Salvatore Pincherle

Cenno sulla Geometria dello spazio funzionale

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Vol. **1** (1896-1897), p. 85–95

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 1, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 368–377

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_1_368>

13 [87].

Cenno sulla Geometria dello spazio funzionale.

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; (Nuova Serie) **1**, 85-95 (1896-1897).

In alcuni lavori recentemente pubblicati ho espresso il concetto che, per varie ricerche d'Analisi, è opportuno considerare la totalità delle funzioni analitiche di una variabile x o — per meglio fissare le idee — la totalità delle serie di potenze intere positive di x, come una varietà o spazio di cui ogni singola serie costituisce un elemento. Ad una tale varietà, evidentemente ad un numero infinito di dimensioni, si può dare il nome di *spazio funzionale*; ogni serie di potenze di x sarà un *punto* di questo spazio ed i coefficienti della serie si potranno riguardare come le coordinate del punto. Nel presente brevissimo cenno mi propongo di sviluppare alquanto questo concetto, ritenendo che l'uso del linguaggio geometrico nelle ricerche d'indole funzionale possa valere molte volte a renderle più chiare ed intuitive, nonchè ad introdurvi quei punti di vista e quei metodi che rendono così fecondi i lavori del LIE.

1. — Indicherò colle lettere minuscole dell'alfabeto greco i punti dell'ora accennato spazio funzionale, cioè le serie di potenze intere positive della x, che chiamerò senz'altro *funzioni*, per brevità; le lettere minuscole dell'alfabeto latino ci rappresenteranno i numeri, costanti o variabili. Le due funzioni α ed $a\,\alpha$ si rappresenteranno con uno stesso punto dello spazio funzionale. Essendo $c_1, c_2, \dots, c_n$ numeri arbitrari ed $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ funzioni linearmente indipendenti, l'insieme dei punti

$$c_1\,\alpha_1 + c_2\,\alpha_2 + \dots + c_n\,\alpha_n$$

costituirà una varietà o spazio lineare ad $n-1$ dimensioni contenuta nello spazio funzionale. Per $n=2$ si ha una retta, per $n=3$

un piano. Una varietà lineare ad n dimensioni verrà indicata con Π_n.

2. — Supponendo che la α sia funzione, oltre che della x, di altre r variabili $z_1, z_2, \ldots, z_r$, vediamo che essa ci rappresenta una varietà (generalmente non lineare) ad r dimensioni contenuta nello spazio funzionale. In particolare una funzione di due variabili $\alpha(x, z)$ ci rappresenterà una varietà ad una dimensione, che potremo dire una *curva* dello spazio funzionale. Supporremo che α sia funzione analitica della z, e ci limiteremo ad un campo di valori di z per il quale essa sia regolare e ad un valore.

3. — Avendosi la curva $\alpha(x, z)$, ogni valore di z ci dà un punto della curva; essendo z_1, z_2 due valori di z, con

$$c_1 \alpha(x, z_1) + c_2 \alpha(x, z_2)$$

si ha una corda della curva, con

$$c_1 \alpha(x, z_1) + c_2 \alpha(x, z_2) + \ldots + c_n \alpha(x, z_n),$$

si ha una Π_{n-1}, individuata da n punti della curva. Questi punti si possono anche supporre infinitamente vicini, e si ottengono così le espressioni

$$c_0 \alpha(x, z_1) + c_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z_1},$$

$$c_0 \alpha(x, z_1) + c_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z_1} + c_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z_1^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_0 \alpha(x, z_1) + c_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z_1} + \ldots + c_n \frac{\partial^n \alpha}{\partial z_1^n},$$

che rappresentano rispettivamente la tangente, il piano osculatore, ..., la Π_n osculatrice alla curva nel punto $z = z_1$.

L'espressione

$$c_0 \alpha(x, z) + c_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z},$$

in cui tanto $c_1 : c_0$ quanto z si lasciano variabili, rappresenta la superficie sviluppabile costituita dall'insieme delle tangenti alla curva.

4. — È facile vedere sotto quale condizione una curva appartiene tutta ad una varietà lineare ad n dimensioni, che dovrà essere quindi la sua Π_n osculatrice. Basterà che $\frac{\partial^{n+1}\alpha}{\partial z^{n+1}}$ si esprima linearmente in funzione di $\alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^n \alpha}{\partial z^n}$, cioè che α sia integrale di un'equazione differenziale lineare in z, a coefficienti dipendenti dalla sola z, dell'ordine $n+1$. Ma l'integrale di una tale equazione è della forma

$$\alpha(x, z) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(x)\, \beta_i(z) \; ; \tag{1}$$

reciprocamente, ogni funzione di due variabili di questa forma ci rappresenta una curva tutta compresa nella varietà Π_n definita da $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$.

