si supponga ora la linea λ dotata della proprietà che quando la variabile t, partita da t_0, ha percorso l'intera linea, la determinazione dell'integrale nel punto t_0 di arrivo sia la stessa che si è assunta al punto di partenza, senza che però la linea λ sia riducibile ad un punto per deformazione continua. In questa ipotesi, si congiunga il punto x con t_0 mediante un segmento (rettilineo, o curvilineo senza nodi) che non incontri in alcun punto il contorno di λ, e si consideri la linea formata da

$$\overline{x\,t_0} + l^1 + \overline{t_0\,x} + \overline{x\,t_0} + l^2 + \overline{t_0\,x} + \dots .$$

L'integrale esteso a questa nuova linea è dunque

$$\Sigma_s \left[\int_x^{t_0} \varphi_s(t)(t-x)^\varrho \, dt + \int_{t_0}^{\alpha_i} \{\varphi_s(t) - \varphi_{s+1}(t)\} (t-x)^\varrho \, dt + \right. \tag{10}$$
$$\left. + \int_{t_0}^{x} \varphi_{s+1}(t)(t-x)^\varrho \, dt \right] .$$

Ma l'ultimo termine di ogni parentesi quadra della sommatoria distrugge il primo termine della parentesi seguente, ed il primo della prima parentesi distrugge l'ultimo dell'ultima per l'ipotesi fatta sulla linea λ; talchè il valore dell'espressione (10) non differisce da quello dell'integrale esteso alla linea λ. Ma la (10) si può scrivere immediatamente

$$\Sigma_s \int_x^{\alpha_i} \{\varphi_s(t) - \varphi_{s+1}(t)\} (t-x)^\varrho \, dt ,$$

e sotto questa forma si vede che essa è una combinazione lineare delle $\eta_{hk}(x)$; onde questa proprietà vale per l'integrale esteso a λ, e si ha:

Se esiste una linea chiusa non riducibile per deformazione continua ad un punto, tale che un integrale particolare $\varphi(t)$ *della* (1) *riprenda al punto di partenza il suo valore iniziale dopo che la variabile ha percorsa l'intera linea, l'integrale definito*

$$\int_{\lambda} \varphi(t)\,(t-x)^{\varrho}\, dt\,,$$

è un integrale dell'equazione differenziale lineare trasformata della (1).

10. — Può accadere che per una stessa linea λ più integrali particolari abbiano la proprietà indicata.

Può anzi avvenire in certi casi che esistano linee (non riducibili ad un punto) tali che tutti gl'integrali particolari dell'equazione (1) riprendano lo stesso valore quando la variabile ha percorso la linea stessa. Una tale linea verrà distinta col nome di *ciclo*.

Qualunque punto t_0 del ciclo si può riguardare come suo punto iniziale. Di più, il ciclo si può far passare per qualunque punto non singolare t_0' del piano, poichè basta considerare

$$t_0'\, t_0 + \lambda + t_0\, t_0'\,;$$

questo è di nuovo un ciclo, non sostanzialmente distinto dal precedente.

Ad ogni linea chiusa λ che parta da t_0 e vi ritorni, corrisponde una sostituzione del gruppo dell'equazione lineare (1). Se ad ogni sostituzione del gruppo facciamo corrispondere un foglio della riemanniana [1] dei cui punti l'integrale della (1) è funzione uniforme, potremo dire che la linea λ non è *chiusa* sulla riemanniana, a meno che non sia un ciclo. I cicli esistono dunque ogni qualvolta il gruppo di sostituzioni della (1) contiene una sostituzione uguale (senza però essere riducibile identicamente) all'unità; sia

$$T = S_1^{m_1}\, S_2^{m_2} \ldots S_r^{m_r}\, S_1^{n_1}\, S_2^{n_2} \ldots = 1$$

una tale sostituzione, se

$$S_1\,,\; S_2\,, \ldots ,\; S_r$$

(1) Ad infiniti fogli, però numerabili. Vedasi VIVANTI e POINCARÉ, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. II. 1888.

sono le sostituzioni generatrici del gruppo: ad ogni distinta sostituzione T corrisponde un ciclo e viceversa.

