

SALVATORE PINCHERLE

SALVATORE PINCHERLE

Sulle serie procedenti secondo le derivate successive di una funzione

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Vol. 11 (1897), p. 165–175

in: Salvatore Pincherle, *Opere Scelte*, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 1, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 378–387

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_1_378>

**Sulle serie procedenti secondo le derivate
successive di una funzione.**

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo;
11, 165-175 (1897).

Le serie ordinate secondo le derivate successive di una funzione presentano uno speciale interesse, per il fatto che esse possono servire alla rappresentazione analitica di ogni operazione distributiva, come ho dimostrato in un recente lavoro⁽¹⁾. Queste serie presentano sulle altre rappresentazioni analitiche delle operazioni distributive, in particolare sulle espressioni di esse mediante integrali definiti semplici o multipli, il vantaggio di non contenere elementi arbitrari quali le linee d'integrazione; inoltre i calcoli su quelle serie, quando ne sia verificata la convergenza, presentano una grande semplicità ed una notevole analogia con i calcoli sulle ordinarie serie di potenze⁽²⁾.

La presente Nota si divide in due parti. Nella prima parte si dà una condizione generale relativa alla convergenza delle serie ordinate secondo le derivate successive di una funzione; nella seconda parte si considera una classe particolare di tali serie, e cioè quelle che — per la relazione fra i loro coefficienti — si possono dire ricorrenti; tali serie presentano analogia colle ordinarie serie ricorrenti dell'algebra, ed è facile esprimere in termini finiti l'operazione funzionale che esse rappresentano.

⁽¹⁾ *Sulle operazioni funzionali distributive*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, febbraio 1895.

⁽²⁾ Vedi la Nota: *Della validità effettiva di alcuni sviluppi in serie di funzioni*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, gennaio 1896.

I. — Condizioni di convergenza.

1. — Indichiamo con T una porzione semplicemente connessa qualunque del piano della variabile complessa x (o di una riemanniana ad un numero qualsivoglia di fogli e che sia stata resa semplicemente connessa mediante un numero opportuno di tagli). Sia $\varrho(x)$ una funzione — nel senso generale della parola — dei punti di questo campo; questa funzione sia in T ad un valore, continua, finita, reale e positiva. Sia poi $\alpha_n(x)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), una successione data di funzioni analitiche regolari in T e che per ogni valore di x , preso in questo campo, soddisfino alla disequaglianza

$$(1) \quad |\alpha_n(x)| < \varrho^n(x), \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Con questa successione di funzioni costruiamo la serie

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)}{n!} \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n},$$

essendo $\varphi(x)$ una funzione analitica regolare in una porzione T_1 di T . Vogliamo mostrare come si possa determinare un'area in T_1 , per i punti della quale la serie (a) sia convergente assolutamente ed uniformemente.

2. — A questo effetto, definiamo la seguente funzione ad un valore, reale e positiva dei punti di T_1 . Se rappresentiamo con (c) l'insieme dei punti del contorno di T_1 (contorno che può constare di un sistema qualunque di linee e punti), ad ogni punto x dell'interno di T_1 corrisponde un limite inferiore per le distanze di x da (c); questo limite inferiore si indicherà con $\delta(x)$.

Si scorge subito come $\delta(x)$ sia una funzione perfettamente determinata per ogni punto x di T_1 ; come essa sia reale e positiva entro T_1 ; come sia nulla al contorno; come raggiunga un massimo in uno o più punti o in linee — ma non in aree — nell'interno di T_1 ; come, infine, descrivendo da un punto x_0 interno a T_1 il cerchio (x_0, r) ⁽¹⁾ tutto contenuto in T_1 , per ogni punto $\bar{x}$ interno a

(1) Si indica con questa notazione il cerchio di centro x_0 e di raggio r .

questo cerchio si abbia manifestamente

$$\delta(x_0) + r \geq \delta(\bar{x}) \geq \delta(x_0) - r,$$

onde la continuità di $\delta(x)$.