5. — Ricordiamo che una operazione A la quale applicata alle funzioni analitiche dà origine a funzioni pure analitiche, e che gode inoltre della proprietà distributiva, si dice *operazione funzionale distributiva.* Ognuna di queste operazioni dà pertanto una trasformazione dello spazio funzionale la quale, per ogni varietà lineare d'ordine finito di questo spazio, si riduce ad una omografia. Una tale operazione può essere *continua* per tutto lo spazio funzionale o per una parte (Γ) di esso. Dicendosi che A è continua per le funzioni di una classe (Γ) quando ad un numero g preso arbitrariamente corrisponde un numero h tale che alle funzioni della classe (Γ) minori in modulo di h per i valori della variabile compresi in un campo C, corrispondono funzioni che in un campo C' sono, in modulo, minori di g.

Essendo $\alpha(x, z)$ una funzione che per un campo continuo a due dimensioni, preso nel piano della variabile complessa z, appartiene alla classe (Γ), l'operazione A farà corrispondere alla curva $\alpha(x, z)$ una curva, ed in generale alle tangenti, ai piani osculatori,... della prima corrisponderanno le tangenti, i piani osculatori,... della seconda.

6. — In particolare, può accadere che un'operazione A lasci invariata tutta una curva, punto per punto. In tale caso, si avrà, essendo μ una funzione di z,

$$A(\alpha(x, z)) = \mu(z)\, \alpha(x, z) \; ;$$

ora tutte le operazioni della forma A^n, e più generalmente tutte quelle date da

$$B = c_0 A^0 + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_n A^n + \dots ,$$

le quali formano un gruppo permutabile con A, godono della medesima proprietà. Posto che la funzione $\mu(z)$ sia funzione analitica di z, si sviluppi z in serie di potenze di $\mu(z)$,

$$z = \Sigma\, k_n [\mu(z)]^n ,$$

indi si formi l'operazione

$$C = \Sigma\, k_n A^n ;$$

verrà per essa

(2) $$C[\alpha(x, z)] = z\, \alpha(x, z) .$$

La proprietà di una curva di rimanere invariante punto per punto per una operazione distributiva può quindi porsi sotto la forma (2).

7. — Se un'operazione C lascia invariante la curva $\alpha(x, z)$ in modo che sia verificata la (2), lascierà pure invariate (ma non punto per punto) le tangenti, i piani osculatori, ... le varietà Π_n osculatrici a questa curva, in modo che ogni varietà

$$h_0\, \alpha(x, z_1) + h_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z_1} + \dots + h_n \frac{\partial^n \alpha}{\partial z_1^n}$$

sarà trasformata in sè da quella operazione. L'insieme di queste varietà costituirà uno spazio Σ ad un numero di dimensioni arbitrariamente grande ed i punti di questo spazio daranno tutte e sole le soluzioni delle equazioni funzionali a coefficienti costanti

$$c_0 \varphi + c_1 C(\varphi) + c_2 C^2(\varphi) + \dots + c_n C^n(\varphi) = 0$$

di ordine arbitrario n.

Se il valore $z = 0$ fa parte del campo di valori di z per i quali è applicabile la (2), la $\alpha(x, 0)$ ci dà una radice dell'operazione C, e $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)_{z=0}$, $\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}\right)_{z=0}$, ... ci dànno le radici delle potenze successive di C; esse fanno pure parte dello spazio Σ.

8. — Data un'operazione A, le operazioni della forma

$$(3) \qquad G(\varphi) = \varphi + A(\varphi)t + A^2(\varphi)\frac{t^2}{1\cdot 2} + \dots + A^n(\varphi)\frac{t^n}{n!} + \dots$$

costituiscono un gruppo (gruppo ad un termine — *einglied* — nella terminologia del Lie) simile al gruppo delle traslazioni. In questo gruppo, A può prendere il nome di *trasformazione infinitesima.*

Applicando il gruppo di operazioni G ad un punto qualunque $\alpha(x)$ dello spazio funzionale, si ottiene una curva

$$\alpha(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A^n(\alpha)\frac{t^n}{n!}$$

che può dirsi la *traiettoria* del punto $\alpha(x)$ per le operazioni del gruppo G. Essa è pure traiettoria di uno qualunque dei suoi punti $\alpha(x, t_1)$. Abbiamo così risolto il

Problema I. *Dato un gruppo G generato dalla trasformazione infinitesima A, trovare la traiettoria di un punto qualunque dello spazio funzionale.*