Se due linee λ_1, λ_2 sono cicli, lo è pure la linea $\lambda_1 + \lambda_2$; l'insieme dei cicli, come quello delle sostituzioni T, costituisce dunque un gruppo il quale è evidentemente permutabile. Se vi sono q cicli fra loro indipendenti (nel senso che uno di essi sia riducibile alla somma degli altri) ogni altro ciclo si potrà scrivere

$$m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_q \lambda_q \, ,$$

essendo m_1, $m_2, \dots, m_q$ numeri interi e positivi.

L'esistenza dei cicli è subordinata a quella delle sostituzioni T, di cui la presenza ed il numero servono a dare il carattere (1) al gruppo di sostituzioni dell'equazione (1).

Nel caso di q cicli indipendenti, avremo i qp integrali, estesi ai cicli,

$$\int_{\lambda_i} \varphi_k(t)\,(t-x)^{\varrho}\, dt \, , \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, q \\ k = 1, 2, \dots, p \end{pmatrix}, \tag{11}$$

che saranno, per il § precedente, altrettante soluzioni dell'equazione differenziale delle $\eta_{hk}(x)$.

11. — L'integrale

$$\int_{\lambda} \varphi(t)\, dt$$

esteso ad un ciclo λ si potrebbe chiamare un *periodo* dell'equazione differenziale. Ecco la ragione che giustifica questa denominazione. Se si considera l'integrale definito

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(t)\, dt \tag{12}$$

come funzione del suo limite superiore, esso ci dà una funzione multiforme i cui infiniti valori si possono ottenere aggiungendo ad uno

(1) Cfr. WALTHER DYCK, *Gruppentheoretischen Studien*, Math. Annalen, T. XX.

di essi il valore dell'integrale esteso ad una linea chiusa λ qualunque che parta da t e vi ritorni: valore che sarà in generale funzione di t. Questo valore si ridurrà però ad una costante, qualunque sia l'integrale particolare $\varphi(t)$ sotto il segno, quando la linea λ è un ciclo. Quando dunque per un'equazione lineare (1) esistono dei cicli riducibili a q indipendenti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$, vi sono fra gli infiniti valori di ogni espressione (12) di quelli che differiscono fra loro per costanti della forma

$$m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2 + \ldots + m_q\,\omega_q\,,$$

essendo $m_1, m_2, \ldots, m_q$ numeri interi ed

$$\omega_h = \int_{\lambda_h} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,;$$

fatto analogo alla proprietà dei moduli di periodicità (o periodi) negli integrali abeliani e che legittima il nome di *periodi* proposto per gl'integrali ω_h.

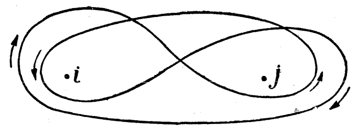

Fig. 2.

Gli integrali (11) considerati nel § precedente sono i periodi dell'equazione differenziale lineare avente per integrale generale $\varphi(t)\,(t-x)^\varrho$ e che si deduce immediatamente dalla (1); questi periodi, come funzioni della x, soddisfano all'equazione lineare trasformata della (1).

12. — Se il gruppo dell'equazione (1) è permutabile, cioè se le sue sostituzioni soddisfano alla relazione

$$S_i\,S_j = S_j\,S_i\,,$$

ne viene immediatamente la sostituzione

$$T: \qquad S_i^{-1}\,S_j^{-1}\,S_i\,S_j = 1\,.$$

Ad ognuna di queste sostituzioni T corrisponde un ciclo, che secondo la (8) si potrà scrivere

$$\lambda = l_j + l_i - l_j - l_i$$

e che è rappresentato dalla figura 2; per ciascuna di queste linee e per ogni integrale particolare $\varphi(t)$ l'espressione (11) darà un integrale della equazione trasformata.

Il caso che l'equazione (1) sia del primo ordine rientra in questo, perchè allora il gruppo dell'equazione è permutabile. Ma in tal caso particolare l'integrazione definita (3) porta, come è facile vedere, alla equazione ipergeometrica generalizzata del POCHHAMMER; allora le curve λ sono quelle dette dal POCHHAMMER stesso *Curven mit doppelte Umlaufe* (1) e considerate pure dal JORDAN (2).

III.