3. — Ciò posto, si può enunciare la seguente proposizione:

Se si trova in T_1 un punto per il quale sia

$$(2) \quad \varrho(x) < \delta(x),$$

esisterà tutta un'area i cui punti soddisfano a questa disuguaglianza, e in questa area la serie (a) è convergente assolutamente ed uniformemente e rappresenta quindi una funzione analitica.

Intanto, se esiste entro T_1 un punto per il quale sia verificata la (2), esisterà tutta un'area i cui punti verificheranno quella disuguaglianza, in seguito alla continuità di $\varrho(x)$ e di $\delta(x)$: sia T_2 questa area.

Indichiamo con x_0 un punto qualunque interno a T_2 ; per avere $\varrho(x_0) < \delta(x_0)$ si possono assegnare tre numeri positivi z_1, z_2, z_3 tali che sia

$$(3) \quad \varrho(x_0) < z_1 < z_2 < z_3 < \delta(x_0).$$

Essendo poi la $\varrho(x)$ continua, si può descrivere un cerchio (x_0, r) tale che per ogni suo punto sia

$$(4) \quad \varrho(x) < z_1.$$

D'altra parte, la funzione $\varphi(x)$ essendo regolare in T_1 sarà sviluppabile in serie di potenze di $x - x_0$ convergente nel cerchio $[x_0, \delta(x_0)]$; essa avrà dunque nel cerchio (x_0, z_3) un massimo valore assoluto m . La $\varphi(x + z_2)$ si può quindi sviluppare col teorema del TAYLOR:

$$\varphi(x + z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \frac{d^n \varphi}{dx^n}.$$

sotto la condizione $|x - x_0| + z_2 < \delta(x_0)$, cioè a fortiori per i punti x del cerchio $(x_0, z_3 - z_2)$, ed in questo cerchio sarà, come è noto,

$$(5) \quad \frac{1}{n!} \left| \frac{d^n \varphi}{dx^n} \right| < \frac{m}{z_2^n}.$$

Considerando ora la serie (a), e prendendo come intorno di x_0 il minore dei due cerchi (x_0, r) ed $(x_0, z_3 - z_2)$, si avrà in forza delle (1) e (4), per tutti i punti x appartenenti a quell'intorno,

$$|\alpha_n(x)| < \varrho^n(x) < z_1^n < z_2^n,$$

da cui risulta, per la (5), la convergenza assoluta ed in ugual grado della serie (a) per ogni punto dell'intorno considerato di x_0 , e di conseguenza per tutta l'area T_2 . La proposizione è così dimostrata.

4. — Chiamando *campo funzionale di convergenza* della serie (a) l'insieme delle funzioni analitiche $\varphi(x)$ che, sostituite in (a), la rendono uniformemente convergente nei punti di una area, si vede che a questo campo appartengono tutte le funzioni per le quali la distanza di un punto x di T dalla loro singolarità più prossima è, per qualche punto x , superiore a $\varrho(x)$. Se poi per $x = x_0$ si ha $\varrho(x_0) = 0$, ogni serie di potenze di $x - x_0$ convergente in un intorno di x_0 per quanto piccolo, appartiene al campo funzionale di convergenza della (a), che viene così ad essere, rispetto ad x_0 , una di quelle serie che in un lavoro citato ⁽¹⁾ ho chiamate di *prima specie*.

II. — Serie ricorrenti.

5. — Abbiassi l'equazione differenziale lineare non omogenea

$$(6) \quad \frac{d^m \psi}{dx^m} + \pi_1 \frac{d^{m-1} \psi}{dx^{m-1}} + \dots + \pi_m \psi = \varphi(x),$$

dove $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ e $\varphi(x)$ sono funzioni analitiche regolari nel campo T . Dico che si può esprimere la soluzione di questa equazione mediante una serie della forma (a), convergente per ogni funzione $\varphi(x)$; in altre parole, riguardando il primo membro della (6) come un'operazione $F(\psi)$ (forma differenziale lineare) da eseguirsi sulla funzione ψ , dico che l'operazione inversa $F^{-1}(\varphi)$ è rappresentabile mediante una serie (a) di prima specie. Ciò si può vedere nei due modi seguenti.

