SALVATORE PINCHERLE

Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Serie 3, Vol. **3** (1882), p. 149–180

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 1, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 64–91

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_1_64>

2 [10].

Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna;
(4) **3**, 149-180 (1882).

Mentre la sviluppabilità in serie di determinata natura costituisce già, per le funzioni di variabile reale, un vero corpo di dottrina [1], invece per le funzioni analitiche essa fu finora l'oggetto di un numero relativamente scarso di lavori isolati [2]. Ma una recente Memoria del Prof. WEIERSTRASS [3] ha richiamato l'attenzione degli analisti sulle espressioni in serie atte a rappresentare, entro il campo della loro convergenza in egual grado, funzioni o rami di funzioni analitiche. Col presente lavoro cerco di apportare un lieve contributo alla teoria di tali sviluppi, studiando nella prima parte le condizioni di convergenza per alcune serie di specie determinata, e nella seconda le condizioni sotto cui date funzioni analitiche si possono sviluppare in serie di tale forma.

I.

1. — Abbiasi una successione di funzioni analitiche in numero infinito

(1) $$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \dots, f_\nu(x), \dots$$

---

(1) Specialmente in seguito ai lavori del Prof. DINI, consegnati nel suo recente libro: *Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche ecc.*, Pisa 1880.

(2) Citeremo: per le serie di funzioni sferiche, NEUMANN (Memoria separata, Halle 1862) e THOMÉ (J. di Crelle, t. 66, p. 337); per le funzioni di BESSEL, NEUMANN (Crelle, t. 67, p. 312); per le serie che hanno per termine generale il prodotto dei primi n fattori di un prodotto infinito o la ridotta n^{sima} di una frazione continua, FRŒBENIUS (J. di Crelle, t. 73).

(3) *Zur Functionenlehre* (Monatsbericht. der Berlin. Akad., agosto 1880).

date, e ad un valore, entro una porzione connessa A del piano della variabile complessa x. Ognuna di queste abbia carattere razionale nell'intorno di ogni posto dell'interno del campo A, quindi un numero finito di infiniti d'ordine finito. Si denoteranno con

$$(2) \qquad i_\nu, \; i'_\nu, \dots, i_\nu^{(r)}, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots),$$

gl'infiniti della funzione $f_\nu(x)$ compresi entro il campo A.

In uno stesso punto i potranno essere infinite più funzioni del sistema (1); in tal caso il punto i si conterà tante volte quante sono le funzioni che in esso divengono infinite.

2. — I punti del sistema (2) essendo in numero infinito, è noto dai principî generali della teoria delle grandezze discrete che dovranno esistere nell'interno o sul contorno del campo stesso uno o più punti, che si denoteranno con j e si diranno *punti limiti* del sistema (2), i quali sono definiti dalla proprietà che in qualunque loro intorno, per quanto piccolo, cadono infiniti punti del sistema.

Se uno stesso punto i fosse punto d'infinito per infinite funzioni del sistema (1), quel punto andrebbe contato fra i punti limiti j.

I punti j possono essere in numero finito, isolati nell'interno o sul contorno del campo A; possono altre volte essere in numero infinito, ed anche costituire linee, cioè possono esistere linee tali che su qualunque loro arco finito cadono sempre infiniti punti j. Una di queste linee potrebbe essere, in tutto od in parte, il contorno stesso di A.

3. — Se i punti j sono isolati, si tolgano dal campo A per mezzo di cerchi aventi i centri nei punti stessi e raggi piccoli quanto si vuole; se costituiscono linee, si tolgano per mezzo di striscie sottili quanto si vuole. Si otterrà in tal guisa un campo J privo di punti limiti j, e che potrà essere connesso o composto di più pezzi connessi, secondo i casi.

Se nel campo J così definito si trovano ancora punti del sistema (2), questi saranno isolati ed in numero finito: e togliendo dal campo J cerchi aventi i centri in quei punti e raggi piccoli quanto si vuole, si otterrà un nuovo campo che si dirà K, e che sarà connesso o sconnesso insieme con J. E nell'intorno di tutti i punti del campo K le funzioni del sistema (1) avranno carattere razionale intero.

4. — A questo punto si presenta da fare sulle funzioni del sistema (1) una ricerca importante, che mi sembra dar luogo a diffi-

coltà non lievi, e sulla quale, per quanto io sappia, mancano considerazioni generali: intendo parlare della ricerca del limite cui tendono, entro il campo dato, le funzioni del sistema per $\nu = \infty$ [1]. In ciò che segue si è tentato di togliere tale difficoltà assoggettando le funzioni del sistema (1) ad una certa limitazione, e per enunciarla in termini precisi, sarà d'uopo premettere alcune definizioni.

a) Si dirà che le funzioni di una successione (1) *rimangono finite per* $\nu = \infty$ e per un valore x_0 di x, se si potrà assegnare un numero N positivo e tale che sia, per qualunque valore di ν,

(3) $$|f_\nu(x_0)| < N \text{ [2]}.$$

I numeri N pei quali è soddisfatta la disuguaglianza (3) hanno un limite inferiore: lo indicheremo con n.

b) Si dirà che le funzioni di una successione (1) rimangono finite per $\nu = \infty$ nell'intorno di un posto $x = x_0$, se i numeri n corrispondenti ai varî punti dell'intorno hanno un limite superiore finito, che indicheremo con $L(x_0)$.

L'intorno cui si allude sia un cerchio di centro x_0 e di raggio ϱ: è chiaro che entro tutti i cerchi concentrici e di raggio inferiore varrà la stessa proprietà. Il limite superiore dei raggi ϱ — relativamente all'attuale proprietà — sia $r(x_0)$; diremo propriamente *intorno* di x_0 il cerchio di centro x_0 e di raggio $r(x_0)$ [3].

c) Si dirà infine che le funzioni di una successione (1) rimangono finite per $\nu = \infty$ entro tutto un campo C, se si può assegnare un numero positivo N tale che per tutti i valori di x presi entro quel campo, e per tutti i valori di ν, sia

$$|f_\nu(x)| < N.$$

5. Se per tutti i punti di un campo connesso C e del contorno di esso è soddisfatta la condizione b), sarà soddisfatta la condizione

---

[1] In tal proposito non conosco che la ricerca del limite per $\nu = \infty$ delle funzioni sferiche $P_\nu(x)$ (HEINE, *Handubuch der Kugelfunctionen*) e del limite cui tendono i termini delle ridotte dello sviluppo delle serie di GAUSS in frazioni continue (THOMÉ, J. di Crelle, t. 66 e 67).

[2] Col simbolo $|a|$ si indica il modulo, o valore assoluto, del numero qualunque a.