13. — Nei paragrafi precedenti abbiamo dimostrato *a priori* come gli integrali definiti (3), estesi ad una linea che vada da x ad uno dei punti singolari α_i, oppure ad un ciclo (se ne esistono), soddisfano ad una equazione differenziale lineare a coefficienti uniformi in x ed i cui punti singolari sono gli stessi che per l'equazione (1). È facile ora formare effettivamente questa equazione, che vedremo essere dell'ordine r uguale al grado del polinomio P_0, $(r \geqq p)$, e a coefficienti razionali.

A quest'effetto, pongo

$$y(x) = \int_\lambda \varphi(t)\,(t-x)^{\sigma+r-p}\,dt\,, \tag{13}$$

essendo λ un ciclo ed x essendo esterno alla linea d'integrazione. Si escludono per σ i valori interi negativi. L'ipotesi dell'esistenza di un ciclo non ha nulla di restrittivo; infatti noi sappiamo già che l'equazione delle $\eta(x)$ è la stessa dell'equazione dell'integrale (3) esteso ad un ciclo, ed ora trattasi soltanto di determinare l'equazione in via puramente formale.

Dalla (13) si deduce mediante la derivazione applicata h volte rispetto ad x, ed indicando le derivate per mezzo di indici superiori,

$$y^{(h)}(x) =$$

$$= (-1)^h(\sigma+r-p)\dots(\sigma+r-p-h+1)\int_\lambda \varphi(t)\,(t-x)^{\sigma+r-p-h}\,dt;$$

(1) Mathem. Annalen, T. XXXV, pag. 470.

(2) *Cours d'Analyse,* T. III, § 193.

da questa, applicando k volte l'integrazione per parti e notando che per essere λ un ciclo ed x esterno alla linea d'integrazione, la parte ai limiti è nulla, viene:

$$(14) \qquad y^{(h)}(x) = (-1)^{h-k}(\sigma + r - p)\dots$$

$$\dots(\sigma + r - p - h + k + 1)\int_\lambda \varphi^{(k)}(t)\,(t - x)^{\sigma+r-p-h+k}\,dt\,.$$

Ora si osservi che, posto per k intero e positivo

$$\sigma_k = \frac{1}{(\sigma+1)(\sigma+2)\dots(\sigma+k)}\,,$$

ne viene

$$(\sigma + k)\,\sigma_k = \sigma_{k-1}\,,$$

onde segue che il simbolo σ_k si può definire anche per il valore nullo e per un valore intero negativo dell'indice, avendosi

$$\sigma_0 = 1\,,\quad \sigma_{-k} = \sigma(\sigma - 1)\dots(\sigma - k + 1).$$

Mediante questa posizione, la formula (14) vale anche se a k si dànno valori uguali o superiori ad h, e si ottiene così la formula generale:

$$(15) \qquad y^{(h)}(x) = (-1)^k(\sigma + r - p)_k \int_\lambda \varphi^{(h+k)}(t)\,(t - x)^{\sigma+r-p+k}\,dt\,,$$

che è valida per ogni intero k da $-h$ a $+\infty$.

14. — Riprenderemo ora l'equazione (1), che riscriveremo:

$$(1) \qquad P_0(t)\,\varphi^{(p)} + P_1(t)\,\varphi^{(p+1)} + \dots + P_p(t)\,\varphi = 0\,,$$

essendo, come si è detto, P_0 un polinomio razionale intero del grado r, e, per essere l'equazione regolare, $P_1, P_2, \dots, P_p$ rispettivamente dei gradi $r-1$, $r-2, \dots, r-p$. Scriveremo in questa equazione il coefficiente $P_h(t)$ nella forma

$$P_h(t) = P_h(x) + P'_h(x)(t-x) +$$

$$+ P''_h(x)\frac{(t-x)^2}{1\cdot 2} + \ldots + P_h^{(r-h)}(x)\frac{(t-x)^{r-h}}{(r-h)!};$$

moltiplicando allora l'equazione (1) così modificata per $(t-x)^\sigma \, dt$ ed integrando lungo il ciclo λ, si ottiene, tenuto conto delle formule (13) e (14) e della relazione $\sigma_k(\sigma+k) = \sigma_{k-1}$,

$$\begin{aligned}(16)\qquad & P_0(x)\,y^{(r)} - \{(\sigma+1)P'_0(x) - P_1(x)\}\,y^{(r-1)} + \\ & + \left\{\frac{(\sigma+1)(\sigma+2)}{1\cdot 2}P''_0 - (\sigma+1)P'_1 + P_2\right\} y^{(r-2)} - \\ & - \ldots + (-1)^r \left\{\frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+r)}{r!}P_0^{(r)} - \right. \\ & - \frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+r-1)}{(r-1)!}P_1^{(r-1)} + \ldots + \\ & \left. + (-1)^p \frac{(\sigma+1)\ldots(\sigma+r-p)}{(r-p)!}P_p^{(r-p)}\right\} y = 0\,.\end{aligned}$$

