SALVATORE PINCHERLE

Le operazioni distributive e le omografie

Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Rendiconti Classe di Scienze Matematiche, Serie 2, Vol. **29** (1896), p. 397–405

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 1, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 358–367

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_1_358>

12 [83].

Le operazioni distributive e le omografie.

Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere,
Rendiconti Classe di Scienze Matematiche e Naturali (Milano);
(2) **29**, 397-405 (1896).

Dopo i lavori di WEIERSTRASS, di SEGRE, di PREDELLA, di FUCHS, di HAMBURGER, di LIE, di SAUVAGE, ecc., la teoria generale delle omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni si può dire portata a compimento: oramai, se vi si potrà recare qualche modificazione, essa riguarderà più la forma che la sostanza. Pur nonostante, vista l'importanza che quella teoria, sotto vari nomi, ha in varie parti della matematica, una semplificazione della sua esposizione potrà essere bene accetta: così mi auguro che sia del presente lavoro che ha precisamente per iscopo di far conoscere una semplificazione assai sensibile che il concetto generale di operazione distributiva, quale l'ho introdotto in recenti pubblicazioni [1], reca nello studio generale delle omografie.

1. — Consideriamo un insieme S di elementi suscettibili di essere associati linearmente e dipendenti da un numero arbitrariamente grande di parametri. Come nelle citate mie pubblicazioni, sarà opportuno scegliere come enti dell'insieme S gli elementi di funzioni analitiche di una variabile x regolari nell'intorno comune di un punto, per esempio $x = 0$; si ha così il vantaggio di fissare meglio le idee e di dare luogo alle applicazioni più notevoli. Osserviamo per incidenza che un simile insieme serve a realizzare ciò che il VERONESE chiama *spazio generale*. Un elemento α di S sarà

(1) *Sulle operazioni funzionali distributive,* Rend. della R. Accademia dei Lincei, 17 febbraio 1895; *Sulle operazioni distributive commutabili con un'operazione data,* Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 23 giugno 1895.

dunque una serie di potenze di x convergente per i valori di x il cui modulo è minore di un dato numero positivo r: i parametri da cui dipende α possono essere tutti od alcuni dei coefficienti della serie, o quantità da cui dipendono questi coefficienti.

2. — Sugli elementi di S immagineremo applicate operazioni distributive che riproducano elementi di S medesimo. Indicheremo colle maiuscole dell'alfabeto latino queste operazioni, colle minuscole numeri qualsiasi, reali o complessi; colle minuscole dell'alfabeto greco designeremo gli elementi di S. Avremo così:

$$A(\alpha) = \alpha_1, \qquad A(\beta) = \beta_1,$$

$$A(\alpha + \beta) = \alpha_1 + \beta_1,$$

$$A(a\,\alpha) = a\,A(\alpha).$$

3. — Diremo che m elementi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sono legati fra loro linearmente quando esistono delle costanti $k_1, k_2, \dots, k_m$ non tutte nulle, e tali che sia:

$$k_1\,\alpha_1 + k_2\,\alpha_2 + \dots + k_m\,\alpha_m = 0;$$

quando tali costanti non esistono, le $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ si diranno invece linearmente indipendenti. Date le m funzioni $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ linearmente indipendenti, l'insieme delle funzioni della forma

$$c_1\,\alpha_1 + c_2\,\alpha_2 + \dots + c_m\,\alpha_m \tag{1}$$

si dirà una *varietà* o *spazio* lineare dell'ordine m, o ad m dimensioni: lo indicheremo, secondo che tornerà più opportuno, con $S_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $S_m(\alpha)$ o semplicemente con S_m. È chiaro che $m+1$ elementi di S_m saranno legati linearmente fra di loro; m elementi invece non lo saranno necessariamente e diremo che essi formano un *sistema fondamentale* di S_m quando sono linearmente indipendenti. Tali saranno gli elementi:

$$\beta_h = a_{h,1}\,\alpha_1 + a_{h,2}\,\alpha_2 + \dots + a_{h,m}\,\alpha_m, \qquad (h = 1, 2, \dots, m),$$

quando è differente da zero il determinante $\Sigma \pm a_{1,1}\,a_{2,2} \dots a_{m,m}$. Ogni elemento di S_m si può esprimere linearmente per mezzo degli elementi di uno qualunque dei suoi sistemi fondamentali.