(¹) Della validità effettiva ecc., pag. 29.

6. — Si ponga

$$F^{-1}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) \frac{d^n \varphi}{dx^n},$$

dove le funzioni $\lambda_n(x)$ sono da determinarsi. Possiamo seguire⁽¹⁾ il metodo dei coefficienti indeterminati, e scriviamo all'uopo

$$F \left[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) \frac{d^n \varphi}{dx^n} \right] = \varphi(x);$$

applicando l'operazione distributiva F ai singoli termini della serie e ricordando la nota formula di D'ALEMBERT⁽²⁾, si ottiene fra i coefficienti $\lambda_n(x)$ il sistema di relazioni

$$(7) \quad F(\lambda_n) + F'(\lambda_{n-1}) + \frac{1}{1 \cdot 2} F''(\lambda_{n-2}) + \dots + \frac{1}{m!} F^{(m)}(\lambda_{n-m}) = 0, \\ (n = 1, 2, 3, \dots),$$

colla condizione iniziale

$$F(\lambda_0) = 1.$$

La (7) è qui un'equazione mista differenziale e alle differenze, di cui possiamo determinare l'integrale generale contenente m funzioni arbitrarie. Sia infatti $\varrho(x)$ un integrale dell'equazione $F = 0$; sia χ una funzione arbitraria, regolare in un intorno di $x = x_0$, dove x_0 è un punto qualunque interno a T , e sia posto per brevità

$$D^{-n} \chi(x) = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x \chi(x) dx^n.$$

Se in (7) sostituiamo a λ_n l'espressione

$$(-1)^n \varrho(x) D^{-n} \chi(x)$$

ed applichiamo la citata formula di D'ALEMBERT, scorgiamo senza fatica che l'equazione (7) medesima è soddisfatta per $n = m, m+1,$

⁽¹⁾ *Della validità effettiva ecc.*, pag. 31.

⁽²⁾ *Operazioni distributive: le equazioni differenziali lineari non omogenee*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, aprile 1896, pag. 302, formula (2).

$m + 2, \dots$. L'integrale generale della (7) si avrà, dunque, prendendo un sistema fondamentale $\varrho_1(x), \varrho_2(x), \dots, \varrho_m(x)$ d'integrali dell'equazione $F = 0$ ed altrettante funzioni arbitrarie $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$, sotto la forma

$$(6) \quad \lambda_n(x) = \sum_{i=1}^m (-1)^n \varrho_i(x) D^{-n} \chi_i(x),$$

$$(n = m, m + 1, m + 2, \dots).$$

Integrata così in modo generale l'equazione ricorrente (7), rimangono ancora da determinarsi le funzioni arbitrarie in modo da soddisfare alle equazioni di condizione delle $\lambda_n(x)$ per i valori $n = 0, 1, 2, \dots, m - 1$; cioè a

$$(9) \quad \begin{cases} F(\lambda_0) = 1, \\ F(\lambda_1) + F'(\lambda_0) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ F(\lambda_{m-1}) + F'(\lambda_{m-2}) + \dots + \frac{1}{(m-1)!} F^{(m-1)}(\lambda_0) = 0. \end{cases}$$

All'uopo, basta ricordare le relazioni fra il sistema d'integrali $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$ ed il sistema corrispondente di moltiplicatori, che indicheremo con $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$.

Queste relazioni, come è noto ⁽¹⁾, sono :

$$\sum_{i=1}^m \frac{d^h \varrho_i}{dx^h} \frac{d^k \mu_i}{dx^k} = \begin{cases} 0, & \text{per } h + k < m - 1, \\ (-1)^k, & \text{per } h + k = m - 1. \end{cases}$$

Tenendo conto di queste relazioni, si verifica facilmente che il sistema (9) è soddisfatto facendo $\chi_i = D^{-1} \mu_i$, ($i = 1, 2, \dots, m$), talchè lo sviluppo di ψ o $F^{-1}(\varphi)$ viene dato nella forma

$$(10) \quad F^{-1}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^m (-1)^n \varrho_i(x) D^{-(n+1)} [\mu_i(x)] \frac{d^n \varphi}{dx^n}.$$

