Salvatore Pincherle

## Notice sur les travaux

*Acta Mathematica*, Vol. **46** (1925), p. 341–362

*in*: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 1, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 45–63

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_1_45>

# 1 [194]. (*)

## Notice sur les travaux. (**)

Acta Mathematica (Stockholm);
**46**, 341-362 (1925).

### § I. — Systèmes de fonctions. Développements en série.

1. — Tandis que l'étude des développements d'une fonction arbitraire, au sens général de DIRICHLET, ou, comme on dit aussi, d'une fonction de variable réelle, constituait déjà, vers 1880, un

---

(*) (*R.*) Il numero in neretto fra parentisi quadra è il numero d'ordine della pubblicazione nello « Elenco delle pubblicazioni » alle pp. 17-42.

(**) (*R.*) Questa *Notice sur les travaux* venne richiesta spontaneamente e personalmente al PINCHERLE dal MITTAG-LEFFLER. Essa fornisce un quadro lucidissimo, ma senza dubbio troppo onestamente modesto ed obiettivo, della evoluzione del pensiero matematico del PINCHERLE. Appena tornato dal Congresso di Toronto nel Canadà, il PINCHERLE ricevette dal MITTAG-LEFFLER la seguente lettera:

*Tällberg, le* 4 *Octobre* 1924

*Mon cher ami,*

*À votre retour à l'Italie vous m'avez promis de vous occuper de la rédaction de la bibliographie de vos différents travaux depuis le premier jusqu'au dernier parû. (Type Poincaré, tome* 38 *des Acta.) Je suis assez indiscret de me permettre à vous rappeler de cette promesse. Il me fera une très grande joie de pouvoir bientôt publier ce travail. Veuillez bien m'informer combien de temps ça vous prendra à peu près. . . . . . . . .*

Il MITTAG-LEFFLER, dopo aver ricevuto dal PINCHERLE l'articolo richiesto, così rispose:

*Djursholm, le* 24-2-1925

*Mon cher ami,*

*Je vous remercie bien cordialement de votre analyse très intéressant que je viens de recevoir. Je pense que je pourrais le publier en très peu de temps dans le tome* 46 *des Acta, où vont paraitre des mémoires très remarquables de Harald Bohr à Copenhague, de Rolf Nevanlinna et Myrberg à Helsingfors . . . . . . . . .*

chapitre considérable de l'Analyse à la suite des travaux de DIRICHLET, de RIEMANN, de DU BOIS REYMOND, de DINI, etc., on n'avait guère étudié que dans des cas particuliers les développements de fonctions analytiques en séries ordonnées suivant les fonctions d'un système donné, comme ceux considérés par C. NEUMANN, HEINE, THOMÉ, FROBENIUS suivant les polynômes de LEGENDRE, les fonctions de BESSEL, les produits spéciaux de la forme $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$. Mais à cette époque paraît le Mémoire de WEIERSTRASS « Zur Funktionenlehre » qui contient son célèbre théorème sur les séries uniformément convergentes de fonctions analytiques, et qui permet d'aborder d'une façon générale l'étude des développements à caractère analytique, et c'est à cette étude que j'ai tâché d'apporter quelque contribution. Dans un Mémoire [**10**] (***) publié en 1882, j'étudie des séries de la forme $\Sigma\, \varphi_\nu(x) f_\nu(x)$ sous des hypothèses variées pour les deux systèmes de fonctions analytiques $\varphi_\nu(x)$ et $f_\nu(x)$; entre autres dans le cas où $\varphi_\nu(x) = c_\nu x^\nu$ et les $f_\nu(x)$ sont des fonctions régulières pour $x = 0$: hypothèse où se rangent à leur tour des cas particuliers importants. Je trouve quelles sont les fonctions régulières pour $x = 0$ qui admettent un développement de cette forme, j'en étudie les points singuliers en relation avec ceux de $f_\nu(x)$, et, parmi les cas spéciaux, j'envisage les séries de LAMBERT généralisées, qui donnent lieu à des relations, de nature arithmétique, de quelque intérêt. Dans ce Mémoire se trouve, peut-être pour la première fois, le concept de « système de fonctions limitées » dans « leur ensemble », depuis si commun, et aussi un théorème qui correspond, pour les aires planes, à la célèbre proposition de HEINE-BOREL. Au même sujet se rapporte la Note **11**, où se trouve une relation qui appartient à la théorie, alors pas encore ébauchée, des déterminants d'ordre infini.

2. — On sait qu'une fonction analytique régulière à l'intérieur d'une ellipse de foyers $\pm 1$ est développable (NEUMANN, HEINE) en série de polynômes de LEGENDRE. Ce théorème — qui, soit dit en passant, permet [**12**] de donner une forme particulièrement simple à la formule de MITTAG-LEFFLER pour une fonction pour laquelle

---

(***) (*R.*) Per ridurre le pagine di stampa, si è soppressa la « Bibliographie » posta dal PINCHERLE alla fine di questa « Notice ». Ai vari numeri d'ordine dei lavori di tale « Bibliographie » si sono quindi sostituti sistematicamente i corrispondenti numeri d'ordine (sempre in neretto) delle pubblicazioni nello « Elenco » alle pp. 17-42.