4. — Un'operazione distributiva A applicata alla varietà (1) darà luogo ad una varietà lineare; posto

$$A(\alpha_h) = \beta_h, \qquad (h = 1, 2, \dots, m),$$

la A, applicata alla (1), darà la varietà $S_m(\beta)$, cioè l'insieme delle funzioni:

$$c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2 + \dots + c_m \beta_m.$$

La varietà $S_m(\beta)$ si dirà *trasformata di* $S_m(\alpha)$ *mediante* A.

In generale, la $S_m(\beta)$ sarà dell'ordine m, come è $S_m(\alpha)$: potrà però essere d'ordine minore, e la condizione necessaria e sufficiente affinchè ciò accada, è che la varietà $S_m(\alpha)$ contenga funzioni tali che applicando ad esse la A si trovi come risultato lo zero; tali funzioni si diranno *radici* di A, e l'operazione A, dando come trasformata di $S_m(\alpha)$ una varietà d'ordine minore, si potrà dire *degenere* rispetto ad $S_m(\alpha)$. In ciò che segue, noi supporremo che l'operazione A non sia degenere rispetto ad $S_m(\alpha)$.

5. — Una sola funzione α dà luogo alla varietà ad una dimensione $c\alpha$, od $S_1(\alpha)$. La varietà $S_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ non contenga α; allora la varietà $S_{m+1}(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ si dirà *somma* delle varietà $S_1(\alpha)$ ed $S_m(\alpha)$. In generale, diremo *somma* di due varietà $S_m(\alpha)$, $S_n(\beta)$ senza elementi comuni ed indicheremo con $S_m + S_n$ la varietà che contiene tutte le funzioni dell'una e dell'altra; un sistema fondamentale di $S_m(\alpha) + S_n(\beta)$ si otterrà prendendo insieme alle funzioni di un sistema fondamentale della prima quelle di un sistema fondamentale della seconda. La varietà S_m si dirà anche *contenuta* in $S_m + S_n$.

Essendo A un'operazione non degenere per $S_m(\alpha)$ ed $S_n(\beta)$, la trasformata della somma delle due varietà mediante A è uguale alla somma delle trasformate, e si potrà scrivere:

$$A[S_m(\alpha) + S_n(\beta)] = A\,S_m(\alpha) + A\,S_n(\beta). \tag{2}$$

6. — Una varietà $S_m(\alpha)$ si dirà *invariante* rispetto all'operazione A quando essa coincide colla sua trasformata mediante A. Dovrà quindi aversi

$$A(\alpha_i) = a_{i,1}\alpha_1 + a_{i,2}\alpha_2 + \dots + a_{i,m}\alpha_m, \qquad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{3}$$

ed il determinante $\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{m,m}$ sarà differente da zero poichè l'operazione A non è degenere rispetto alla varietà $S_m(\alpha)$. Una varietà invariante rispetto ad A lo è anche rispetto ad $A^2, A^3, \ldots$ e a tutte le operazioni della forma:

$$x_0 + x_1 A + x_2 A^2 + \ldots + x_n A^n, \tag{4}$$

essendo $x_0, x_1, \ldots, x_n$ costanti arbitrarie. Fra queste operazioni se ne possono trovare alcune degeneri rispetto alla varietà che si considera.

Le operazioni della forma (4) si possono moltiplicare, e formano un gruppo dotato della proprietà commutativa. La moltiplicazione delle operazioni (4) si eseguisce colle leggi stesse della moltiplicazione, onde la scomposizione di un'operazione (4) in fattori della forma $A(\varphi) - z\varphi$. Porremo per brevità:

$$A(\varphi) - z\varphi = E_z(\varphi)$$

o semplicemente:

$$A - z = E_z.$$

7. — Una radice di E_z ci dà una varietà ad una dimensione invariante rispetto ad A. Proponiamoci la questione se, data la varietà $S_m(\alpha)$ e l'operazione A non degenere rispetto ad essa, esistono in $S_m(\alpha)$ varietà ad una dimensione invarianti rispetto ad A o, ciò che è lo stesso, se esistono operazioni E_z aventi radici in $S_m(\alpha)$.