[3] In circostanza analoga (convergenza in egual grado di una serie nell'intorno di un punto) il Prof. TANNERY, nella sua traduzione della Memoria citata del Prof. WEIERSTRASS, propone la parola *domaine* (Bulletin de DARBOUX, 1881). L'A. tedesco usa *Berzik*.

c) entro tutto il campo C; questa osservazione non è però che un caso particolare di una proposizione generale, che credo non inutile di enunciare, benchè ovvia, perchè torna utile in varie circostanze.

Teorema (*). *Se ad ogni punto x_0 di un campo connesso C e del contorno, corrisponde un valore ed uno solo di una quantità X (funzione di x nel senso più generale della parola) e se si può assegnare un tale intorno di x_0 che il limite superiore dei valori assoluti di X corrispondenti ai punti dell'intorno sia un numero finito $L(x_0)$, esisterà un numero N tale che sia in tutto il campo*

$$|X| < N. \tag{4}$$

Dimostrazione. Al variare di x_0 nel campo C, varia l'intorno corrispondente, e varia il limite superiore $L(x_0)$ delle X relative ai punti dell'intorno. Questi limiti superiori avranno dunque alla lor volta un limite superiore L in C; dico che L non è infinito.

Infatti esisterà (per le proposizioni generali sulle grandezze variabili) almeno un punto x' entro C o sul contorno, definito dalla proprietà che in qualunque intorno di x', per quanto piccolo, il limite superiore delle $L(x_0)$ sia ancora L. D'altra parte, e per l'ipotesi, al punto x' corrisponde un intorno di centro x' e di raggio r' tale che il limite superiore dei valori assoluti di X corrispondenti ai punti di quell'intorno sia un numero finito L'.

Si considerino ora i punti compresi entro un cerchio di centro x' e di raggio $r'/2$, e che indicheremo genericamente con x''. Per la prima considerazione, il limite superiore delle $L(x'')$ è la stessa L: d'altra parte i punti di un intorno di x'' di raggio non maggiore di $r'/2$ essendo entro l'intorno r' di x', i valori corrispondenti di X non potranno superare il numero finito L'; onde il limite superiore L non può superare L', cioè sarà finito. Adunque, per ogni numero N maggiore di L', sarà soddisfatta la (4), c. d. d. (1).

(*) (*R.*) Questo teorema corrisponde, per i campi piani, alla celebre proposizione detta di HEINE-BOREL.

(1) Nello stesso modo si dimostra: *Se ad ogni punto x_0 di un campo connesso C e del contorno corrisponde un valore ed uno solo della quantità X, e ad ogni x_0 corrisponde un tale intorno che i valori di $|X|$ corrispondenti ai punti dell'intorno abbiano un limite inferiore diverso da zero, si potrà assegnare un numero positivo M, diverso da zero, tale che per tutto il campo C sia $|X| > M$.*

Il teorema (DINI, *Fondamenti della teoria delle funzioni di variabile reale,* Pisa 1878) sulla continuità uniforme di una funzione continua in tutti i punti di un

Corollario. Se le funzioni di una successione (1) rimangono finite per $\nu = \infty$ nell'intorno di tutti i punti dell'interno e del contorno di un campo connesso C, esse rimangono finite per $\nu = \infty$ in tutto il campo.

6. — La serie

$$f_0(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \{f_\nu(x) - f_{\nu-1}(x)\} \tag{5}$$

potrà, in certi casi, dare il *limite* al quale tendono le funzioni $f_\nu(x)$ per $\nu = \infty$. La condizione del rimaner finite le funzioni per tutti i valori di ν (compreso $\nu = \infty$) entro un dato campo C coincide in quei casi colla convergenza in egual grado della serie precedente entro il campo C.

7. — D'ora innanzi, si supporrà che le funzioni del sistema (1) soddisfino alla condizione di rimaner finite per $\nu = \infty$ entro tutto il campo definito a § 3 con J, dovendosi al più escludere un numero finito di funzioni, d'indice non mai superiore all'intero fisso n.

Abbiasi inoltre una seconda successione di funzioni

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \dots,\ \varphi_\nu(x), \dots \tag{6}$$

regolari entro tutto il campo J e tali che la serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x) \tag{7}$$

sia convergente incondizionatamente ed in egual grado nell'intorno di tutti i posti del campo J.

Ciò posto, dico che:

La serie

$$S(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x) f_\nu(x) \tag{8}$$

campo ad una dimensione (teorema che rimarrebbe valido anche se il campo della variabile fosse a più dimensioni), ed il teorema di WEIERSTRASS (Memoria citata) che una serie convergente in egual grado nell'intorno di tutti i punti di un dato campo, è convergente in egual grado entro tutto il campo medesimo, sono casi particolari di queste proposizioni generali.

rappresenta entro tutto il campo J un ramo ad un valore di funzione analitica monogena, se J è connesso, e se J è sconnesso, tanti rami di funzioni analitiche (anche diverse) quanti sono i pezzi separati di cui è composto J: le quali funzioni non hanno nei punti di J singolarità essenziali, ma al più un numero finito d'infiniti ordinarî nei punti dove divengono infinite le funzioni (1).

D i m o s t r a z i o n e. a) S'incominci dallo studiare l'espressione (8) nella vicinanza di un punto x_0 del campo definito con K al § 3. Perciò si descriva dal punto x_0 come centro un cerchio che sia tutto compreso entro K e che diremo *intorno* di x_0. Per l'ipotesi fatta sulle funzioni $f_\nu(x)$, tolte alcune di esse d'indice inferiore ad n, ed anche tutte le

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \dots,\ f_n(x)$$

si potrà trovare un numero N positivo tale che sia, per tutti i valori di x dell'intorno di x_0,

$$|f_\nu(x)| < N, \qquad (\nu = n+1, n+2, \dots).$$

Entro tutto l'intorno del posto x_0 si mantengono pure finite le funzioni

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \dots, f_n(x)\,;$$

ed indicando rispettivamente i limiti superiori dei loro valori assoluti in quell'intorno con

$$l_0,\ l_1,\ l_2, \dots,\ l_n$$

e detto M il massimo fra gli $n+2$ numeri

$$l_0,\ l_1,\ l_2, \dots,\ l_n,\ N,$$

si avrà, per tutti i valori di x dell'intorno di x_0,

$$|f_\nu|\,(x) < M, \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2, \dots).$$

Talchè entro quell'intorno si avrà

$$|S(x)| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |f_\nu(x)\, \varphi_\nu(x)| < M \sum_{\nu=0}^{\infty} |\varphi_\nu(x)|,$$

ed essendo la serie (7) convergente in egual grado ed incondizionatamente nell'intorno di x_0, lo stesso varrà per $S(x)$.