l'ensemble dérivé des singularités appartient à une de ces ellipses — doit dépendre d'une propriété générale qui met en rapport les courbes de convergence des séries ordonnées suivant les fonctions d'une suite donnée $f_n(x)$ avec la nature de la fonction génératrice des $f_n(x)$; c'est cette propriété que j'ai obtenue, dans un cas assez étendu [15, 16, 42]. Je pars d'une fonction de deux variables $T(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn}(x - x_0)^m y^n$, dont les singularités sont les couples $x, y$ qui vérifient une équation $f(x, y) = 0$, à premier membre entier, rationnel ou trascendant: la détermination des courbes $E$ de convergence des séries $\Sigma c_n p_n(x)$, où $p_n = \Sigma a_{mn}(x - x_0)^m$, dépend des modules des racines de cette équation, et le théorème cité de NEUMANN n'est que le cas particulier où $f(x, y) \equiv 1 - 2xy + y^2$. Pour des classes étendues de fonctions $p_n(x)$, on peut déterminer un système associé $P_n(y)$, tel que dans un domaine limité nécessairement par des courbes $E$, on ait $\Sigma p_n(x) P_n(y) = \dfrac{1}{y - x}$: dans ce cas, on obtient des *systèmes de relations qui représentent une première extension à l'infini de la théorie des déterminants;* il s'y présente le fait de la possibilité de *développements de zéro,* que FROBENIUS avait déjà rencontrés dans le cas des polynômes $p_n(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)$. On trouve qu'à $m$ points singuliers des fonctions associées correspondent $m$ développements de zéro linéairement indépendants. Dans le travail 16 (n$^{\text{os}}$ 10-21) on étudie, pour la première fois peut-être, les rapports entre les propriétés d'une série $\Sigma a_n x^n$ et celles de la série $\Sigma \dfrac{a_n x^n}{n!}$, rapports que la transformation exponentielle de M. BOREL a mis depuis si en évidence. Au même ordre d'idées se rattache un Mémoire qui date de la même époque [17], où une opération sur les séries de puissances, généralisation de leur dérivation, permet de considérer une infinité de transformations de même nature.

3. — Les courbes $E$ d'égal module des racines de l'équation $f(x, y) = 0$ jouent encore un rôle important dans le calcul des intégrales définies [23]. Si, au lieu de l'équation du second degré qui se présente pour les polynômes de LEGENDRE, on prend une équation cubique, on a une extension de ces polynômes constituée par un système récurrent d'intégrales elliptiques considerées comme fonctions de l'invariant absolu [56]; les développements en série qui s'y rapportent sont étudiés dans un travail plus étendu [55, 59]; les courbes $E$ sont ici des quartiques rationnelles, sections planes

d'une curieuse surface algébrique homaloïdique [57] dont les propriétés ont été ensuite étudiées par M. MONTESANO [1].

4. — Toutefois, certains systèmes de fonctions, d'un emploi très fréquent en Analyse, ne rentrent pas dans le cadre fixé par les travaux précédents : parmi eux, les systèmes de factorielles et leurs généralisations les plus immédiates. Un groupe de travaux [41, 112, 114, 119] s'occupe précisément des séries

$$\Sigma\, c_n\, x\,(x-1)\ldots(x-n+1) \tag{1}$$

et

$$\Sigma \frac{c_n}{x\,(x+1)\ldots(x+n)}\,. \tag{2}$$

A côté de la transformation d'une série (2) en série de fractions simples, j'ai pu préciser les conditions de convergence de ces séries en mettant en rapport le champ de convergence avec le caractère asymptotique des coefficients $c_n$ ; j'ai étudié les développements de zéro de la forme (1), la relation fonctionnelle qui rattache la série (2) à la série de puissances $\Sigma \frac{c_n}{t^{n+1}}$ ; enfin, la notion d'*ordre* d'une fonction en l'un de ses points, notion due à M. HADAMARD, m'a permis d'énoncer [119, 126] de la façon la plus simple, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction donnée admette un développement de la forme (2). De même que les séries de puissances, les sèries (2) peuvent, sans être convergentes, représenter asymptotiquement une fonction [123]. La théorie de ces séries s'étend en partie [157] aux dévelloppements en série suivant les $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ ou leurs inverses quand les points $a_n$ tendent à l'infini sans sortir d'un angle donné. Dans 66, Mémoire spécial sur l'interpolation et qui débute par des remarques sur les ensembles devenues depuis familières, j'avais étudié et discuté des problèmes relatifs à la détermination d'une fonction analytique par la connaissance des valeurs qu'elle prend dans un ensemble dénombrable de points, et ces problèmes portent à l'étude de séries de la même forme, dont les conditions de convergence présentent des difficultés particulières.

---

[1] Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 21 maggio 1891.

5. — Parmi les systèmes de fonctions qui donnent des développements en série de quelque intérêt, celui formé par les dérivées successives d'une même fonction n'est pas à négliger, si l'on pense que c'est celui qui se présente dans le développement de TAYLOR. J'ai consacré quelques recherches à ce sujet [81, 89], qui d'ailleurs se rattache étroitement à ceux des travaux analysés au § III. De semblables développements, qui à première vue paraissent n'avoir qu'un champ de validité assez restreint, peuvent, au moyen d'un procédé analogue à celui qui conduit aux célèbres formules de WEIERSTRASS sur les fonctions entières et de M. MITTAG-LEFFLER sur les fonctions méromorphes, s'étendre à des classes très étendues de fonctions; en outre [89], de même qu'une fonction rationnelle s'exprime par une série récurrente de puissances, de même l'intégrale d'une équation différentielle linéaire à coefficients analytiques et à second membre s'exprime par une série ordonnée suivant les dérivées successives de ce second membre et dont les coefficients jouissent d'une propriété remarquable de récurrence, où les multiplicateurs de l'équation jouent un rôle considérable.