9. — La tangente alla traiettoria in un punto qualunque di essa si ottiene facilmente per mezzo della trasformazione infinitesima. Si ha infatti che la tangente alla curva $\alpha(x, t)$ nel punto $t = t_1$ è data da

$$c_0\,\alpha(x, t_1) + c_1\,A[\alpha(x, t_1)],$$

il che equivale a

$$(4) \qquad \frac{\partial\,\alpha(x, t)}{\partial t} = A[\alpha(x, t)].$$

10. — Oltre alle traiettorie, curve che si trasformano in sè mediante le operazioni del gruppo (3) ma i cui punti si spostano lungo le curve medesime, possono esistere anche curve di cui tutti i punti sono invarianti; con queste curve rimangono invarianti (§ 7) le loro tangenti, i piani osculatori, le varietà lineari osculatrici ad un numero qualunque di dimensioni. Proponiamoci il

Problema II. *Dato un gruppo G, generato dalla trasformazione infinitesima A, trovare un curva di punti invarianti per tutte le operazioni del gruppo.*

Suppongasi che l'operazione A ammetta una radice α_0 nel nostro spazio funzionale; determiniamo una successione di funzioni

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ mediante le equazioni

$$(5) \qquad A(\alpha_0) = 0\,,\ A(\alpha_1) = \alpha_0\,,\ A(\alpha_2) = 2\alpha_1, \ldots, A(\alpha_n) = n\alpha_{n-1}, \ldots .$$

Si consideri allora la curva

$$\alpha(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

si avrà dalle (5)

$$A[\alpha(x, z)] = z\,\alpha(x, z)$$

e quindi, per ogni operazione G del gruppo (3),

$$G[\alpha(x, z)] = e^{tz}\,\alpha(x, z)\,.$$

11. — Dai precedenti miei lavori sul calcolo funzionale risulta che un'operazione funzionale distributiva può riguardarsi come generalmente determinata, almeno in via formale, quando si conosce la successione $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots$ delle funzioni che essa fa corrispondere ad una successione data di funzioni $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$. Ciò ammesso, è facile risolvere le due seguenti questioni, inverse dei problemi I e II.

Problema III. *Data una curva $\alpha(x, z)$, determinare un gruppo G per il quale essa sia traiettoria.*

La trasformazione infinitesima A del gruppo si ottiene facilmente: posto, infatti,

$$\alpha(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \frac{z^n}{n!}\,,$$

basta definire A colle condizioni

$$A(\alpha_0) = \alpha_1\,, \quad A(\alpha_1) = \alpha_2\,, \ldots, A(\alpha_{n-1}) = \alpha_n, \ldots,$$

ed ottenuta A si deduce senz'altro mediante la (3) il gruppo G, per cui si verifica immediatamente essere $\alpha(x, z)$ traiettoria di α_0.

Problema IV. *Data una curva $\alpha(x, z)$, determinare un gruppo G per il quale essa sia luogo di punti invarianti.*

Posto ancora

$$\alpha(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \frac{z^n}{n!}\,,$$

si determini un'operazione A colle condizioni

$$A(\alpha_0) = 0\,,\ A(\alpha_1) = \alpha_0\,,\ A(\alpha_2) = 2\alpha_1, \dots, A(\alpha_n) = n\alpha_{n-1}, \dots ;$$

se ne ricaverà immediatamente

$$A[\alpha(x, z)] = z\,\alpha(x, z)\,,$$

onde (§ 10) la medesima funzione sarà anche curva di punti invarianti per tutto il gruppo G.

12. — Possono esistere gruppi (3) tali che ogni loro curva traiettoria sia tutta contenuta in una varietà lineare di un numero determinato di dimensioni, $m-1$ ad esempio, la quale varietà dovrà naturalmente essere la Π_{m-1} osculatrice della curva stessa. Indicando con α un punto della traiettoria, la sua varietà lineare Π_{m-1} osculatrice in quel punto sarà

$$c_0\,\alpha + c_1\,A(\alpha) + \dots + c_{m-1}\,A^{m-1}(\alpha)\,;$$

se quindi la traiettoria è tutta in questa varietà, $A^m(\alpha)$ dovrà (§ 4) essere linearmente esprimibile per α, $A(\alpha), \dots, A^{m-1}(\alpha)$. L'operazione A soddisfarà pertanto ad una relazione

$$a_0\,A^0 + a_1\,A^1 + a_2\,A^2 + \dots + a_m\,A^m = 0 \tag{5}$$

a coefficienti indipendenti da x, ed ogni operazione G del gruppo (3) soddisfarà pure ad una simile relazione.

Ogni operazione ciclica, ad esempio, è di questa natura.