Da ciò, e per un teorema fondamentale dato dal Prof. WEIERSTRASS (1), segue che la $S(x)$ si può trasformare entro l'intorno considerato del posto x_0 in una serie ordinata per le potenze intere e positive di $x - x_0$, e che essa definisce quindi in quell'intorno un *elemento* (2) di funzione analitica di x. Questo elemento si può proseguire di mano in mano in tutto il campo K se questo è connesso, e separatamente nelle varie parti di K se non lo è: nel primo caso la serie rappresenta un ramo ad un valore di una funzione analitica monogena, nel secondo può rappresentare rami di funzioni diverse.

b) Si consideri ora la $S(x)$ nell'intorno di un punto i_0 preso fra i punti i appartenenti al campo J. Le funzioni del sistema (1) che divengono infinite in quel campo J sono essenzialmente in numero finito, epperciò l'intero n si può prendere superiore all'indice dell'ultima funzione che è infinita in un punto di J.

Siano ora

$$f_{\alpha_1}(x),\ f_{\alpha_2}(x),\ f_{\alpha_3}(x), \ldots, f_{\alpha_r}(x),$$

con

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_r \leq n,$$

le funzioni del sistema (1) che divengono infinite nel posto i_0, e si indichi con

$$\Sigma' \varphi_\nu(x) f_\nu(x)$$

la differenza

$$S(x) - \varphi_{\alpha_1}(x) f_{\alpha_1}(x) - \varphi_{\alpha_2}(x) f_{\alpha_2}(x) - \ldots - \varphi_{\alpha_r}(x) f_{\alpha_r}(x).$$

Collo stesso ragionamento fatto nella parte a) della presente dimostrazione, si prova che entro un intorno di i_0 costituito da un cerchio di centro i_0 e di raggio inferiore alla minima distanza di due punti i del campo J, si ha

$$|f_\nu(x)| < N, \qquad \text{(esclusi per } \nu \text{ i valori } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r),$$

(1) Memoria citata *Zur Functionenlehre*, § 2.

(2) Ibid, § 3. V. anche il mio *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi di C. Weierstrass* (Giornale di Battaglini, t. 18, cfr. p. 114).

essendo N un numero positivo assegnabile; onde la serie

$$\Sigma' \varphi_\nu(x) f_\nu(x)$$

rappresenta nell'intorno di i_0 un elemento di funzione analitica e come tale sviluppabile in serie di potenze di $x - i$, che diremo $P(x - i)$; onde

$$S(x) = \varphi_{\alpha_1}(x) f_{\alpha_1}(x) + \varphi_{\alpha_2}(x) f_{\alpha_2}(x) + \dots + \varphi_{\alpha_r}(x) f_{\alpha_r}(x) + P(x - i).$$

Questa serie rappresenta una funzione che nel punto i_0 diviene infinita d'ordine finito, e nei punti comuni al campo J e K coincide con quella già considerata in a).

Segue da ciò che la serie $S(x)$ rappresenta entro tutto il campo J, se connesso, un ramo ad un valore di funzione analitica senza posti singolari essenziali, e al più con un numero finito d'infiniti ordinari nei punti dove divengono infinite le funzioni (1). Se J non è connesso, la serie rappresenta entro ogni pezzo di J un tal ramo di funzione analitica.

8. — Dalla proposizione generale che precede si possono trarre molte conseguenze, facendo ipotesi particolari sia sul campo dato A, sia sulle funzioni del sistema (6), sia su quelle del sistema (1).

Nei tre paragrafi che seguono considereremo alcuni dei casi particolari che si possono ottenere in questi tre modi.

9. — Facciamo dapprima alcune ipotesi particolari sul campo A.

a) Se i punti i d'infinito delle funzioni del sistema (1) si addensano all'infinito, per modo che nell'interno di qualunque linea chiusa tracciata nel piano se ne trovi soltanto un numero finito, per campo J si potrà assumere un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio grande quanto si vuole. Se poi, fissato il raggio del cerchio J ed estratto dalla serie (1) un numero finito di funzioni, le altre rimangono finite per $\nu = \infty$ e la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x)$$

rimane entro tutto il cerchio convergente in egual grado, si potrà dire che la serie $S(x)$ rappresenta una funzione monogena che per tutti i valori finiti di x si comporta regolarmente, o ha al più infiniti d'ordine finito insieme alle funzioni (1), ed ha (in generale) una singolarità essenziale per $\nu = \infty$.

b) Se i punti i si addensano verso i punti di una circonferenza [1], per modo che entro qualunque cerchio concentrico inferiore se ne trovino soltanto in numero finito, per campo J si potrà assumere un cerchio concentrico al dato, e di raggio inferiore di tanto poco quanto si vuole. Se poi, fissato il raggio del cerchio J, ed estratte dal sistema (1) quelle funzioni in numero finito che divengono infinite nei punti i del cerchio J, le altre rimangono finite per $\nu = \infty$ e la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x)$$

converge in egual grado entro il cerchio, si potrà dire che la serie $S(x)$ rappresenta una funzione regolare o al più con infiniti d'ordine finito entro tutto il cerchio dato, esclusa la circonferenza. Fuori di esso cerchio, la stessa espressione può rimanere valida ma rappresentare una funzione diversa [2].

10. — Si possono ora fare ipotesi speciali sulle funzioni del sistema (6).

a) Supponiamo dapprima che esse si riducano a costanti

$$c_0,\ c_1,\ c_2, \dots,\ c_\nu, \dots$$

tali che la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$$

sia convergente incondizionatamente. In questo caso si può enunciare che:

Se le funzioni del sistema (1) *sono tali che escluse quelle in numero finito che divengono infinite entro il campo J, le altre rimangono finite per $\nu = \infty$, la serie $\Sigma\, c_\nu f_\nu(x)$ rappresenta entro esso campo uno o più rami di funzioni analitiche, secondochè il campo J è o no connesso.*

---

[1] O in generale di una linea chiusa semplice qualsiasi.

[2] Come da esempi dati nella Memoria citata del Prof. WEIERSTRASS.

b) Si faccia poi

$$\varphi_\nu(x) = c_\nu\, x^\nu,$$

essendo la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, x^\nu$$

convergente entro un cerchio di raggio R e quindi convergente in egual grado entro un cerchio concentrico di raggio R' inferiore ad R di tanto poco quanto si vuole.

Se i punti definiti con j si trovano sulla circonferenza del cerchio R per modo che entro R' vi sia un numero finito di punti i, il cerchio R' si potrà assumere come campo J e se le funzioni del sistema (1) (escluse quelle in numero finito che divengono infinite nei punti i di J) rimangono finite per $\nu = \infty$ (*), si avrà che la serie

$$\Sigma\, c_\nu\, x^\nu f_\nu(x) \tag{9}$$

rappresenterà entro il cerchio R, esclusa la circonferenza, una funzione o ramo di funzione analitica regolare, o avente al più infiniti d'ordine finito nei punti i.