Sia E_z una tale operazione: avendo essa la radice ω appartenente ad $S_m(\alpha)$, si avrà:

$$A(\omega) = z\omega, \qquad \omega = h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \ldots + h_m\alpha_m,$$

da cui si deduce, per le (3) e per essere $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ linearmente indipendenti, il sistema di relazioni:

$$h_1 a_{1,i} + h_2 a_{2,i} + \ldots + h_m a_{m,i} = z h_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{5}$$

per la cui coesistenza è necessario e sufficiente che sia soddisfatta l'equazione in z:

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - z & a_{2,1} & a_{3,1} \ldots a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} - z & a_{3,2} \ldots a_{m,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,m} & a_{2,m} & a_{3,m} \ldots a_{m,m} - z \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Questa equazione si dirà *fondamentale* della varietà $S_m(\alpha)$ invariante di A; talchè otteniamo il risultato:

Un'operazione E_z *ammette una radice nella varietà* $S_m(\alpha)$ *se, e soltanto se,* z *è radice dell'equazione fondamentale.*

Mutando il sistema fondamentale cui si riferiscono gli elementi della varietà, l'equazione fondamentale non muta, come si deduce da un ragionamento semplice e ben noto (1).

8. — La varietà $S_m(\alpha)$ sia somma delle due varietà $S_n(\beta)$ ed $S_{m-n}(\gamma)$, di cui la prima sia pure invariante rispetto ad A. Un sistema fondamentale di $S_n(\beta)$ potrà prendersi a far parte di un sistema fondamentale di $S_m(\alpha)$: formando con questo l'equazione fondamentale ed applicando un noto teorema della teoria dei determinanti, si scorge che il suo primo membro $f(z)$ contiene come fattore il primo membro dell'equazione fondamentale di $S_m(\beta)$. Se avviene che anche $S_{m-n}(\gamma)$ sia invariante rispetto ad A, il primo membro $f(z)$ dell'equazione fondamentale di $S(\alpha)$ sarà il prodotto dei primi membri delle equazioni fondamentali di $S(\beta)$, $S(\gamma)$.

9. — Veniamo ora ad introdurre un concetto fondamentale per ciò che segue. Ogni radice di E (scriviamo ora per semplicità E al posto di E_z) è anche radice di E^r (r intero e positivo); ma non viceversa. Orbene, una radice di E^r si dirà *propria* quando essa non annulla alcuna potenza di E di esponente inferiore ad r, *impropria* nel caso contrario. Più radici di E^r, combinate linearmente, dànno sempre una radice della operazione medesima; diremo che più radici proprie di E^r sono *linearmente distinte* se nessuna loro combinazione lineare dà una radice impropria.

Indichiamo con $\omega^{(r-1)}$ una radice propria di E^r. Essendo

$$E^{r-1}\,E\,(\omega^{(r-1)}) = 0\,,$$

segue che $E(\omega^{(r-1)})$ è manifestamente radice propria di E^{r-1}; la indicheremo perciò con $\omega^{(r-2)}$; analogamente, $E(\omega^{(r-2)}) = E^2(\omega^{(r-1)})$ sarà radice propria di $E^{r-2}, \ldots$, e così $E(\omega^{(1)}) = \omega$ sarà radice di D. Ma poichè le operazioni $E, E^2, E^3, \ldots$ che consideriamo appartengono al tipo (4) e lasciano quindi invariata la $S_m(\alpha)$, ne viene che siccome $\omega^{(r-1)}$ appartiene per ipotesi ad $S_m(\alpha)$, vi appartiene

(1) Vedasi: FUCHS, Crelle, T. LXVI, pag. 133; SCHLESINGER, *Handbuch der lin. Differentialgleich.* (Leipzig, Teubner, 1895), Bd, I, pag. 104.