13. — Per dare qualche applicazione delle considerazioni svolte fin qui, prendiamo come primo esempio l'operazione di derivazione, che rappresenteremo con D. Essa genera il gruppo delle operazioni

$$\varphi + D(\varphi)\cdot t + D^2(\varphi)\frac{t^2}{1\cdot 2} + \dots, \tag{6}$$

le quali hanno per effetto di mutare x in $x+t$ nella funzione arbitraria $\varphi(x)$. Le curve traiettorie saranno dunque della forma $\varphi(x+z)$; la loro tangente sarà data dalla (4), che nel nostro caso si riduce a

$$\frac{\partial\,\alpha(x, z)}{\partial\,x} = \frac{\partial\,\alpha(x, z)}{\partial\,z}\,,$$

equazione il cui integrale generale è appunto $\varphi(x+z)$. Col metodo indicato al § 10, si può determinare la curva di punti invarianti del gruppo (6) che si trova essere e^{zx}; la varietà Π_n osculatrice di questa è (§ 5)

$$e^{zx}(c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n);$$

nello spazio funzionale Σ definito da queste si trovano (§ 7) tutte e sole le soluzioni delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

14. — Come secondo esempio, consideriamo l'operazione infinitesima definita da $A = x D(\varphi)$, φ essendo al solito la funzione arbitraria. Posto

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

si ha immediatamente

$$A^m(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} n^m a_n x^n,$$

onde il gruppo ad un termine generato da $A(\varphi)$ sarà

$$G(\varphi) = \varphi(e^{tz}).$$

Le curve traiettorie sono dunque della forma $\varphi(e^t x)$ o, ponendo $z = e^t$, della forma $\varphi(zx)$. La formula (4) dà per le tangenti a queste curve la condizione

$$z\frac{\partial \alpha}{\partial z} = x\frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

il cui integrale generale è appunto $\varphi(zx)$. La curva luogo dei punti invarianti si ottiene immediatamente col metodo del § 10, e viene, indicandola con $\alpha(x, z) = \Sigma\, \alpha_n(x) z^n$,

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = \log x, \dots, \alpha_n = \frac{1}{n!}(\log x)^n,$$

onde

$$\alpha(x, z) = x^z.$$

La sua varietà Π_n osculatrice è

$$x^z\{c_0 + c_1 \log x + \dots + c_n (\log x)^n\}.$$

15. — Consideriamo infine il caso in cui l'operazione A è una forma differenziale lineare d'ordine p:

$$A(\varphi) = \pi_0 D^p \varphi + \pi_1 D^{p-1} \varphi + \dots + \pi_p \varphi .$$

Formata mediante la (3) l'operazione generale del gruppo di cui A è trasformazione infinitesima, si avranno le curve traiettorie sotto la forma

$$\alpha(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n [\alpha(x)] \frac{z^n}{n!},$$

e questo è l'integrale generale dell'equazione a derivate parziali che ne dà le tangenti e che è, per la (4),

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = \sum_{i=0}^{p} \pi_i \frac{\partial^{p-i} \alpha}{\partial x^{p-i}} .$$

Volendo ora le curve di punti invarianti del gruppo o, ciò che è lo stesso, dell'operazione A, si avrà (§ 6) da risolvere l'equazione

$$A[\alpha(x, z)] = z\, \alpha(x, z) .$$

Questa è un'equazione differenziale lineare i cui p integrali di un sistema fondamentale sono funzioni analitiche di z: uno di questi essendo detto $\alpha_i(x, z)$, si potrà porre sotto la forma

$$\alpha_i(x, z) = \sum \alpha_{i,n}(x)\, z^n, \qquad (i = 1, 2, \dots, p),$$

dove

$$A(\alpha_{i,0}) = 0, \quad A(\alpha_{i,1}) = \alpha_{i,0}, \quad A(\alpha_{i,2}) = \alpha_{i,1}, \dots .$$

Si otterranno in tal modo p curve di punti invarianti, e saranno pure tali tutte quelle della forma

$$\sum_{i=1}^{p} c_i\, \alpha_i(x, z);$$

saranno pure invarianti per la trasformazione A, tutte le varietà lineari, di cui è ovvia l'interpretazione geometrica, della forma

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{h=0}^{m} c_{i,h} \frac{\partial^h \alpha_1(x, z)}{\partial z^h} .$$

16. — È facile trovare la condizione alla quale deve soddisfare una successione di funzioni $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ della x perchè $\Sigma\, \alpha_n z^n$ rimanga invariata quando lo spazio funzionale si trasforma mediante una forma differenziale lineare d'ordine p: questa condizione è espressa da

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_n' & \dots & \alpha_n^{(p)} \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} & \alpha_{n+1}' & \dots & \alpha_{n+1}^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n+p} & \alpha_{n+p+1} & \alpha_{n+p+1}' & \dots & \alpha_{n+p+1}^{(p)} \end{vmatrix} = 0,$$

dove cogli apici sono indicate le derivazioni rispetto ad x, ed $n = 1, 2, 3, \dots$.