Se i punti i sono tutti sulla circonferenza e le funzioni del sistema (1) rimangono finite per $\nu = \infty$, la serie rappresenta una funzione regolare entro tutto il cerchio R e quindi sviluppabile in una ordinaria serie di potenze di x.

11. — Fra gl'infiniti sviluppi che si possono avere dalla serie (9) quando si particolarizzi la forma delle $f_\nu(x)$, ne vogliamo considerare alcuni che ci sembrano applicazioni non sprovviste d'interesse della teoria precedente.

a) Si ponga dapprima

$$f_\nu(x) = \frac{1}{2^\nu}\left(1 - \frac{x^2}{2\,(2\,\nu+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\,(2\,\nu+2)\,(2\,\nu+4)} - \dots\right).$$

Queste funzioni soddisfano alla condizione di rimaner finite per

(*) (R.) Cioè *limitate nel loro insieme.*

$\nu = \infty$, per tutti i punti di un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio grande quanto si vuole. Si ha infatti, per $|x| = r$,

$$\left| 1 - \frac{x^2}{2(2\nu + 2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 (2\nu + 2)(2\nu + 4)} - \dots \right| <$$

$$< 1 + r + \frac{r^2}{1 \cdot 2} + \frac{r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots,$$

onde

$$|f_\nu(x)| < \frac{e^r}{2^\nu},$$

e posto

$$e^r = N,$$

si ha, per tutti i valori di ν,

$$|f_\nu(x)| < N,$$

essendo N un numero finito positivo.

Da ciò segue che se la serie

$$\Sigma \frac{c_\nu x^\nu}{\nu!}$$

è convergente entro un cerchio R, entro lo stesso cerchio sarà convergente lo sviluppo

$$(10) \qquad \sum_0^\infty \frac{c_\nu x^\nu}{2^\nu \nu!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2\nu + 2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 (2\nu + 2)(2\nu + 4)} - \dots \right),$$

che è il noto sviluppo in serie di funzioni di Bessel.

b) Si faccia ora

$$f_\nu(x) = \frac{1}{1 \pm a x^{m_\nu}},$$

dove i numeri interi m_ν formano una successione crescente all'infinito, per modo che sia

$$m_{\nu+1} > m_\nu, \qquad \lim_{\nu=\infty} m_\nu = \infty.$$

Dico che le funzioni $f_\nu(x)$ sono tali che tolte alcune di esse in numero finito, le altre rimangono finite per $\nu = \infty$ entro un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio $R < 1$. Tale proposizione è affatto ovvia per $|a| < 1$; per dimostrarla per il caso di $|a| \geq 1$, si fissi dapprima il raggio R, indi si ponga

$$\frac{1}{1 \pm a\, x^{m_\nu}} = - \frac{1}{a\left(x^{m_\nu} \pm \frac{1}{a}\right)}$$

e

$$\frac{1}{a} = b\,, \qquad \left|\frac{1}{a}\right| = \beta\,.$$

Le radici delle equazioni

$$x^{m_\nu} \pm b = 0$$

si trovano su circonferenze aventi i raggi

$$\beta^{1/m_0},\ \beta^{1/m_1},\ \beta^{1/m_2}, \ldots$$

che vanno tendendo all'unità al crescere di ν, per modo che entro il cerchio R se ne troverà un numero finito; ossia si potrà determinare un tal valore di n che sia, per $\nu \geq n$,

$$\beta^{1/m_\nu} > R\,.$$

Sia ora x un punto qualunque preso entro il cerchio R. Si ha

$$|x| < R < \beta^{1/m_\nu} \leq 1\,,$$

onde

$$|x|^{m_n} < R^{m_n} < \beta\,.$$

Essendo R^{m_n} inferiore a β, si può (1) determinare una quantità positiva η e diversa da zero, tale che sia

$$R^{m_n} \leq \beta - \eta\,,$$

onde a fortiori, per tutti i valori $|x| < R$ e per $\nu \geq n$,

$$|x|^{m_\nu} < \beta - \eta\,.$$

---

(1) V. la citata *Introduzione alla teoria delle funzioni analitiche,* p. 20.

Ma si ha

$$| x^{m_\nu} \pm b | > \beta - | x |^{m_\nu} ,$$

onde a fortiori

$$| x^{m_\nu} \pm b | > \eta .$$

Da ciò segue

$$\left| \frac{1}{x^{m_\nu} \pm b} \right| = \left| \frac{1}{\frac{1}{a} \pm x^{m_\nu}} \right| < \frac{1}{\eta} .$$

onde

$$\left| \frac{1}{1 \pm a\, x^{m_\nu}} \right| < \frac{1}{| a | \eta} .$$

Resta così dimostrato che, fissato il cerchio R, si può assegnare un valore n dell'indice ed un numero positivo N tale che, per tutti i punti x del cerchio R, sia, per $\nu \geq n$,

$$| f_\nu | (x) < N ;$$

risulta da ciò, e dal teorema del § 7, che se la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, x^\nu$$

è convergente entro un cerchio di raggio $R < 1$, entro lo stesso cerchio la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu\, x^\nu}{1 \pm a\, x^\nu}$$

rappresenta una funzione analitica regolare nell'intorno di ogni punto del campo, eccettuati i punti radici delle equazioni

$$1 \pm a\, x^{m_\nu} = 0$$

in cui essa ammette infiniti ordinari; e se la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, x^\nu$$

è convergente entro un cerchio di raggio ≥ 1, la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu x^\nu}{1 \pm a x^\nu}$$

rappresenta una funzione colle anzidette proprietà entro il cerchio di raggio 1, esclusa la circonferenza.

In particolare, supposta la $\Sigma c_\nu x^\nu$ convergente entro il cerchio di raggio 1, le serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu x^\nu}{1 - x^\nu}, \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu x^\nu}{1 \pm x^{2\nu}}, \qquad \text{ecc.}$$

sono convergenti in egual grado entro un cerchio di raggio inferiore ad 1 di tanto poco quanto si vuole, e rappresentano nei punti di questo cerchio una funzione regolare, e quindi sviluppabile in serie ordinaria di potenze di x.

II.

12. — Sugli sviluppi della forma

$$S(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu f_\nu(x) \tag{1}$$

nei quali, sotto certe ipotesi, abbiamo riscontrato la convergenza incondizionata ed in egual grado, si possono fare ulteriori considerazioni, e dimostrare che:

Se le funzioni $f_\nu(x)$ entro il cerchio R di convergenza della serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$ si mantengono finite per $\nu = \infty$ (*) *e sviluppabili in serie della forma*

$$f_\nu(x) = a_{\nu,0} + a_{\nu,1} x + a_{\nu,2} x^2 + \dots + a_{\nu,\mu} x^\mu + \dots, \tag{2}$$

qualunque funzione $F(x)$ regolare nell'intorno del posto $x = 0$ si può sviluppare in serie della forma (1).