7. — L'altro metodo per giungere a questo risultato è il seguente. Indicando ancora con $\varrho_i(x)$ e $\mu_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots, m$), un sistema fondamentale d'integrali ed il corrispondente sistema di

⁽¹⁾ Vedi, per es., SCHLESINGER: *Handbuch der lin. Differentialgl.*, Bd. I, pag. 63.

moltiplicatori della $F=0$, il metodo della variazione delle costanti arbitrarie di LAGRANGE fornisce l'espressione di φ o di $F^{-1}(\varphi)$:

$$F^{-1}(\varphi) = \sum_{i=1}^m \varrho_i(x) D^{-1} [\mu_i(x) \varphi(x)] .$$

Ora per lo sviluppo di $D^{-1} [\mu_i(x) \varphi(x)]$ si può applicare una formula che ho fatta conoscere recentemente⁽¹⁾ e di cui ho date le condizioni di validità. Essa ci dà

$$D^{-1}(\mu_i \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D^{-(n+1)}(\mu_i) \frac{d^n \varphi}{dx^n} ,$$

e sostituendo nella precedente espressione di $F^{-1}(\varphi)$, si ritrova immediatamente la (10).

8. — Si tratta ora di vedere se per la serie (10) così ottenuta sono verificate le condizioni di convergenza stabilite nella prima parte. È noto intanto che nell'area semplicemente connessa T , in cui l'equazione differenziale $F=0$ non ha alcun punto singolare, sono regolari le $2m$ funzioni $\varrho_i(x)$ e $\mu_i(x)$. Prendiamo un punto x_0 qualunque interno a T , e descriviamo un cerchio (x_0, r) il cui raggio sia inferiore alla minima distanza $\delta(x_0)$ di x_0 dal contorno di T . Entro (x_0, r) le $\varrho_i(x)$ avranno un massimo valore assoluto g_i ; inoltre si avrà

$$\mu_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1}(x - x_0) + a_{i,2}(x - x_0)^2 + \dots ,$$

e la serie

$$\sum |a_{i,n}| (x - x_0)^n$$

avrà pure in (x_0, r) un massimo valore assoluto: sia h_i . Essendosi posto

$$D^{-(n+1)} \mu_i = \int_{x_0}^x D^{-n} \mu_i(x) dx , \quad D^{-1} \mu_i = \int_{x_0}^x \mu_i(x) dx ,$$

si avrà manifestamente, entro (x_0, r) ,

$$|D^{-(n+1)} \mu_i| < \frac{h_i |x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} .$$

⁽¹⁾ Operazioni distributive: l'integrazione successiva, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, aprile 1896, pag. 239.

Posto dunque

$$\sum_{i=1}^m g_i h_i = k,$$

il coefficiente di $\frac{d^n \varphi}{dx^n}$ nella (10), ossia

$$\lambda_n = (-1)^n \sum_{i=1}^m \varrho_i(x) D^{-(n+1)} \mu_i(x)$$

verrà ad essere, in modulo, inferiore a

$$\frac{1}{n!} \frac{k(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Ma $x - x_0$ è minore di $\delta(x_0)$ e quindi entro il cerchio (x_0, r) la condizione (2) è soddisfatta.

La formula (10) rappresenta così in tutto l'intorno (x_0, r) di x_0 una funzione analitica regolare, la quale può essere continuata analiticamente in tutto T e che è la soluzione della equazione (6); in altri termini, essa vale a rappresentare una delle determinazioni dell'operazione F^{-1} . Possiamo aggiungere che, per le funzioni φ regolari nell'intorno di x_0 , la serie (10) è una di quelle che abbiamo dette di *prima specie*.