Posto dunque

$$y(x) = \int_\lambda \varphi(t)(t-x)^\varrho \, dt\,,$$

con $\varrho = \sigma + r - p$, questa relazione *trasforma* l'equazione differenziale lineare (1) dell'ordine p e con r punti singolari, in un'equazione differenziale lineare omogenea (16) dell'ordine r, coi medesimi r punti singolari della precedente, a coefficienti polinomi e ad integrali regolari. *Questa è l'equazione alla quale soddisfano le $\eta(x)$ di cui al § 6 e gli integrali estesi ad un ciclo* [1].

---

[1] A questa trasformazione, usata in una questione più speciale dal sig. POCHHAMMER nella Memoria « *Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihen mit 2 endlichen singuläre Punkten,* Crelle, T. CII, pag. 76 », si potrebbe dare il nome di *trasformazione del Pochhammer*.

15. — Sulla trasformazione precedente si possono fare alcune osservazioni.

a) È noto che le trasformazioni speciali di LAPLACE e di HEINE

$$\int \varphi(t)\, e^{tx}\, dt\,, \qquad \int \frac{\varphi(t)\, dt}{t-x}\,,$$

trasformano l'integrale di un'equazione differenziale lineare in un integrale di un'altra o della stessa equazione lineare. Noi troviamo qui che anche la trasformazione (3) gode della medesima proprietà. Per il caso di $\sigma = -1$ il risultato (16) non è dimostrato, poichè si è escluso che σ sia un numero intero negativo; tuttavia la trasformazione si può fare direttamente, e si ottiene, come equazione trasformata, la stessa equazione (1) in cui la $\varphi(t)$ è sostituita con $y^{(r-p)}(x)$; e ciò accade anche nella (16) facendosi la σ uguale a -1.

b) Quando l'equazione (1) è del primo ordine, la (16) diviene:

$$(17) \qquad P_0(x)\, y^{(r)} - \{(\varrho - r + 2) P'_0(x) - P_1(x)\}\, y^{(r-1)} +$$

$$+ \left\{ \frac{(\varrho - r + 2)(\varrho - r + 3)}{1 \cdot 2} P''_0(x) - (\varrho - r + 2) P'_1(x) \right\} y^{(r-2)} + \ldots +$$

$$+ (-1)^r \left\{ \frac{(\varrho - r + 2) \ldots (\varrho + 1)}{r!} P_0^{(r)}(x) - \right.$$

$$\left. - \frac{(\varrho - r + 2) \ldots \varrho}{(r-1)!} P_1^{(r-1)}(x) \right\} y = 0\,.$$

Questa non è altro che la notissima equazione ipergeometrica generalizzata del signor POCHHAMMER (¹), talchè giungiamo al risultato che *la trasformazione* (3) *applicata all'integrale di un'equazione lineare del primo ordine, origina la equazione ipergeometrica generalizzata.*

c) La stessa trasformazione applicata all'integrale di un'equazione ipergeometrica generalizzata di GOURSAT dell'ordine $p - 1$ (²), permette di formare l'integrale dell'equazione ipergeometrica analoga dell'ordine p e conseguentemente di integrare questa equazione mediante integrali definiti multipli.

(¹) Crelle, T. LXXI. — Cfr. JORDAN, *Cours d'Analyse*, T. III, p. 241; GOURSAT, Acta Mathematica, T. II.

(²) POCHHAMMER, J. di Crelle, T. CII, pag. 76.

IV.