(*) (R.) Cioè *limitate nel loro insieme.*

Per semplificare i calcoli supporremo che sia, per tutte le funzioni $f_\nu(x)$,

$$f_\nu(0) = 1\,, \qquad \text{cioè} \qquad a_{\nu,0} = 1\,, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

osservando però che i risultati cui si giungerebbe senza questa restrizione sarebbero affatto analoghi a quelli che si troveranno in ciò che segue.

13. — Se ordiniamo la serie (1) secondo le potenze di x, il che si può fare [1] nella ipotesi della convergenza in egual grado, troveremo, tenuto conto delle (2), lo sviluppo

$$S(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{0,\nu}\, c_0 + a_{1,\nu-1}\, c_1 + a_{2,\nu-2}\, c_2 + \ldots + a_{\nu-1,1}\, c_{\nu-1} + c_\nu)\, x^\nu\,;$$

se ora è data una funzione analitica definita da una serie di potenze

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu\, x^\nu \tag{3}$$

convergente entro un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio ϱ, e facciamo coincidere i coefficienti delle potenze simili di x nella (1) e nella (3), avremo le relazioni:

$$\left\{\begin{array}{l} h_0 = c_0\,, \\ h_1 = a_{0,1}\, c_0 + c_1\,, \\ h_2 = a_{0,2}\, c_0 + a_{1,1}\, c_1 + c_2\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_n = a_{0,n}\, c_0 + a_{1,n-1}\, c_1 + a_{2,n-2}\, c_2 + \ldots + a_{n-1,1}\, c_1 + c_n\,. \end{array}\right. \tag{4}$$

Queste equazioni serviranno a determinare la *forma* dello sviluppo $S(x)$ per la funzione data $F(x)$: dopo di che si dovrà indagare se, ed in qual campo, sia *valido* lo sviluppo trovato o, in altri termini, se sussiste l'eguaglianza (identica)

$$S(x) = F(x)\,.$$

---

(1) WEIERSTRASS, *Zur Functionenlehre*, § 2.

Dalle equazioni (4) si deduce che il determinante dei coefficienti c è eguale all'unità, onde

$$(5) \qquad c_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & h_0 \\ a_{0,1} & 1 & 0 & 0 & . & . & . & h_1 \\ a_{0,2} & a_{1,1} & 1 & 0 & . & . & . & h_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{0,n} & a_{1,n-1} & a_{2,n-2} & a_{3,n-3} & . & . & & h_n \end{vmatrix},$$

e sviluppando rispetto agli elementi dell'ultima colonna:

$$(5^{\text{bis}}) \qquad c_n = h_n - h_{n-1}\, d_1^{(n)} + h_{n-2}\, d_2^{(n)} - \ldots + (-1)^n h_0\, d_n^{(n)} ,$$

dove con $d_r^{(n)}$ si indica il determinante che si ottiene da (5) colla soppressione della $(n-r)$-esima linea e dell'ultima colonna. Questo determinante d'ordine n si può abbassare all'ordine r colla soppressione successiva di $n-r$ linee e di altrettante colonne, e si riduce in tal modo a

$$(6) \qquad d_r^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{n-r,1} & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{n-r,2} & a_{n-r+1,1} & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n-r,r} & a_{n-r+1,r-1} & . & . & . & . & a_{n-1,1} \end{vmatrix}.$$

Finalmente questo determinante si può esprimere per mezzo di determinanti della stessa natura, ma d'ordine inferiore e relativi a valori inferiori dell'indice n: sviluppando infatti rispetto agli elementi dell'ultima linea si trova

$$(7) \qquad d_r^{(n)} = a_{n-1,1}\, d_{r-1}^{(n-1)} - a_{n-2,2}\, d_{r-2}^{(n-2)} + \ldots$$
$$+ (-1)^r a_{n-r+1,r-1}\, d_1^{(n-r+1)} + (-1)^{r+1} a_{n-r,r} .$$

14. — Ammessa dunque la possibilità dello sviluppo della data funzione $F(x)$ in serie della forma $S(x)$, potremo calcolare i coefficienti di questo sviluppo, e le formole (6) e (7) ne agevoleranno il

calcolo pratico. Dobbiamo però esaminare se lo sviluppo stesso è valido: vale a dire dobbiamo ricercare se la serie

$$\Sigma\, c_\nu\, x^\nu f_\nu(x)\,,$$

dove i coefficienti c_ν sono dati dalla formola (5), è effettivamente convergente e trasformabile in una ordinaria serie di potenze di x, la quale in tal caso, e per le formole (4), non potrà essere altro che la serie data per la $F(x)$.

Ma se la serie $\Sigma\, c_\nu\, x^\nu$ è convergente entro un cerchio R nel quale le $f_\nu(x)$ si mantengono regolari e finite anche per $\nu = \infty$, sarà la serie (1) convergente in egual grado e sviluppabile in serie di potenze di x (§ 12); onde basta cercare se è convergente la serie $\Sigma\, c_\nu\, x^\nu$ in un certo intorno di $x = 0$.

A quest'uopo, osserviamo che si può sempre determinare una successione di numeri positivi

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu, \ldots$$

e tali che per qualunque valore di ν sia

$$|a_{\nu,\mu}| \leq \alpha_\mu$$

e che la serie

$$T = \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_\mu\, x^\mu$$

sia convergente entro un certo intorno di $x = 0$.

Indicando infatti con ξ un numero positivo minore di R e con M un numero maggiore dei valori assoluti di tutte le $f_\nu(x)$ sulla circonferenza di raggio ξ [numero che sappiamo esistere dietro l'ipotesi che le $f_\nu(x)$ siano finite per $\nu = \infty$ (*)], si avrà, per un noto teorema sulle serie di potenze [1],

$$|a_{\nu,\mu}| < \frac{M}{\xi^\mu}\,;$$

ora la serie

$$T(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{M}{\xi^\mu}\, x^\mu$$

(*) (*R.*) Cioè *limitate nel loro insieme*.

[1] V. la citata *Introduzione alla teoria delle funzioni analitiche,* p. 96.