## § II. — Systèmes récurrents. Équations aux différences. Fractions continues et leurs généralisations.

6. — Pour que l'étude des développements des fonctions en séries ordonnées suivant les fonctions d'un certain système $S$ soit susceptible d'être suffisamment approfondie, il faut naturellement que le système $S$ soit caractérisé par quelque propriété essentielle. L'examen des cas particuliers connus m'a amené à considérer la récurrence linéaire entre les fonctions du système $S$ comme l'un des caractères les plus aptes à conduire à des résultats bien définis; et parmi les questions qui exigent une réponse, il faut signaler les suivantes :

A. Etant donné un système de fonctions $p_n(x)$ — en particulier, de polynômes — liées par une relation linéaire recurrente (équation linéaire aux différences) existe-t-il, et sous quelles conditions, un système associé $P_n(y)$ tel que l'on ait

$$\frac{1}{y-x} = \Sigma\, p_n(x)\, P_n(y)\,?$$

B. Le système associé étant déterminé formellement, quelles sont les conditions de validité du développement précédent?

C. Quelles sont les conditions de possibilité et d'unicité du développement d'une fonction donnée en série de $p_n(x)$?

7. — Pour aborder l'étude de ces questions, l'on doit s'occuper préalablement des propriétés générales des systèmes récurrents. Si la récurrence est du premier ordre, on répond assez aisément [43, 44] aux questions ci-dessus; mais les difficultés sont plus considérables pour les ordres supérieurs. Dans la récurrence du second ordre, on rencontre l'algorithme des fractions continues algébriques, pour lesquelles j'ai dû d'abord [46] donner quelques théorèmes de convergence, et j'ai aussi abordé [45, 47] l'étude des propriétés d'une fonction définie *a priori* par une fraction continue algébrique, question inverse de celle qui se pose ordinairement; j'y ai pu donner des indications sur la dépendance entre les singularités de la fonction et l'ensemble des racines des dénominateurs des réduites.

8. — Le cas des relations récurrentes d'ordre quelconque, qui conduit à la généralisation de l'algorithme des fractions continues algébriques, est plus intéressant. La généralisation des fractions continues au point de vue arithmétique avait été indiquée par JACOBI et par d'autres auteurs, mais il restait à faire celle des fractions continues algébriques: les problèmes que je m'étais proposé m'ont obligé de l'aborder, dans une Note préventive [49] et plus tard, en 1890, dans un Mémoire étendu [53], où se trouve résolu le problème suivant: Étant données $p$ séries de puissances décroissantes de $x$, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$, déterminer des polynômes entiers $A_1$, $A_2, \ldots, A_p$ en sorte que $A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + \ldots + A_p\sigma_p$ manque du plus grand nombre possible de termes initiaux pour des degrés donnés de $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Ce problème conduit à une équation linéaire aux différences d'ordre $p$, qui pour $p = 2$ est celle qui sert de base à la théorie des fractions continues algébriques, dont nombre de propriétés s'étendent au nouvel algorithme. Pour une étude plus approfondie de la solution trouvée [60, 72] (1), on peut s'arrêter à l'équation aux différences du troisième ordre

$$F_{n+3} = a_n F_{n+2} + b_n F_{n+1} + c_n F_n \tag{3}$$

(1) Dans l'intervalle entre la publication de ces deux Mémoires, l'un des maîtres de l'Analyse, HERMITE, faisait paraître aux « Annali di Matematica » (S. II, T. 21, 1893) un Mémoire intitulé *Sur la généralisation des fractions continues algébriques,* dans le même ordre d'idées.

(l'extension à un ordre quelconque ne présentant pas des difficultés essentielles), sur laquelle je définis le concept, fondamental pour cette étude, d'*intégrale distinguée,* concept qui n'est autre que la généralisation de celui de *valeur* de la fraction continue: cette intégrale, en effet, est celle dont le rapport à toute autre intégrale de la même équation tend à zéro pour $n \to \infty$, de même que si $\alpha$ est la valeur de la fraction continue et $P_n/Q_n$ est une réduite, le rapport de $P_n - \alpha\, Q_n$ à toute autre intégrale de l'équation récurrente du 2ième ordre tend à zéro pour $n \to \infty$. L'existence de cette intégrale correspond donc à la convergence dans le cas de la fraction continue; pour la déterminer, je me sers d'une notion qu'il vaudrait peut-être la peine de développer davantage, celle de dérivée d'une suite $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ par rapport à une autre $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$, en entendant par là la limite de $(h_n - \alpha)/(k_n - \beta)$, si $\alpha$, $\beta$ sont les limites respectives de $h_n$ et $k_n$; le calcul de ces dérivées offre d'ailleurs, naturellement, la plus grande analogie avec celui des dérivées ordinaires. Pour la détermination de l'intégrale distinguée on peut se servir, entre autres moyens, du théorème bien connu de POINCARÉ sur la limite du rapport de deux intégrales d'une équation aux différences, théorème auquel j'ai consacré une Note spéciale [125]. Dans le cas où le coefficient $b_n$ de l'équation (3) contient la variable, on peut donner les conditions de valabilité de la solution des problèmes traités dans les travaux 53, 60 et 72, savoir:

1⁰) étant données les deux séries de puissances $\sigma_1$, $\sigma_2$ de $1/x$, déterminer les polynômes $A_n, B_n, C_n$ en sorte que $A_n + B_n\sigma_1 + C_n\sigma_2 = 0$ soit vérifiée jusqu'aux termes de degré le plus haut possible;

2⁰) représenter simultanément $\sigma_1$, $\sigma_2$ par deux fractions rationnelles $Q_n/P_n$, $R_n/P_n$ de la façon la plus approchée possible pour un degré donné du dénominateur $P_n$.

Les résultats précédents trouvent des applications dans des problèmes d'approximation d'intégrales définies, généralisation [48] de ceux qui se présentent dans la théorie des quadratures mécaniques de GAUSS. Dans ces recherches, on est nécessairement amené à considérer, à côté d'une équation aux différences, celle qu'on peut appeler son *adjointe* [42; 64; 268, p. 237 et suiv.] (1) analogue de l'équation adjointe d'une équation différentielle linéaire et qui donne lieu aussi à la notion de multiplicateurs de l'équation.