anche ω, il che richiede (§ 7) che z sia una radice dell'equazione fondamentale: sia essa z_1. Dal sistema di posizioni

$$(7) \quad E(\omega^{(r-1)}) = \omega^{(r-2)},\ E(\omega^{(r-2)}) = \omega^{(r-3)}, \ldots, E(\omega^{(1)}) = \omega,\ E(\omega) = 0$$

ricaviamo lo specchio:

$$(8) \quad \begin{cases} A(\omega) & = \qquad\quad z_1\,\omega \\ A(\omega^{(1)}) & = \omega \qquad + z_1\,\omega^{(1)} \\ A(\omega^{(2)}) & = \omega^{(1)} \quad + z_1\,\omega^{(2)} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ A(\omega^{(r-1)}) & = \omega^{(r-2)} + z_1\,\omega^{(r-1)}. \end{cases}$$

Dall'ipotesi dell'esistenza di una radice propria di E^r in $S_m(\alpha)$ veniamo dunque a dedurre un sistema di r fuuzioni $\omega, \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(r-1)}$ appartenenti ad S_m, sulle quali l'operazione A produce la trasformazione (8) e che sono linearmente indipendenti: qualora infatti si avesse

$$c_0\,\omega + c_1\,\omega^{(1)} + \ldots + c_{r-1}\,\omega^{(r-1)} = 0,$$

basterebbe applicare reiteratamente l'operazione E e tenere conto delle (7) per trovare che devono essere nulli tutti i coefficienti $c_0, c_1, \ldots, c_{r-1}$. Gli elementi $\omega, \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(r-1)}$ definiscono dunque una varietà d'ordine r, $S_r(\omega)$, invariante rispetto ad A e contenuta in $S_m(\alpha)$: la sua equazione fondamentale si ottiene immediatamente dalle (8) nella forma $(z - z_1)^r$ che dovrà quindi (§ 8) essere un fattore di $f(z)$. Concludiamo quindi:

Un'operazione E_z^r può ammettere in $S_m(\alpha)$ una radice propria solo se z è radice dell'equazione fondamentale di un ordine di multiplicità almeno eguale ad r.

10. — Indichiamo ora con $S(\omega)$ lo spazio lineare ad n dimensioni ($n \leq m$) costituito dall'insieme contenuto in $S_m(\alpha)$ delle radici di E ($E = A - z_1$) e delle sue potenze. Vogliamo indagare la composizione di questo spazio. Perciò, sia r la più alta potenza di E di cui $S(\omega)$ contenga radici proprie, e siano

$$\omega_1^{(r-1)},\ \omega_2^{(r-1)}, \ldots, \omega_p^{(r-1)}$$

tutte le radici proprie di E^r *linearmente distinte* (§ 9) contenute in $S(\omega)$. Applicando ad esse l'operazione E, otterremo radici proprie linearmente distinte di E^{r-1} che indicheremo con

$$\omega_1^{(r-2)},\ \omega_2^{(r-2)}, \dots, \omega_p^{(r-2)},$$

oltre alle quali potranno esistere in $S(\omega)$ altre q radici proprie di E^{r-1}, linearmente distinte fra loro e dalle precedenti e che indicheremo con

$$\omega_{p+1}^{(r-2)},\ \omega_{p+2}^{(r-2)}, \dots, \omega_{p+q}^{(r-2)}.$$

Applicando a queste $p+q$ radici proprie di E^{r-1} l'operazione E, otterremo $p+q$ radici proprie linearmente distinte di E^{r-2} oltre alle quali ne potranno esistere altre linearmente distinte fra loro e dalle precedenti, e così di seguito, finchè giungeremo alle radici di E, di cui $p+q+\dots+s$ provenienti dalle precedenti, oltre alle quali ne potranno esistere altre t linearmente indipendenti fra loro e dalle precedenti, per modo che la totalità delle radici di E contenute in $S(\omega)$ sarà data da