è convergente per $|x| < \xi$, e quindi esistono i numeri α_μ richiesti, bastando fare

$$\alpha_\mu = \frac{M}{\xi^\mu}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots).$$

Ciò posto, la serie $T(x)$ assumendo il valore zero per $x = 0$ ed essendo convergente in un certo intorno di $x = 0$, si potrà sempre determinare un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio R' diverso da zero entro il quale sia

$$|T| < 1,$$

e in tutto l'intorno di quel cerchio il quoziente

$$\frac{T}{1-T}$$

delle due serie T ed $1 - T$ si potrà sviluppare in serie di potenze di x, e si potrà scrivere:

$$\frac{T}{1-T} = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu x^\nu, \tag{8}$$

dove è facile vedere che i coefficienti k_ν sono tutti positivi, come le α colle quali si formano. Dalla (8) deduciamo

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu x^\nu\right)\left(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu\right)$$

ed eguagliando nei due membri i coefficienti di x^ν si ottiene

$$k_r = \alpha_1 k_{r-1} + \alpha_2 k_{r-2} + \ldots + \alpha_{r-1} k_1 + \alpha_r. \tag{9}$$

Dico ora che per qualunque valore di n si ha

$$|d_r^{(n)}| < k_r. \tag{10}$$

Questa disuguaglianza si verifica subito per il caso di un determinante del primo ordine $d_1^{(n)} = a_{n-1,1}$, essendo, per la formazione delle α_μ,

$$|a_{n-1,1}| < \alpha_1 \qquad \text{ed} \qquad \alpha_1 = k_1;$$

ora si supponga la (10) verificata per i valori

$$1, 2, 3, \ldots, r-1$$

dell'indice; si dimostra che sarà vera pure per il valore r. Infatti si ha dalla (7), tenuto conto delle disuguaglianze

$$|a_{\nu,\mu}| < \alpha_\mu,$$

che

$$|d_r^{(n)}| < \alpha_1 |d_{r-1}^{(n-1)}| + \alpha_2 |d_{r-2}^{(n-2)}| + \ldots$$

$$+ \alpha_{r-1} |d_1^{(n-r+1)}| + \alpha_r;$$

ma per ipotesi

$$|d_{r-1}^{(n-1)}| < k_{r-1}, |d_{r-1}^{(n-2)}| < k_{r-2}, \ldots, |d_1^{(n-r-1)}| < k_1,$$

onde

$$|d_r^{(n)}| < \alpha_1 k_{r-1} + \alpha_2 k_{r-2} + \ldots + \alpha_{r-1} k_1 + \alpha_r,$$

e, per confronto colla (9),

$$|d_r^{(n)}| < k_r,$$

c. d. d..

Abbiamo dunque trovato che, qualunque sia n, il determinante $d_r^{(n)}$, d'ordine r, è in valore assoluto inferiore ad una quantità positiva k_r, essendo la serie $\Sigma k_r x^r$ convergente entro il cerchio di centro $x = 0$ e di raggio R'.

Ora si ha dalle (5^{bis}):

$$|c_n| \leq |h_n| + |h_{n-1}||d_1^{(n)}| +$$

$$+ |h_{n-2}||d_2^{(n)}| + \ldots | + |h_0||d_n^{(n)}|,$$

onde dalle (14)

$$|c_n| < |h_n| + k_1 |h_{n-1}| + \ldots + k_n |h_0|;$$

ma il secondo membro in questa disuguaglianza non è altro che il coefficiente di x^n nel prodotto delle due serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu x^\nu, \qquad 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu x^\nu,$$

e siccome questo prodotto è convergente entro il minore dei due cerchi di centro $x=0$ e di raggi R' e ϱ, entro lo stesso campo sarà convergente la serie $\Sigma c_\nu x^\nu$ e quindi (§ 12) sarà valida per la funzione $F(x)$ l'eguaglianza

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu f_\nu(x) . \tag{11}$$

Si noti che il campo comune ai cerchi di raggio R' e ϱ può non essere che un limite inferiore del campo di validità dell'equazione (11).

15. — Possiamo dunque enunciare la seguente proposizione:

Qualunque funzione analitica $F(x)$, regolare nell'intorno del posto $x=0$, è sviluppabile, in un intorno del posto stesso secondo una serie convergente incondizionatamente ed in egual grado, della forma

$$\Sigma c_\nu x^\nu f_\nu(x) ,$$

purchè le funzioni $f_\nu(x)$ siano regolari e si mantengano finite per $\nu=\infty$ in un intorno del posto $x=0$.

Valendo le stesse ipotesi per la funzione $F(x)$ e le funzioni $f_\nu(x)$ nell'intorno del posto $x=x_0$, la funzione $F(x)$ ammetterà uno sviluppo della forma

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x-x_0)^\nu f_\nu(x).$$

Valendo le stesse ipotesi nell'intorno del posto $x=\infty$ (cioè per tutti i posti x esterni ad un cerchio di determinato raggio), varrà per la $F(x)$ uno sviluppo della forma

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{x^\nu} f_\nu(x) .$$

16. — In particolare, la funzione $F(x)$ si può ridurre ad una costante h_0; in tal caso valgono tutte le considerazioni fatte nei paragrafi precedenti, e basta porre nei risultati

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_\nu = \ldots = 0 .$$

I coefficienti c_n sono dati allora da

$$c_n = (-1)^n h_0 d_n^{(n)} .$$

Togliendo il fattore comune h_0 si giunge allo *sviluppo dell'unità*

$$1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} d_{\nu} x^{\nu} f_{\nu} x) \tag{12}$$

con

$$f_{\nu}(x) = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu,\mu} x^{\mu}, \qquad d_{\nu} = \begin{vmatrix} a_{0,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{0,2} & a_{1,1} & 1 & \dots & 0 \\ a_{0,3} & a_{1,2} & a_{2,1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{0,\nu} & a_{1,\nu-1} & a_{2,\nu-2} & \dots & a_{\nu-1,1} \end{vmatrix}.$$

I coefficienti d_{ν} sono legati dalla formola ricorrente

$$d_{\nu} = a_{\nu-1,1} d_{\nu-1} - a_{\nu-2,2} d_{\nu-2} +$$
$$+ a_{\nu-3,3} d_{\nu-3} + \dots + (-1)^{\nu} a_{1,\nu-1} d_1 + (-1)^{\nu-1} a_{0,\nu}$$

che si deduce dalla (7).

Che non sia possibile uno *sviluppo sotto zero* della forma (1), lo si deduce dalle equazioni (4), le quali, ove si pongano tutte le h_{ν} eguali a zero, non possono essere soddisfatte che ponendo tutte le c_{ν} eguali a zero. Da cui segue che *per una data funzione $F(x)$ lo sviluppo nella forma* (1), *che abbiamo dimostrato sempre possibile, è possibile in un sol modo.*

Però le formole precedenti permettono di costruire sviluppi dello zero di forma poco dissimile dalla (1); come:

$$0 = 1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu-1} d_{\nu} x^{\nu} f_{\nu}(x),$$

e da questa si deducono per la funzione

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} x^{\nu} f_{\nu}(x)$$

gl'infiniti altri sviluppi

$$F(x) = k + \sum_{\nu=0}^{\infty} [c_{\nu} + (-1)^{\nu-1} k\, d_{\nu}] x^{\nu} f_{\nu}(x),$$

dove k è una costante arbitraria.