---

(1) V. aussi E. BORTOLOTTI, Rendic. della R. Accad. dei Lincei, 1898, p. 349-356 et 257-265 du T. $7_1$, p. 46-55 et 74-82 du T. $7_2$.

9. — Les recherches précédentes peuvent se poursuivre dans deux directions distinctes. D'une part, les équations linéaires récurrentes donnent, par leurs premiers membres, des opérateurs dont on peut étudier l'algèbre: dans leur calcul, l'élément fondamental est l'opérateur $\Theta$ (*état varié* des anciens géomètres) défini par $\Theta f(x) = f(x+1)$. Je consacre à cette algèbre, que LIBRI et d'autres auteurs avaient traité d'une façon purement formelle, un Mémoire étendu [76] et plusieurs Notes [70, 71, 74]: en outre de la multiplication, division, divisibilité et décomposition en facteurs de ces opérateurs et de l'extension de la règle de RUFFINI des puissances des opérateurs, où jouent un rôle remarquable les fonctions *aleph* de WRONSKY, j'étudie les séries de puissances de l'opérateur $\Theta$, leur convergence, leur emploi pour la résolution des équations aux différences, la possibilité d'un prolongement de ces séries analogue au prolongement analytique. Le procédé d'intégration donné par ces séries peut se mettre en rapport [71] avec les résultats rappelés au n. 8 de la présente analyse.

10. — Ces recherches, d'un caractère général, permettent de reprendre la question du développement d'une fonction donnée en série ordonnée suivant les fonctions $p_n$ d'un système récurrent donné. On suppose maintenant [24, 64] que l'équation récurrente $(A)$, de l'ordre $p$, ait pour coefficients des polynômes entiers en $n$ du degré $m$; une solution $p_n$ de l'équation aura comme fonction génératrice la série $\Sigma p_n x^n$, intégrale d'une équation différentielle linéaire $(B)$ de l'ordre $m$ et dont les coefficients sont des polynômes entiers en $x$: or, il existe en général une détermination des constantes de l'intégrale de l'équation différentielle pour laquelle la série génératrice converge dans le cercle le plus grand possible. Cela a lieu quand $p_n$ est l'intégrale distinguée de l'équation $(A)$, et on peut la déterminer par une méthode fondée sur l'emploi de la transformation dite de HEINE. Si maintenant les coefficients de $(A)$ contiennent un paramètre $z$ au premier degré, on peut développer $1/(z-x)$ en série de la forme $\Sigma q_n(z) p_n(x)$, où les $q_n$ vérifient l'équation adjointe de $(A)$: la considération de l'intégrale distinguée permet de déterminer le domaine de convergence uniforme de cette série et par suite la possibilité du développement d'une fonction donnée en série de $p_n(x)$. À ce travail [64], qui met en lumière l'intérêt des équations différentielles comme génératrices de systèmes récurrents, se rattachent des questions d'expression de la valeur d'une fraction continue comme rapport de deux intégrales définies

[58], extension de résultats bien connus de GAUSS sur le rapport de deux fonctions hypergéométriques.

## § III. — Opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies.

### a) Partie générale.

**11.** — Le problème, dont on a parlé ci-dessus, du développement d'une fonction en série ordonnée suivant les fonctions d'un système donné, se rattache étroitement, comme on le voit sans peine, à la question de l'inversion d'une intégrale définie. J'ai donc été naturellement amené à m'occuper d'équations de la forme

$$\int_{(c)} A(x, y)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y = f(x), \tag{4}$$

où $A$ et $f$ sont des fonctions données, $\varphi$ est inconnue : c'est à dire de ce qu'on a appelé depuis *équations intégrales de première espèce.* Mais ce problème m'a conduit à envisager le premier membre de (4) comme un opérateur (*fonctionnelle*) appliqué au sujet $\varphi(y)$; l'opération définit une correspondance (ou transformation) fonctionnelle entre le sujet $\varphi(y)$ et le résultat $f(x)$, jouissant essentiellement de la propriété distributive (caractère linéaire). L'ensemble de semblables transformations est extrèmement vaste et il est clair qu'on ne peut obtenir des résultats concrets qu'en spécifiant, soit la fonction $A(x, y)$ — appelée depuis *noyau* (Kern) — soit le chemin d'intégration $(c)$. La littérature mathématique possédait depuis un siècle un exemple remarquable de ces correspondances dans la relation de LAPLACE et ABEL entre les fonctions génératrices et leurs déterminantes. Il est clair que des correspondances analogues à (2) peuvent s'exprimer par des intégrales multiples.

**12.** — J'ai considéré pour la première fois une fonctionnelle de la forme (4) dans une Note [22] publiée dans ce recueil ; j'ai donné ensuite, dans un travail plus étendu [25] et après un rapide aperçu historique, la définition et les propriétés générales de ces opérations considérées dans le domaine complexe ; je considère d'abord des noyaux de la forme $1/(y - x)$ ou $x/y$ et j'obtiens ainsi des opérateurs qui servent à isoler les singularités des fonctions uniformes : ici se présente comme cas particulier une opération déjà considerée par M. APPELL et génératrice de ses polynômes [26]. Je passe ensuite au cas d'un noyau rationnel, $A(x, y) = \dfrac{g(x, y)}{f(x, y)}$: ici l'expression $\int_{(c)} A(x, y)\, \varphi(y)\, dy$ représente, dans les différentes régions du plan séparées par les branches de la courbe que $f(x, y) = 0$ fait correspondre à $(c)$, des fonctions différentes dont on peut donner la liaison par un théorème dont un cas particulier avait été donné par HERMITE. Plusieurs remarques sur l'équation (4) et sa résolution pour des formes particulières du noyau terminent ce Mémoire. Quand $f(x) = 1/(z - x)$ et le noyau est rationnel et singulier pour les points de $f(x, y) = 0$, l'équation (4) se résout [29] par une somme d'intégrales abéliennes normales de seconde espèce attachées à la riemannienne de $f(x, y) = 0$. L'étude des fonctionnelles $A(\varphi)$ données par le premier membre de (4) est reprise dans un Mémoire [28] publié aux « Acta » ; il s'agit de reconnaître si l'équation (4) peut être résolue par une espression de forme analogue