16. — Prendendo in esame l'integrale

$$\int_\lambda \varphi(t)\, g(t)\, (t-x)^\varrho\, dt\,, \tag{18}$$

dove $g(t)$ è una funzione uniforme, si vede facilmente che le considerazioni dei §§ 2 e seguenti non subiscono modificazioni. Da ciò segue che, se λ è un ciclo, l'espressione (18) è integrale di un'equazione lineare della stessa *specie* (1) dell'equazione (16). Per un noto teorema sulle funzioni integrali di equazioni della medesima specie (2), dell'ordine r, fra $r+1$ di esse passerà una relazione lineare a coefficienti razionali in x. Ciò avverrà in particolare per gli integrali della forma

$$\int_\lambda t^\nu\, \varphi(t)\, (t-x)^\varrho\, dt\,,$$

o, ciò che è lo stesso, per quelli della forma

$$\int_\lambda \varphi(t)\, (t-x)^{\varrho+\nu}\, dt\,, \tag{19}$$

essendo ν un numero intero.

17. — Per gli integrali (19) la relazione in discorso si ottiene con facilità e prende la forma di equazione ricorrente. Ponendo infatti

$$y(x;\ \varrho) = \int_\lambda \varphi(t)\, (t-x)^\varrho\, dt\,, \tag{3'}$$

se ne deduce coll'integrazione per parti, notando che per essere λ

(1) Secondo la definizione di POINCARÉ, Acta Math., T. V, p. 212.

(2) V., per es., HEUN: *Zur Theorie der mehrwerthigen mehrfach verknüpften Functionen*, Acta Math., T. XI, pag. 99.

un ciclo la parte ai limiti è nulla,

$$\int_\lambda \varphi'(t)(t-x)^{\varrho+1}\,dt = -(\varrho+1)\,y(x;\,\varrho),$$

da cui

$$(20)\qquad \int \varphi^{(k)}(t)(t-x)^{\varrho+h}\,dt =$$

$$= (-1)^k(\varrho+h)(\varrho+h-1)\dots(\varrho+h-k+1)\,y(x;\,\varrho+h-k).$$

Riscrivendo ora l'equazione (1) come si è fatto al § 14, cioè:

$$\left\{P_0(x)+(t-x)P_0'(x)+\dots+\frac{(t-x)^r}{r!}P^{(r)}(x)\right\}\varphi^{(p)}+\dots+$$

$$+\left\{P_p(x)+(t-x)P_p'(x)+\dots+\frac{(t-x)^{r-p}}{(r-p)!}P_p^{(r-p)}(x)\right\}\varphi=0\,;$$

moltiplicando per $(t-x)^{\varrho-r+p}\,dt$, integrando lungo λ e tenendo conto della formula (20), si ottiene l'equazione ricorrente:

$$(21)\qquad (\varrho-r+1)(\varrho-r+2)\dots(\varrho-r+p)\,P_0(x)\,y(x;\,\varrho-r)+$$

$$+(\varrho-r+2)(\varrho-r+3)\dots(\varrho-r+p)\{(\varrho-r+p+1)P_0'-$$

$$-P_1\}\,y(x;\,\varrho-r+1)+\dots+\left\{\frac{(\varrho+1)(\varrho+2)\dots(\varrho+p)}{r!}P_0^{(r)}-\right.$$

$$\left.-\frac{(\varrho+1)\dots(\varrho+p-1)}{(r-1)!}P_1^{(r+1)}+\dots+(-1)^p\frac{P_p^{(r-p)}}{(r-p)!}\right\}y(x;\,\varrho)=0\,,$$

equazione notevole, che contiene evidentemente come casi particolari le note relazioni lineari fra le funzioni contigue ipergeometriche, tanto ordinarie che generalizzate. Osservando che la $y(x;\,\varrho)$ come funzione delle due variabili x e ϱ soddisfa all'equazione mista differenziale e alle differenze, del primo ordine,

$$\frac{\partial y(x;\,\varrho)}{\partial x}+\varrho\,y(x;\,\varrho-1)=0\,,$$

si può, con un calcolo semplicissimo, ricavare a piacimento la (21) dalla (16) o viceversa.