9. — La serie (10), per la relazione (7) alla quale soddisfano i suoi coefficienti, si può dire *ricorrente*. Non aggiungendo alla (7) le condizioni (9), ma lasciando invece arbitrarie le $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$, la equazione (7) determinerà un sistema λ_n di coefficienti per i quali la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) \frac{d^n \varphi}{dx^n}$$

avrà un significato più generale: essa rappresenterà cioè il risultato della operazione $F^{-1} G$, essendo G una forma differenziale lineare dell'ordine $m - 1$.

10. — Nel caso particolare che l'equazione (6) abbia i coefficienti costanti, e sia

$$(11) \quad F(\psi) = \frac{d^m \psi}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1} \psi}{dx^{m-1}} + \dots + a_m \psi = \varphi(x),$$

si può porre

$$(12) \quad F^{-1}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{d^n \varphi}{dx^n},$$

dove i coefficienti k_n sono costanti soddisfacenti alla relazione di ricorrenza

$$(13) \quad k_{n-m} + a_1 k_{n-m+1} + \dots + a_m k_n = 0.$$

La serie (12) differisce dunque da una delle serie ricorrenti elementari che si considerano in algebra, per il solo fatto della sostituzione delle derivate successive alle potenze di una variabile. Ma questa serie (12) presenta un inconveniente: essa non converge se non per funzioni $\varphi(x)$ assai particolari, e precisamente solo per funzioni trascendenti intere in cui la legge di decrescimento dei coefficienti è assoggettata a certe restrizioni.

È dunque preferibile sostituire allo sviluppo (11) la serie (10) precedentemente ottenuta, che si può rendere invece convergente per ogni funzione analitica $\varphi(x)$.

A questo effetto, consideriamo l'equazione caratteristica della equazione lineare a coefficienti costanti $F=0$, cioè:

$$(14) \quad f(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m = 0,$$

e supponiamo per semplicità le sue radici $z_1, z_2, \dots, z_m$ tutte semplici (lasciando al lettore la facile modificazione cui darebbe luogo il caso delle radici multiple). Gli integrali di $F=0$ saranno dati da

$$q_i(x) = e^{z_i x}, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

i moltiplicatori [integrali dell'equazione aggiunta di $F=0$ e per la quale l'equazione caratteristica si ottiene da (14) col cambiamento di z in $-z$] saranno dati da $c_i e^{-z_i x}$, dove le costanti c_i devono soddisfare il sistema

$$\sum_{i=1}^m c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m c_i z_i = 0, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^m c_i z_i^{m-2} = 0, \quad \sum_{i=1}^m c_i z_i^{m-1} = 1,$$

donde risulta immediatamente

$$c_i = \frac{1}{f'(z_i)},$$

essendo $f'(z)$ la derivata di $f(z)$. La formula (10) diviene così, nel nostro caso,

$$(15) \quad F^{-1}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^m \frac{(-1)^n e^{z_i x}}{f'(z_i)} D^{-(n+1)}(e^{-z_i x}) \frac{d^n \varphi}{dx^n}.$$

Questa, prendendo i limiti inferiori delle integrazioni indicate da $D^{-(n+1)}$ eguali a zero, converge, per valori di $|x|$ abbastanza piccoli, per ogni funzione analitica $\varphi(x)$ regolare intorno ad $x=0$, ed è sotto questo riguardo assai preferibile allo sviluppo (12). Nella Nota, più volte citata, *Sulla validità effettiva di alcuni sviluppi* ho già fatto conoscere, in un caso particolare, il vantaggio della sostituzione di uno sviluppo della forma (15) ad uno della forma (12); ho mostrato cioè che allo sviluppo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \varphi}{dx^n}$$

(convergente solo per le funzioni φ che siano quelle trascendenti intere in cui il rapporto di un termine al precedente tende a zero più rapidamente di $1/n$, e quindi serie di seconda specie) si può sostituire, come soluzione dell'equazione

$$\psi - \frac{d\psi}{dx} = \varphi,$$

lo sviluppo convergente per ogni funzione analitica $\varphi(x)$ regolare in un intorno di $x=0$ (serie di prima specie)

$$-e^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D^{-(n+1)}(e^{-x}) \frac{d^n \varphi}{dx^n}.$$