$$\varphi(x) = \int_{(r)} A(x, y) f(y)\, dy\,.$$

La question se ramène à l'étude des noyau « qui conservent la dérivation » ; cas qui a pris une importance considérable dans la théorie postérieure de la composition selon M. VOLTERRA ; ce cas, où le noyau a la forme $\alpha(y - x)$, permet en particulier de retrouver deux formules remarquables dues à HALPHEN. Enfin, si les singularités du noyau sont données par une équation algébrique, on peut déterminer la nature analytique du résultat $A(\varphi)$ en rapport avec celle du sujet $\varphi(y)$.

### b) Opérations spéciales.

13. — A côté de ces questions générales, se place l'étude d'opérations ou de transformations fonctionnelles spéciales dont l'utilité est démontrée par l'application à de nombreux problèmes. L'une d'elles, transformation de HEINE, lie $f(x)$ à $\varphi(y)$ par la relation

$$f(x) = \int_{(c)} \frac{\varphi(y)\, dy}{y - x}\;;$$

HEINE l'a appliquée à diverses questions sur les équations différentielles. Or, on peut montrer [51] que cette transformation conserve un sens et maintient ses propriétés caractéristiques, même si $\varphi(y)$ est infinie sur le chemin d'intégration, pourvu qu'elle le soit d'ordre fini. Cette transformation se généralise par celle à laquelle M. SCHLESINGER a donné le nom d'EULER, et j'ai montré [61, 99 et surtout le Mémoire plus étendu 63] que les équations de la classe de FUCHS ont des transformées de la même classe ayant les mêmes points singuliers, ce qui permet d'intégrer par des intégrales définies de nombreux types d'équations non homogènes. Ce problème d'intégration se généralise [63] si l'on prend comme noyau non plus $(x-y)^\alpha$, mais $P^\alpha(x, y)$, où $P$ est un polynôme entier et $\alpha$ une nouvelle variable.

14. — Mais parmi ces transformations fonctionnelles, l'une des plus intéressantes et des plus fécondes est, sans contredit, celle de LAPLACE-ABEL. Je m'en suis occupé d'abord [30] en définissant cette transformation $E$ par ses deux propriétés caractéristiques, indépendamment de toute expression analytique : ces propriétés consistent dans la transformation de la multiplication par la variable en la dérivation, et dans la transformation de celle-ci en la multiplication, à part le signe ; la forme de l'expression qu'on peut donner à l'opérateur $E$ dépend de la classe fonctionnelle à laquelle appartient le sujet. En particulier, si cette classe est un corps algébrique, il se transforme en une classe de fonctions qui dépendent linéairement d'un nombre fini de transcendantes dont les propriétés sont, pour ainsi dire, une image de celles du corps algébrique. La méthode peut contribuer à une classification des trascendantes, et dans cet ordre d'idées on voit bien, par exemple, la place qu'occupe le logarithme intégral [186] dans une semblable classification, ou aussi les fonctions de BESSEL [30]. La théorie s'applique aussi [36, 37] à la résolution de l'équation

$$\Sigma h_n \varphi(x+\alpha_n) = f(x), \tag{5}$$

d'abord pour le cas des $h_n$ constantes, puis pour celui des $h_n$ rationnelles : dans le § 5 du premier de ces Mémoires la théorie de la transformation prélude à celle que M. BOREL utilisera plus tard dans la sommation exponentielle : notons, entre autres, la notion de *direction limite* (ibid.) que le polygone de sommabilité de cet éminent géomètre viendra plus tard mettre mieux en valeur. Dans le cas de l'équation (5) à coefficients variables, les difficultés sont naturellement plus considérables; certaines d'entre elles sont résolues par l'emploi d'une équation linéaire à coefficients transcendants et par une méthode [34] analogue à celle qui sert à la démonstration du premier théorème de M. MITTAG-LEFFLER sur les fonctions méromorphes.

15. — Des questions analogues forment l'objet de 124, 183, 186; mais c'est le Mémoire 133 qui donne une vue d'ensemble sur ce sujet, en se plaçant au point de vue de l'inversion d'une intégrale définie (équation intégrale de première espèce) à noyau de la forme $f(y-x)$, et qui résout le problème d'intégration d'une équation linéaire d'ordre infini, à coefficients constants et à second membre, ainsi qu'un remarquable problème de moments, ou système d'équations linéaires en nombre infini. Les dérivées d'ordre non entier, déjà considerées par LIOUVILLE, RIEMANN, etc., ainsi que les diverses expressions qu'on peut en donner, se présentent dans cette théorie de la façon la plus naturelle, et l'étude de ces dérivées, fondée directement sur l'ensemble des propriétés caractéristiques [113], conduit aux mêmes expressions. Ces dérivées constituent, par rapport à l'indice, un groupe à un paramètre dont la transformation infinitésimale, au sens de LIE, donne une nouvelle opération fonctionnelle [136] qu'on peut appeler *logarithme fonctionnel*, et qui jouit de propriétés remarquables.