III. — Applicazioni.

17. — Abbiamo dimostrato che le funzioni

$$\frac{1}{1-x^\nu}, \qquad \frac{1}{1 \pm x^{2\nu}}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

si mantengono finite, anche per $\nu = \infty$, entro tutto un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio $\alpha < 1$: di più, essendo queste funzioni eguali all'unità per $x = 0$, si può applicare loro tutte le considerazioni dei §§ 15 e seguenti.

Se dunque $F(x)$ è una funzione regolare nell'intorno di $x = 0$, questa si potrà sviluppare in serie della forma

$$F(x) = F(0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{x^\nu}{1-x^\nu} \tag{13}$$

ed anche

$$F(x) = F(0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c'_\nu \frac{x^\nu}{1+x^{2\nu}}. \tag{14}$$

Lo sviluppo (14) presenta di notevole ciò: se si cambia x in $1/x$, il secondo membro non cambia. Se indichiamo con ϱ (≤ 1) il raggio del cerchio entro cui è valido lo sviluppo (14), per un punto x' interno ad esso cerchio, la serie dà il valore $F(x')$ della funzione data; e per un punto x'' esterno al cerchio di raggio $1/\varrho$, la serie dà il valore della funzione nel punto $1/x''$. Il piano della variabile va dunque diviso in tre parti: il cerchio di centro $x = 0$ e di raggio ϱ, in cui la serie (14) rappresenta la funzione $F(x)$; la corona circolare compresa fra i cerchi di raggi ϱ ed $1/\varrho$, ed in cui non si può dir nulla per i valori della serie; infine i punti esterni al cerchio di raggio $1/\varrho$, in cui la serie rappresenta la funzione $F(1/x)$.

Se $\varrho = 1$, il secondo campo si riduce alla circonferenza di raggio 1. Questo avviene per la serie (14), in cui tutti i coefficienti sono eguali all'unità,

$$\Sigma \frac{x^\nu}{1+x^{2\nu}}, \tag{15}$$

e già considerata dal sig. Weierstrass [1].

---

[1] Memoria citata: *Zur Functionenlehre*.

18. — Se consideriamo uno sviluppo della forma

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{x^\nu}{1 - x^{2\nu}},$$

questo rappresenta una funzione regolare $F(x)$ in un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio $\varrho \leq 1$, e rappresenta la funzione $-F(1/x)$ nel campo esterno al cerchio di centro $x = 0$ e di raggio $1/\varrho$.

Se ora $\varphi(x)$ è una funzione regolare entro il cerchio 1, che prenda il valore 1 per $x = 0$ e tale che

$$\varphi(x) = -\varphi(1/x) \text{ [1]},$$

la funzione $\varphi(x) - 1$ si potrà sviluppare in una serie della forma precedente e che indicheremo con $S(x)$, talchè

$$\varphi(x) - 1 = S(x)$$

entro il cerchio ϱ: da cui deduciamo lo sviluppo dell'unità

$$1 = \varphi(x) - S(x).$$

Se ora prendiamo un punto x' fuori del cerchio $1/\varrho$, avremo che $1/x'$ si trova nel cerchio ϱ, onde

$$1 = \varphi(1/x') - S(1/x');$$

ma

$$S(1/x') = -S(x'), \qquad \varphi(1/x') = -\varphi(x'),$$

onde

$$1 = -\varphi(x') + S(x')$$

e quindi:

Lo sviluppo

$$\varphi(x) - S(x)$$

ha la proprietà di rappresentare entro il cerchio ϱ costantemente l'unità positiva; fuori del cerchio $1/\varrho$ costantemente l'unità negativa.

---

[1] Come esempi di tali funzioni possiamo citare:

$$\frac{1 + x^m}{1 - x^m}, \qquad \frac{(1 + x^m)(1 + x^n)(1 + x^p)}{(1 - x^m)(1 - x^n)(1 - x^p)}, \qquad \frac{1 + x^\alpha + x^{2\alpha}}{1 - x^{2\alpha}}$$

Prendendo in particolare

$$\varphi(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

si trova $\varrho = 1$, e si ottiene lo sviluppo

$$\frac{1+x}{1-x} - \Sigma \frac{2\, x^{2\nu}}{1-2^{2\nu+1}},$$

già dato dal sig. TANNERY (¹), che ha il valore $+1$ oppure -1 a seconda che $|x|$ è minore o maggiore dell'unità.

19. — Essendosi dimostrato pure che le funzioni

$$f_\nu(x) = \frac{1}{2^\nu}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot(2\,\nu+2)} + \frac{x^4}{2\cdot4\cdot(2\,\nu+2)(2\,\nu+4)} - \ldots\right)$$

rimangono finite per $\nu = \infty$ entro un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio grande quanto si vuole (§ 11), i risultati dei §§ 12 e seguenti ci permettono di enunciare:

Qualunque funzione $F(x)$ regolare nell'intorno del punto $x = 0$ è sviluppabile in serie della forma

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu\, x^\nu}{\nu\,!} f_\nu(x),$$

cioè in serie ordinata per le funzioni di Bessel; proposizione che si dimostra ordinariamente per altra via.

20. — Si riprenda il sistema di funzioni

$$f(x) = \frac{1}{1-x^\nu}:$$

sappiamo già che ogni funzione

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu\, x^\nu$$

(¹) Riportato dal WEIERSTRASS nei « Monatsberichte der Berlin Akad. », febbraio del 1881.

regolare nell'intorno di $x = 0$ si può sviluppare in serie della forma

$$h_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{x^\nu}{1 - x^\nu}; \tag{16}$$

ed i coefficienti c_ν si possono determinare col metodo dato ai §§ 11 e seguenti.

Ma per questo caso particolare si può tenere una via assai diversa, che non sembrerà forse priva d'interesse per le considerazioni quasi esclusivamente aritmetiche cui dà luogo.

Lo sviluppo di $x^\nu f_\nu(x)$ essendo

$$\frac{1}{1 - x^\nu} = x^\nu + x^{2\nu} + x^{3\nu} + \dots,$$

il termine x^n comparirà nel secondo membro soltanto se ν sarà divisore di n. Donde segue che sviluppando la (16) in serie di potenze di x ed eguagliando ad h_n il coefficiente di x^n, si otterrà la relazione

$$c_1 + c_d + c_{d'} + \dots + c_n = h_n, \tag{17}$$

dove con

$$1,\ d,\ d', \dots,\ n$$

si indicano tutti i divisori di n.