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p, \omega_{p+1}, \dots, \omega_{p+q}, \dots, \omega_{p+q\dots+s},$$

$$\omega_{p+q+\dots+s+1}, \dots, \omega_{p+\dots+s+t}.$$

Lo specchio

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{llllllllll}
\omega_1^{(r-1)} & \omega_2^{(r-1)} & \dots & \omega_p^{(r-1)} & & & & & & \\
\omega_1^{(r-1)} & \omega_2^{(r-2)} & \dots & \omega_p^{(r-2)} & \omega_{p+1}^{(r-2)} & \dots & \omega_{p+q}^{(r-2)} & & & \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
\omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & \dots & \omega_p^{(1)} & \omega_{p+1}^{(1)} & \dots & \omega_{p+q}^{(1)} & \dots & \omega_{p+q+\dots+s}^{(1)} & \\
\omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_p & \omega_{p+1} & \dots & \omega_{p+q} & \dots & \omega_{p+q+\dots+s} & \\
 & & & \omega_{p+q+\dots+s+1} & \dots & \omega_{p+q+s+t} & & & &
\end{array}\right.$$

è costituito da n funzioni che formano un sistema fondamentale di $S(\omega)$. Infatti esse sono linearmente indipendenti, perchè se fra alcune di esse $\omega_a, \omega_b, \dots$ vi fosse una relazione

$$c_a\,\omega_a + c_b\,\omega_b + \dots = 0,$$

prendendo $r-1$ volte l'operazione E su ambo i membri si otterrebbe una relazione lineare fra gli elementi della prima linea dello specchio (9), contro l'ipotesi.

La varietà $S(\omega)$, che contiene tutte e sole le radici di E e delle sue potenze appartenenti a $S_m(\alpha)$, è dunque dell'ordine

(10) $$n = rp + (r-1)q + \dots + 2s + t;$$

essa è invariante rispetto ad A, e gli elementi di una stessa verticale formano alla loro volta varietà invarianti rispetto ad A e contenute in $S(\omega)$. Infine fra gli elementi di $S(\omega)$ non ve n'è alcuno che possa essere radice di un'operazione E_a con a differente da z_1, l'equazione fondamentale di $S(\omega)$ avendo infatti la forma $(z-z_1)^n$.

11. — Scomponiamo la varietà $S_m(\alpha)$ in somma di due: la $S_n(\omega)$ di cui lo specchio (9) dà il sistema fondamentale, ed una seconda varietà di cui $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-n}$ sia un sistema fondamentale. Applicando a queste l'operazione E^r, si abbia:

$$E^r(\sigma_1) = \pi_1, \ E^r(\sigma_2) = \pi_2, \dots, E^r(\sigma_{m-n}) = \pi_{m-n}.$$

Le funzioni $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ saranno elementi di $S_m(\alpha)$ linearmente indipendenti, poichè se fosse

$$c_1\pi_1 + c_2\pi_2 + \dots + c_{m-n}\pi_{m-n} = 0,$$

una combinazione lineare delle σ_i verrebbe ad essere radice di E^r, contro le ipotesi fatte; di più, nessuna combinazione lineare delle π_i può essere radice di una E^q, poichè ne verrebbe che una combinazione lineare delle σ_i sarebbe radice di E^{r+q}, pure contro le ipotesi; infine, l'operazione A lascia invariata la varietà $S_{m-n}(\pi)$, poichè se si pone

$$A'(\sigma_i) = a_1\sigma_1 + \dots + a_{m-n}\sigma_{m-n} + h_a\omega_a + h_b\omega_b + \dots,$$

prendendo da ambo i membri l'operazione E^r, viene:

$$A(\pi_i) = a_1\pi_1 + \dots + a_{m-n}\pi_{m-n}.$$

Talchè la $S_m(\alpha)$ si può scindere nella somma delle due varietà $S_n(\omega)$, $S_{m-n}(\pi)$, entrambe invarianti rispetto ad A: il primo membro $f(z)$ dell'equazione fondamentale di $S_m(\alpha)$ sarà dunque (§ 8) il prodotto dei primi membri $g(z)$, $h(z)$ delle equazioni fondamentali rispettive di $S_n(\omega)$, $S_{m-n}(\pi)$, e si avrà:

$$f(z) = (z - z_1)^n h(z),$$

dove $h(z)$ non contiene il fattore $z - z_1$. La radice z_1 entra dunque nell'equazione fondamentale $f(z) = 0$ precisamente all'ordine n di multiplicità.