16. — Les transformées de LAPLACE des fonctions rationnelles et algébriques donnent une première classe de transcendantes; mais d'autres classes sont données à leur tour par la transformation de transcendantes: ainsi [38, 39] aux équations différentielles linéaires à coefficients rationnels en $e^t$ correspondent des équations linéaires aux différences à coefficients rationnels, et cette remarque permet d'établir un *principe de dualité* entre les deux généralisations connues des fonctions hypergéométriques, celle de POCHHAMMER et celle de M. GOURSAT. Une expression asymptotique de $\Gamma(x)$ pour $x \to \infty$ dans le sens imaginaire qui se trouve dans 39 a été attribuée à d'autres auteurs, mais M. MELLIN m'en a récemment révendiqué la priorité. Aux fonctions hypergéométriques, à leurs généralisations et à plusieurs questions qui s'y rattachent, j'ai dédié un Mémoire étendu [73] de caractère didactique, mais inspiré aux idées exposées ci-dessus. Enfin, c'est encore la même transformation qui permet de montrer le lien entre la sommation exponentielle de M. BOREL et

les développements asymptotiques de POINCARÉ [123]; d'attribuer aux séries de puissances toujuors divergentes un sens concret, par l'intermédiaire des séries de puissances du symbole $D$ de dérivation [111]; enfin, d'étendre aux développements asymptotiques [132] un remarquable théorème d'HURWITZ sur les singularités d'une fonction qui dépend de deux fonctions données.

### c) Fonctions déterminantes.

17. — Tandis que les recherches qu'on vient de citer considèrent la transformation de LAPLACE à un point de vue qui appartient au calcul fonctionnel, d'autres, qui appartiennent plus spécialement à la théorie des fonctions, étudient les propriétés des fonctions analytiques définies par les expressions

$$(6) \qquad f(x) = \int_a^\infty e^{-tx} \varphi(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \int_0^c \psi(t)\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t\,.$$

Ici, $\varphi$ et $\psi$ peuvent n'être pas analytiques; je démontre [126] que si (6) est convergente pour une valeur $x_0$, elle l'est pour toute valeur $x$ dont la partie réelle est plus grande que celle de $x_0$; je détermine ensuite, en plusieurs cas, la position et la nature des singularités de $f(x)$ (pôles, points critiques algébroïdes ou logarithmiques) d'après l'allure asymptotique de $\varphi(t)$.

18. — On peut approfondir davantage l'étude des propriétés de $f(x)$ si $\varphi(t)$ ou $\psi(t)$ sont aussi analytiques: ainsi, si $\psi(t)$ est régulier au point zéro et si l'on en connaît l'étoile de MITTAG-LEFFLER, on peut démontrer [126] que

$$f(x\,,\,a) = \int_0^a \psi(t)\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$$

admet la même étoile comme fonction de $a$ et est méromorphe en $x$ avec les pôles de premier ordre aux points $0\,, -1\,, -2\,, \ldots$; et l'on retrouve [41, 69] la double forme du développement d'une telle fonction méromorphe. Si $\psi(t)$ est analytique, on déduit immédiatement de la fonction déterminante les théorèmes connus de LE ROY, FABER, etc., et d'autres encore sur les relations entre le caractère des coefficients d'un développement de TAYLOR et les singularités de la fonction qu'il représente [126, 188]. Enfin, d'autres Notes [50, 138, 152, 189] précisent la détermination de l'abscisse de convergence en rapport avec l'allure asymptotique de la fonction génératrice, démontrent que la déterminante d'une déterminante est une fonction s i m p l e, c'est à dire qui n'a d'autre singularité qu'une coupure s'étendant à l'infini, et prouvent que des développements de la forme $\Sigma \frac{c_n}{(x+a_0)(x+a_1)\dots(x+a_n)}$ peuvent jouer le même rôle que les développements asymptotiques en séries de puissances de POINCARÉ et se présentent de même [50] dans l'intégration d'équations différentielles linéaires.

## § IV. — Etude synthétique des opérations linéaires.

19. — Les expressions intégrales de la forme (4), les expressions linéaires différentielles, celles aux différences, amènent au concept général d'opérations fonctionnelles linéaires (ou distributives). Si l'on détermine le champ fonctionnel auquel on applique de semblables opérateurs, on peut en déterminer de nombreuses propriétés d'une façon synthétique et, pour ainsi dire, géométrique, en donnant ainsi naissance à une branche du calcul fonctionnel ayant un caractère qualitatif, tandis qu'on peut dire *quantitatifs* les chapitres de ce même calcul selon les principes connus de VOLTERRA, ARZELÀ, HILBERT, HADAMARD, TONELLI, P. LÉVY, etc.. Entre les deux points de vue, il y a une différence qui n'est pas sans analogie entre celle qui sépare la théorie des fonctions de variables réelles au sens de DIRICHLET, de celle des fonctions analytiques selon WEIERSTRASS.

20. — J'ai entrepris, dans l'ordre d'idées synthétique, de nombreuses recherches, qui, à part quelques travaux d'un caractère historique [101, 128, 149], peuvent se diviser en trois groupes.