18. — Riassumendo, abbiamo visto nei §§ precedenti come l'operazione che abbiamo chiamata *trasformazione funzionale* sotto forma d'integrale definito valga, quando si prenda come funzione caratteristica la $(y - x)^{\varrho}$, a trasformare l'integrale di un'equazione lineare regolare come la (1) nell'integrale di un'equazione lineare pure regolare della forma (16) rispetto al parametro x, ed in un'equazione lineare alle differenze rispetto al parametro ϱ. Questi risultati si estendono senza difficoltà tanto al caso che si reiteri l'operazione funzionale, cioè che si consideri l'espressione

$$\int_{\lambda} d\,t_1 \int_{\lambda_1} \varphi(t)\,(t - t_1)^{\varrho}\,(t_1 - x)^{\varrho_1}\,dt,$$

quanto al caso in cui si aumenti il numero delle variabili, sostituendo alla (3) l'espressione

$$\int_{\lambda} \varphi(t)\,(t - x_1)^{\varrho_1}\,(t - x_2)^{\varrho_2} \ldots (t - x_q)^{\varrho_q}\,dt.$$

V.

19. — Veniamo ora ad estendere i risultati esposti negli articoli precedenti alla trasformazione funzionale espressa dalla formula

$$J(x) = \int_{\lambda} \varphi(t)\, G^{\varrho}(t, x)\, dt\,, \tag{22}$$

dove $\varphi(t)$ è, come precedentemente, l'integrale di una equazione differenziale lineare regolare e a coefficienti razionali (1), mentre $G(t, x)$ è una funzione razionale intera nelle due variabili t ed x del grado n rispetto a t, ed infine ϱ è un esponente non intero.

Riguardando l'equazione

$$G(t, x) = 0 \tag{23}$$

come avente per effetto di stabilire una corrispondenza fra i punti dei due piani t ed x, per essa alla linea λ d'integrazione corrisponderà una linea ben determinata del piano x, i cui vari rami saranno i tagli hermitiani (*coupures*) dell'espressione (22). Escludendo che la linea λ passi per i punti critici [radici del discriminante in t della (23)], in ogni campo semplicemente connesso del piano x, che non racchiude alcun punto degli anzidetti tagli, la espressione (22) rappresenterà un ramo ad un valore di una funzione analitica monogena nel senso del WEIERSTRASS.

20. — Con ragionamenti analoghi a quelli dei §§ 1-5, si vede che quando la variabile x, dopo avere descritto nel suo piano un contorno chiuso, torna al punto di partenza, la espressione (32) si altera sia perchè viene moltiplicata per un fattore costante, sia perchè vi si aggiungono integrali della forma

$$\int_{t_i(x)}^{a_k} \varphi(t)\, G^{\varrho}(t, x)\, dt \quad \text{oppure} \quad \int_{t_i(x)}^{t_j(x)} \varphi(t)\, G^{\varrho}(t, x)\, dt,$$

essendo $t_i(x)$, $t_j(x)$ radici in t dell'equazione (23), e si può dimostrare con ragionamenti analoghi a quelli dei §§ 6-7, che essi sono integrali di un'equazione differenziale lineare a coefficienti uniformi in x. Ma alla stessa equazione lineare soddisfa anche l'integrale (22) quando la linea λ sia una di quelle definite al § 9 e $\varphi(t)$ l'integrale particolare corrispondente della (1), od anche quando λ sia un ciclo e $\varphi(t)$ un integrale qualsivoglia della stessa equazione (1). Volendo passare alla determinazione formale di questa equazione, si potrà senza inconvenienti fare su λ l'una o l'altra ipotesi, supponendo i valori di x limitati ad un campo tale che nessuna delle radici $t_i(x)$ cada entro λ.

21. — Si ponga dunque

$$J(x) = \int_{\lambda} \varphi(t)\, G^{\varrho}(t, x)\, dt\,, \tag{22'}$$

essendo λ un ciclo per l'equazione (1), e si facciano le seguenti osservazioni:

a) Quando una funzione $\psi(t)$ soddisfa ad un'equazione differenziale lineare della forma

$$A_0\, \varphi^{(p)} + A_1\, \varphi^{(p-1)} + \ldots + A_p\, \varphi = 0\,,$$

dove $A_0, A_1, \dots, A_p$ sono polinomi razionali interi in t rispettivamente dei gradi $m, m, -1, \dots, m-p$, $(m \geq p)$, l'espressione