La varietà $S_{m-n}(\pi)$ si può ora trattare come si è fatto della S_α: cioè, essendo z_2 una radice della sua equazione fondamentale, dell'ordine n' di multiplicità, si cercano le radici proprie di E_z^r per $r \leq n'$, e via di seguito. Così continuando, si giunge ad un risultato che si può enunciare nei termini seguenti:

Abbiasi una varietà $S_m(\alpha)$ invariante rispetto ad una operazione distributiva A che non ammette radici nella varietà stessa, e sia

$$f(z) = (z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_h)^{n_h}$$

il primo membro dell'equazione fondamentale corrispondente. La varietà data si scinderà nella somma di h varietà $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(h)}$, degli ordini $n_1, n_2, \dots, n_h$ rispettivamente, ognuna delle quali sarà invariante rispetto ad A; fra queste, la $S^{(i)}$, $(i = 1, 2, \dots, h)$, conterrà tutte e sole le radici esistenti in $S_m(\alpha)$, di E_{z_i} e delle sue potenze. Il primo membro dell'equazione fondamentale di $S^{(i)}$ è appunto $(z - z_i)^{n_i}$.

Ognuna delle varietà $S^{(i)}$ si può scindere, alla sua volta, in sottovarietà pure invarianti rispetto ad A, le quali corrispondono alle diverse radici proprie linearmente distinte delle successive potenze di E_{z_i}, vale a dire alle colonne verticali dello specchio (9): *alla radice propria $\omega^{(r-1)}$ di $E_{z_i}^r$ corrisponderà cioè la sottovarietà di cui le r funzioni linearmente indipendenti*

$$\omega^{(r-1)},\ \omega^{(r-2)} = E(\omega^{(r-1)}), \dots, \omega = E(\omega^{(1)})$$

dànno un sistema fondamentale. Questa sottovarietà è trasformata in sè dall'operazione A nel modo indicato dalle relazioni (8).

12. — Lasciando al lettore di giudicare se il concetto qui introdotto di radici proprie delle operazioni $(A - z)^r$ valga a recare, come ci è sembrato, una non trascurabile semplificazione nell'esposizione della teoria delle omografie in generale, noteremo solo che l'esistenza indicata nello specchio (9) delle p radici proprie E_z^r, delle q radici proprie di E_z^{r-1} non derivate dalle precedenti, ecc., corrisponde, nella nomenclatura del WEIERSTRASS, all'esistenza di p divisori elementari del grado r, di q del grado $r-1$, ecc., come si rileva scrivendo, dalla (10),

$$(z-z_1)^n = [(z-z_1)^r]^p\,[(z-z_1)^{r-1}]^q \dots [(z-z_1)^2]^s\,(z-z_1)^t .$$

Notiamo l'immediata applicazione alla teoria dell'equazione fondamentale di un'equazione differenziale lineare [1], nel qual caso basta prendere come operazione A il mutamento che subisce una funzione dopo il percorso fatto dalla variabile indipendente di un cammino chiuso ed il conseguente ritorno al punto di partenza. Accenniamo infine ad un problema di cui le considerazioni precedenti dànno implicitamente la soluzione: la ricerca di quelle soluzioni di un'equazione funzionale

$$A^n(\varphi) + a_1 A^{n-1}(\varphi) + \dots + a_{n-1} A(\varphi) + a_n \varphi = 0 ,$$

o di un sistema

$$A(\varphi_i) = a_{i,1}\varphi_1 + a_{i,2}\varphi_2 + \dots + a_{i,n}\varphi_n, \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

che sono contenute in una data varietà invariante rispetto ad A.

---

(1) Vedasi: FUCHS, Crelle, S. 66, p. 133; HAMBURGER, ibid., T. 76, p. 113; CASORATI, Ann. di Matematica, S. II, T. X, p. 1. Vedasi pure l'esposizione d'insieme che ne dà lo SCHLESINGER nel citato *Handbuch*, pag. 91 e seguenti.