Je commence par envisager l'ensemble des séries de puissances comme un espace dont chaque série est un point, et je trace l'esquisse d'une géométrie de cet espace, qui permet d'apporter dans ces recherches un certain degré d'intuition [87, 94]. Les opérations linéaires sont les homographies de cet espace, et on cherche d'en ramener l'étude à celle de la composition d'opérations simples telles que la multiplication, la dérivation et la sobstitution : dans cette recherche, la permutabilité des opérations joue un rôle essentiel, et c'est l'évaluation de l'*écart* de la permutabilité d'une opération donnée par rapport à une opération étalon qui m'a amené à la considération de ce que j'ai appelé la *dérivée fonctionnelle*, qui présente avec la dérivation habituelle une analogie algorithmique réellement surprenante [77, 117]. On en déduit un développement des opérations linéaires soit en série de puissances du symbole $D$ de dérivation [77, 92] (au moyen d'une formule que j'ai appelée formule de D'ALEMBERT généralisée, parcequ'elle avait été rencontrée par ce savant dans un cas particulier, et qui joue, dans notre calcul, un rôle analogue à celui de la formule de TAYLOR dans le calcul des fonctions), soit en série de puissances de $D^{-1}$ [84]; la théorie générale, développée dans 92 et dans l'ouvrage 268 publié en collaboration avec M. AMALDI, trouve des applications aux équations linéaires différentielles, aux différences et aux substitutions [78, 80, 85] et détermine les opérations au moyen de leurs relations avec leurs dérivées fonctionnelles [79, 103]. Parmi ces applications, notons celles qui regardent les opérations aptes à introduire ou à détruire des singularités dans les fonctions d'une classe donnée et dont l'exemple le plus banal est donné par la division ou multiplication par $x - a$, qui introduit ou fait disparaître un pôle de premier ordre au point $x = a$. J'ai consacré à ce sujet un Mémoire étendu [109]: la théorie élémentaire de la divisibilité n'est qu'un premier degré d'une propriété bien plus générale qui se fonde sur des principes analogues, en met en lumière la véritable essence et s'applique à des classes étendues de singularités. A ce sujet se rapportent aussi les travaux 31, 95, 97, 141, 142, 178.

21. — Un deuxième groupe considère plus spécialement nos opérations comme des homographies d'un espace à une infinité (dénombrable) de dimensions. La dégénérescence de ces opérations acquiert un intérêt particulier avec la considération de leurs racines, et ici se place une remarque fondamentale [91], retrouvée beaucoup plus tard par d'autres auteurs, savoir: tandis que dans un espace à un nombre fini de dimensions une homographie dégénérée a des racines, et projette l'espace sur un espace à un nombre moindre de dimensions, dans l'espace à une infinité de dimensions, on peut avoir ou l'une (dégénérescence de première espèce) ou l'autre (dégénérescence de deuxième espèce) de ces propriétés. Dans la dégénérescence de première espèce, les racines des opérations permutables ont des relations remarquables [75] qui permettent d'obtenir, par une méthode synthétique d'une extrême simplicité, la théorie des

diviseurs élémentaires [83] et la composition canonique d'une homographie, et les mêmes procédés permettent [136] de retrouver d'autres résultats géométriques.

22. — On sait quelle est l'importance, dans la théorie des équations différentielles linéaires, de l'équation *adjointe* d'une équation donnée. Il y a lieu de considérer une équation analogue dans la théorie des équations linéaires aux différences (v. ci-dessus, n. 8) et quant aux opérateurs qui constituent les premiers membres de l'équation et de son adjointe, la relation est celle qui passe entre deux matrices réciproques. La théorie synthétique des opérations linéaires permet de définir l'adjointe d'un opérateur d'une façon générale et d'en déduire les propriétés principales [96, 153].

23. — Les travaux énumérés dans le présent § s'occupent des fonctionnelles appliquées aux fonctions analytiques indépendamment de leur représentation par des intégrales définies. Mais dans un troisième groupe de travaux, qui forcément s'enchevêtrent en partie avec ceux des groupes précédents, la théorie synthétique des opérations linéaires est mise en rapport avec celle des équations intégrales. Dans un ancien travail, déjà cité [91], se trouve, dans un cas assez remarquable, le *déterminant infini* qui joue un si grand rôle, au cas général, dans les travaux de M. FREDHOLM; on démontre que ce déterminant est une fonction entière du paramètre et on en déduit les éléments qui ont été nommés depuis nombres et fonctions caractéristiques (*Eigenwerte* et *Eigenfunktionen*). Dans le même ordre d'idées, mais pour des cas bien plus généraux, les travaux 129 et 145 se proposent d'établir, avec un minimum d'hypothèses, la résolution par rapport à $\varphi$ de l'équation fonctionnelle $\varphi - k\,A(\varphi) = f$, $A$ étant une opération linéaire, et de distinguer par un *a priori* synthétique, les trois cas qu'on peut dire de VOLTERRA, de FREDHOLM et du spectre continu de HILBERT : on y indique aussi de quelle façon la théorie de la permutabilité, si amplement développée par M. VOLTERRA, peut être présentée indépendamment de la représentation intégrale. Cette indépendance n'est pas superflue; le travail 145 montre en effet que des opérations intégrales, ayant comme noyau soit la série uniformément convergente $\sum_1^\infty \alpha_n(x)\,\beta_n(y)/k_n$, soit la limite en moyenne d'une suite de sommes $\sum_1^m \alpha_n(x)\,\beta_n(y)/k_n$, $(m = 1, 2, \ldots)$, peuvent former le sous-

groupe d'un groupe d'opérations linéaires qui, tout en jouissant de propriétés analogues, ne sont pas en général des opérations intégrales. Enfin le travail 181 traite de la structure de l'espace caractéristique correspondant à une racine multiple du déterminant de FREDHOLM, qui donne lieu à une application de l'algèbre associative générale où se présentent d'une façon spontanée les éléments qu'on nomme, dans cette algèbre, *idempotents* et *nilpotents.*

24. — Si le noyau d'une opération intégrale se prend sous la forme $\Sigma\, \alpha_n(x)\, x^n/y^{n+1}$, où les $\alpha_n(x)$ sont des séries de puissances, on obtient les fonctions caractéristiques de la manière la plus simple [159] et le développement classique de FREDHOLM s'y présente d'une façon tout à fait spontanée : parmi de nombreuses applications auxquelles peut donner lieu cette forme de noyau, notons les problèmes d'itération analytique, en particulier la résolution de l'équation de SCHRŒDER.