Ora le equazioni (17) permettono di ricavare le c_n in funzione delle h_n, mediante la seguente osservazione:

Siano $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$ i fattori primi del numero n; tutti i divisori di n, ad eccezione di n stesso, saranno anche divisori dei numeri

$$\frac{n}{p_1}, \frac{n}{p_2}, \dots, \frac{n}{p_r}. \tag{α}$$

Se ora formiamo tutti i divisori dei numeri (α) questi saranno tutti divisori di n, ma alcuni di essi saranno contati più di una volta: per esempio, nell'insieme dei divisori di n/p_1 ed n/p_2 saranno contati due volte i divisori del loro massimo comun divisore $n/(p_1 p_2)$, e così via. Onde, se vogliamo i divisori di n una sol volta dovremo togliere dall'insieme dei divisori dei numeri (α) i divisori dei numeri

$$\frac{n}{p_1 p_2}, \frac{n}{p_1 p_3}, \frac{n}{p_2 p_3}, \dots, \frac{n}{p_{r-1} p_r}. \tag{β}$$

Ma fra i divisori di questi numeri alcuni compaiono più volte, poichè tanto fra i divisori di $n/(p_1\,p_2)$ quanto fra quelli di $n/(p_1\,p_3)$ si trovano i divisori del loro massimo comun divisore

$$\frac{n}{p_1\,p_2\,p_3},$$

ecc.; onde, se vogliamo i divisori dei numeri (β) una sol volta dovremo togliere da essi i divisori dei numeri

$$(\gamma) \qquad \frac{n}{p_1\,p_2\,p_3},\ \frac{n}{p_1\,p_2\,p_4},\ldots$$

[in altri termini, è chiaro che se un numero divide due numeri (β), divide necessariamente un numero di (γ)]; e così via.

Se ora indichiamo col simbolo δ_1 i divisori dei numeri (α), con δ_2 i divisori dei numeri (β), con δ_3 quelli dei numeri (γ), ...; infine con δ_r i divisori del numero

$$\frac{n}{p_1\,p_2\,p_3\ldots p_r},$$

si avrà che, per il ragionamento fatto in ciò che precede e per il significato di c_d, la somma

$$c_1 + c_d + c_{d'} + \ldots + c_n$$

si potrà scrivere:

$$\Sigma\, c_{\delta_1} - \Sigma\, c_{\delta_2} + \Sigma\, c_{\delta_3} - \Sigma\, c_{\delta_4} + \ldots + (-1)^{r+1}\,\Sigma\, c_{\delta_r} + c_n$$

e l'equazione (21) diviene

$$\Sigma\, c_{\delta_1} - \Sigma\, c_{\delta_2} + \ldots + (-1)^{r+1}\,\Sigma\, c_{\delta_r} + c_n = h_n\,.$$

Ma, essendo D il simbolo dei divisori di un numero N, per le (17) stesse si ha:

$$\Sigma\, c_D = h_N\,;$$

onde

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma\, c_{\delta_1} = h_{n/p_1} + h_{n/p_2} + h_{n/p_3} + \dots + h_{n/p_r} = \Sigma\, h_{n/p_i}\,, \\ &\Sigma\, c_{\delta_2} = h_{n/(p_1 p_2)} + h_{n/(p_1 p_3)} + h_{n/(p_2 p_3)} + \dots = \Sigma\, h_{n/(p_i p_j)}\,, \\ &\Sigma\, c_{\delta_3} = \Sigma\, h_{n/(p_i p_j p_k)}\,, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &\Sigma\, c_{\delta_r} = h_{n/(p_1 p_2 \dots p_r)}\,, \end{aligned}\right.$$

da cui

$$(18)\qquad c_n = h_n - \Sigma\, h_{n/p_i} + \Sigma\, h_{n/(p_i p_j)} - \dots + (-1)^r\, h_{n/(p_1 p_2 \dots p_r)}\,.$$

In particolare per $n = p$, numero primo, si ha

$$c_p = h_p - h_1\,;$$

per $n = p^\alpha$, potenza di un numero primo, si ha

$$c_{p^\alpha} = h_{p^\alpha} - h_{p^{\alpha-1}}\,;$$

per $n = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$, si avrà

$$c_{60} = h_{60} - (h_{15} + h_{20} + h_{12}) + (h_{10} + h_6 + h_4) - h_2\,.$$

21. — La formola (18) ci dà il coefficiente c_n espresso per i coefficienti h: ora sappiamo dal teorema del § 12 che lo sviluppo (16) è convergente nello stesso campo dello sviluppo $\Sigma\, c_\nu x^\nu$; bisogna dunque vedere se la serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu x^\nu\,,$$

dove i coefficienti c_ν sono dati dalla formola (18), è convergente ed entro quale campo. Ora il secondo membro della (18) contiene soltanto alcune delle h_ν, $(\nu = 1, 2, 3, \dots, n)$, e coi coefficienti 1 oppure -1; onde sarà evidentemente

$$|\, c_n \,| < \sum_{\nu=1}^{n} |\, h_\nu \,| :$$

ora la serie $\Sigma\, h_\nu\, x^\nu$ essendo convergente entro un cerchio di raggio ϱ, lo stesso avviene della serie $\Sigma\, |\, h_\nu\, |\, x^\nu$, ed il prodotto delle serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\, h_\nu\, |\, x^\nu, \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu$$

sarà convergente entro il cerchio ϱ se $\varrho < 1$, ed entro il cerchio di raggio 1 se $\varrho \geq 1$. Ma il coefficiente di x^n nel prodotto

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\, h_\nu\, |\, x^\nu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu\right)$$

è precisamente

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\, h_\nu\, |,$$

onde a fortiori la serie $\Sigma\, |\, c_\nu\, |\, x^\nu$ sarà convergente, e lo sviluppo (16) sarà valido entro tutto il cerchio di convergenza ϱ della $\Sigma\, h_\nu\, x^\nu$ se $\varrho < 1$ ed entro il cerchio 1 se $\varrho \geq 1$.

In tal modo troviamo per il cerchio di validità dello sviluppo (16) un valore superiore al limite inferiore dato al § 16.

22. — Lo sviluppo, che abbiamo studiato in questi ultimi paragrafi,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{x^\nu}{1 - x^\nu}$$

è una generalizzazione della serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{1 - x^\nu}$$

nota da lungo tempo sotto il nome di *serie di Lambert* (Beitrage zur Mathematik, Berlin 1765-1772) [1]; la quale ha la proprietà, che si scorge immediatamente, di convergere entro il cerchio di raggio 1 e di essere sviluppabile in una serie di potenze di x, in cui il coefficiente di x^n è precisamente il *numero dei divisori* del numero n; i termini in cui n è primo, e soltanto quelli, hanno per coefficiente 2, mentre tutti gli altri coefficienti sono maggiori di 2.

---

(1) Sulla serie di LAMBERT, vedasi CLAUSEN (J. de Crelle, t. II), SCHREK (ibid., t. III), EISENSTEIN (ibid., t. XXVII).