$$K_\nu = \int_\lambda \psi(t)\, t^{\sigma+\nu}\, dt, \tag{24}$$

in cui la linea λ non include il punto $t=0$, soddisfa ad un'equazione lineare ricorrente dell'ordine m; in altri termini K_ν si può esprimere in funzione lineare di $K_{\nu-1}, K_{\nu-2}, \dots, K_{\nu-m}$, in cui figurano nei coefficienti i coefficienti delle varie potenze di t in $A_0, A_1, \dots, A_p$. Questo risultato, ben noto, si deduce dalla formula

$$K_\nu = -\frac{1}{\sigma+\nu+1}\int_\lambda \psi'(t)\, t^{\sigma+\nu+1}\, dt$$

ottenuta dalla (24) mediante l'integrazione per parti.

b) La funzione $\psi(t) = \varphi(t)\, G^\sigma(t, x)$ soddisfa ad una equazione differenziale della forma precedente, dell'ordine p, ed in cui il grado in t del coefficiente A_0 è $m = np + r$; inoltre i coefficienti A_0, $A_1, \dots, A_p$ contengono razionalmente la x. Ciò si dimostra senza difficoltà derivando successivamente la

$$\varphi = G^{-\sigma}\psi,$$

sostituendo nell'equazione (1) e dividendo tutto per $G^{-\sigma-p}$; la t entrerà al più alto grado nelle parti

$$P_0 G^p, \ P_1 G^p, \dots, P_p G^p$$

dei coefficienti, cioè ai gradi rispettivi

$$np+r, \ np+r-1, \dots, np+r-p.$$

c) Applicando alla funzione ψ il teorema enunciato in a) si trova che le espressioni

$$J_\nu = \int_\lambda \varphi(t)\, G^\sigma(t, x)\, t^\nu\, dt, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots), \tag{25}$$

sono legate da una relazione ricorrente dell'ordine $np + r$, a coefficienti razionali in x. Onde risulta che una espressione (25), per qualunque valore intero positivo di ν, si potrà esprimere mediante una funzione lineare, a coefficienti razionali in x, di $J_0, J_1, J_2, \ldots$ $\ldots, J_{np+r-1}$: indicherò una tale funzione lineare con

$$L(J_0, J_1, \ldots, J_{np+r-1}).$$

Segue da ciò che, essendo $R(t)$ un polinomio razionale intero di grado qualunque in t, anche

$$\int_\lambda \varphi(t)\, G^\sigma(t, x)\, R(t)\, \mathrm{d}t \tag{26}$$

sarà esprimibile mediante una funzione $L(J_0, J_1, \ldots, J_{np+r-1})$.

22. — Ciò premesso, riprendiamo l'espressione (22′) ed osserviamo che, posto

$$\sigma = \varrho - np - r,$$

si ha

$$J(x) = \int_\lambda G^\sigma(t, x)\, G^{np+r}(t, x)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t;$$

ma $G^{np+r}(t, x)$ è un polinomio razionale intero in t, onde, per essere $J(x)$ della forma (26), si potrà porre

$$J(x) = L_0(J_0, J_1, \ldots, J_{np+r-1}).$$

Derivando rispetto ad x si ottiene:

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}x} = \varrho \int_\lambda G^\sigma(t, x)\, G^{np+r-1}(t, x) \frac{\partial G}{\partial x}\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t,$$

ed anche qui $G^{np+r-1} \dfrac{\partial G}{\partial x}$ essendo un polinomio intero in t, si ha:

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}x} = L_1(J_0, J_1, \ldots, J_{np+r-1}).$$

Per ogni derivata successiva di J rispetto ad x si potrà ottenere una espressione analoga, e si seguiterà fino alla

$$\frac{\mathrm{d}^{np+r} J}{\mathrm{d}x^{np+r}} = L_{np+r}(J_0, J_1, \dots, J_{np+r-1}) .$$

Eliminando ora fra queste $np+r+1$ equazioni lineari le $np+r$ quantità $J_0, J_1, \dots, J_{np+r-1}$, si ottiene una relazione lineare a coefficienti razionali in x fra $J, \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}^{np+r} J}{\mathrm{d}x^{np+r}}$. *Si è così ottenuta l'equazione differenziale lineare, omogenea, a coefficienti razionali in x, cui soddisfa l'espressione* (22'). *L'ordine di questa equazione è $np+r$.*

Osservando che i coefficienti in x dei polinomi che si ottengono colla derivazione successiva:

$$G^{np+r}, \quad G^{np+r-1}\frac{\partial G}{\partial x}, \quad (\varrho - 1)\, G^{np+r-2}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + G^{np+r-1}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \dots$$

sono di grado ordinatamente decrescente di un'unità, si dimostra senza difficoltà che questa equazione differenziale della J è regolare nel senso del Fuchs. Sono punti singolari per essa le radici delle equazioni

$$G(\infty, x), \quad G(\alpha_i, x) = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, r),$$

ed inoltre le radici del discriminante in x dell'equazione (23).