## § V. — Problèmes d'itération.

25. — Le dernier travail qu'on vient de citer représente, pour ainsi dire, la transition à des recherches sur l'itération ; et une Note [161] développe précisément l'application dont on vient de parler. Une autre Note s'occupe de l'itération dans le domaine réel [156] dans le but de contribuer à la résolution d'équations fonctionnelles du type de BABBAGE ; d'autres abordent, dans des cas particuliers, le problème de l'itération *en grand* des fonctions rationnelles (qui recevait peu après des développements si importants dans les travaux de MM. JULIA, FATOU, RITT) en approfondissant l'étude de l'itération de la fonction quadratique [162, 163, 164, 168], et celle d'un polynôme entier [170, 172, 173] dont on détermine l'ensemble des éléments invariants. L'itération complète de $x^2 - 2$, c'est à dire étendue à des indices non entiers, conduit à la remarque curieuse [171] que les polynômes $V_n$ bien connus de SERRET, qui résolvent l'équation $V_n - x\, V_{n-1} + V_{n-2} = 0$, sont les itérées de $x^2 - 2$ pour les valeurs $r$ de l'indice, où $r$ est le logarithme de $n$ dans la base 2. Enfin, le travail 176 contient un assez large résumé de résultats sur l'itération.

## § VI. — **Travaux divers.**

26. — En dehors des groupes qu'on vient d'énumérer, d'autres travaux se rapportent à des sujets variés d'Analyse. Le caractère arithmétique des coefficients des séries de puissances qui représentent des fonctions algébriques, exponentielles ou logarithmiques est bien connu, d'après des théorèmes donnés par EISENSTEIN et par HEINE; des théorèmes analogues peuvent s'énoncer [40, 35] pour les coefficients des séries de puissances qui vérifient des équations linéaires différentielles ou aux différences, à coefficients rationnels. La Note [121] donne les conditions sous lesquelles la série d'ABEL

$$\varphi(x + \alpha) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - n\beta)^{n-1}}{n!} \frac{d^n \varphi(x + n\beta)}{d x^n}$$

est applicable à une fonction analytique. — Les théorèmes d'HERMITE sur les coupures des fonctions représentées par des intégrales définies sont généralisés dans les travaux 21, 23, 27. — La Note 99 étend à des déterminants plus généraux la propriété du wronskien. — Les remarquables théorèmes de M. HADAMARD et d'HURWITZ sur les singularités de la fonction dont les coefficients du développement de TAYLOR sont formés avec les coefficients des développements de deux fonctions données ont aussi formé objet d'étude: une nouvelle démonstration du théorème d'HADAMARD [100] me semble en mettre mieux en lumière l'essence et permet de le généraliser, et le théorème d'HURWITZ [104, 130] s'applique non seulement aux singularités polaires, mais aussi à d'autres beaucoup plus générales et s'étend aussi [132] aux développements asymptotiques. — Un ancien essai [6] étend à des classes de fonctions entières les relations entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique, question reprise plus tard par M. MAILLET. — Pour l'étude des fonctions doublement périodiques, on peut prendre comme point de départ celle des fonctions à multiplicateur [7, 8, 22], méthode qui présente quelques avantages et conduit à des formules intéressantes: elle a été reprise depuis par M. RAUSENBERGER. — La formule de M. MITTAG-LEFFLER, qui permet d'isoler les singularités d'une fonction méromorphe, contient comme terme additif une fonction entière qu'il n'est pas toujours aisé de déterminer dans les applications; il n'est donc pas sans intérêt d'indiquer des cas où la détermination en est possible [120] et la question se met en rapport avec la sommation d'une série divergente. — Dans la théorie des quadratures mécaniques et dans des questions analogues, se présente la question d'approcher une fonction donnée par une fonction rationnelle en sorte que la différence soit du degré maximum en $x$ ou en $1/x$. A parité de calcul, on peut obtenir une approximation plus grande si l'on approche la fonction par une expression quadratique $(P+\sqrt{Q})/R$, où $P, Q, R$ sont des polynômes entiers [52, 118]. — La Note 154 montre que la formule intégrale de CAUCHY, qui donne la valeur d'une fonction $\varphi(x)$ synectique dans une aire quand on en connait les valeurs au contour de l'aire, s'applique encore si à ces valeurs on substitue une fonction $p(s)+i\,q(s)$ des points de l'aire, où $p(s)$, $i\,q(s)$ sont les limites auxquelles convergent en moyenne la partie réelle et l'imaginaire de $\varphi(x)$ quand $x$ tend au contour. — Un problème d'interpolation [108] conduit à la résolution d'un système infini d'équations linéaires dont les coefficients sont les puissances des nombres naturels. — Enfin, l'examen critique [18], paru en 1884, de la façon dont on peut procéder pour comparer l'allure de fonctions qui tendent à l'infini : sujet qui a donné lieu depuis aux belles recherches de M. BOREL sur l'échelle des ordres d'infinitude ; la conclusion à laquelle j'arrive est que, quelles que soient les bases d'un calcul de ces ordres qui doive satisfaire à des postulats convenables, on ne pourra jamais y assujétir la totalité des fonctions, mais seulement des classes plus on moins étendues.

27. — Je mentionne encore une recherche de physique pour la détermination des constantes de capillarité pour divers liquides [1, 2]; quelques Notes sur les surfaces minima [3, 4]; une exposition des principes pour l'introduction des fonctions analytiques selon les idées de WEIERSTRASS [9]; des Notes sur l'Arithmétique et l'Algèbre [14, 72, 65, 68, 106, 115, 135]; sur le calcul des probabilités [158, 160]; les commémorations de WEIRSTRASS, HERMITE, BELTRAMI, DINI, ARZELÀ et autres, quelques recensions [150, 182, 187] et des questions pédagogiques [144, 165, 177].