23. — Le varie espressioni della forma (26), per uno stesso valore di σ o per valori differenti fra loro di numeri interi, soddisfano ad equazioni lineari *della stessa specie* che si formano come si è detto al § precedente. In questa *specie* di equazioni si distinguono sistemi ricorrenti, cioè sistemi di equazioni i cui integrali sono legati da una relazione lineare ricorrente, a coefficienti razionali in x. Tali sono in particolare i sistemi di equazioni cui soddisfano le

(27) $$\int_\lambda \varphi(t)\, G^\sigma(t, x)\, t^\nu\, \mathrm{d}t, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots),$$

ed anche le

(28) $$\int_\lambda \varphi(t)\, G^{\sigma+\nu}(t, x)\, \mathrm{d}t, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Le (28) ci dànno il sistema delle funzioni sferiche per $\varphi(t) = 1$, $\sigma = -1/2$, $G(t, x) = 1 - 2tx + t^2$; esse ci dànno pure le funzioni sferiche generalizzate che ho studiate in un recente lavoro [1] per

$$\varphi(t) = 1\,, \quad \sigma = -\frac{1}{2}\,, \quad G(t, x) = t^3 - 3\,t\,x + 1\,.$$

24. — Sembra degno di osservazione il caso in cui si fa $\varphi(t) = 1$; si viene allora a studiare l'integrale, esteso ad una curva convenientemente presa,

$$H(x) = \int_\lambda G^\varrho(t, x)\, dt\,. \tag{29}$$

In questo caso $p = 1$ ed $r = 0$, poichè l'equazione (1) si riduce a $\varphi' = 0$; pertanto la $H(x)$ soddisfa ad una equazione differenziale lineare regolare, dell'ordine n, i cui punti singolari sono le radici di $G(\infty, x) = 0$ e quelle del discriminante in x della (23). L'equazione ricorrente che serve, secondo il § **22**, al calcolo dell'equazione differenziale della (29), si ottiene subito ponendo

$$G(t, x) = a_0\, t^n + a_1\, t^{n-1} + \dots + a_n\,, \qquad \psi = G^\sigma,$$

onde

$$G\,\frac{\partial \psi}{\partial t} - \sigma\,\frac{\partial G}{\partial t}\,\psi = 0\,;$$

facendo

$$J_\nu = \int_\lambda G^\sigma(t, x)\, t^\nu\, dt$$

l'equazione ricorrente in discorso è

$$\{(\sigma + 1)\, n + \nu\}\, a_0\, J_{\nu+n-1} + \{(\sigma + 1)(n - 1) + \nu\}\, a_1\, J_{\nu+n-2} + \dots +$$
$$+ (\sigma + 1 + \nu)\, a_{n-1}\, J_\nu + \nu\, a_n\, J_{\nu-1} = 0\,,$$

e questa permette di calcolare facilmente in forma di determinante, per mezzo del procedimento del § **22**, l'equazione differenziale della $H(x)$. Questo caso offre uno speciale interesse quando ϱ è razionale; più particolarmente quando la sua parte non intera è uguale ad $1/2$; la (29) ci dà infatti, in tal caso, gli integrali iperellittici

---

(1) Mem. dell'Accad. di Bologna, S. V, T. I.

completi *considerati come funzioni di un parametro x contenuto comunque, purchè razionalmente, nella rispettiva forma algebrica fondamentale,* e con ciò resta dimostrato non solo che essi integrali iperellittici completi soddisfano ad una equazione differenziale lineare rispetto ad ogni tale parametro, ma si ha anche un metodo semplice di calcolo che, per via di sole operazioni razionali, permette di costruire effettivamente queste equazioni.