Salvatore Pincherle

Studi sopra alcune operazioni funzionali

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Serie 4, Vol. **7** (1886), p. 391–442

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 1, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 92–141

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_1_92>

3 [25].

Studi sopra alcune operazioni funzionali.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna;
(4) 7, 391-442 (1886).

Introduzione.

Chiamo *operazione funzionale* qualunque operazione che eseguita sopra una funzione analitica dà per risultato una funzione analitica. Sono tali, per esempio, le operazioni aritmetiche in numero finito, e per classi numerose di casi, anche in numero infinito, la derivazione e l'integrazione, la risoluzione di equazioni finite o differenziali, la sostituzione, ecc. .

Fra gli algoritmi più notevoli per le operazioni funzionali va citata l'integrazione definita applicata ad una funzione di due variabili, della forma

$$\int_{(c)} f(x\,,y)\,\mathrm{d}\,y\,, \tag{1}$$

dove l'integrazione s'intende eseguita lungo una curva c, chiusa o no, del piano y, L'importanza di questo algoritmo nella teorica delle funzioni, già grandissima, come è ben noto, in seguito ai lavori di CAUCHY, è diventata anche maggiore per la scoperta dell'HERMITE (1) il cui teorema, come vedremo in seguito, si può riguardare come una generalizzazione di quello di CAUCHY. Molte operazioni funzionali si possono ridurre al tipo (1); basti ricordare che:

(1) *Sur quelques points de la théorie des fonctions,* lettre à M. MITTAG-LEFFLER (Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, T. XII, 1881).

a) sotto determinate condizioni, una funzione $\varphi(x)$ è data dall'integrale

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{\varphi(y)\,dy}{y-x};$$

b) sotto condizioni analoghe, le derivate di $\varphi(x)$ sono date da

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{\varphi(y)\,dy}{(y-x)^{n+1}};$$

c) parimenti sotto certe condizioni, la sostituzione di una data funzione $f(x)$ al posto della variabile si ottiene da

$$\psi(f(x)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{\psi(y)\,dy}{y-f(x)};$$

d) l'operazione che consiste nel sostituire in una serie di potenze

$$\psi(x) = \Sigma\, c_n\, x^n$$

al posto di x^n una funzione $\varphi_n(x)$ di un determinato sistema, viene data da

$$\Sigma\, c_n\, \varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} A(x,y)\,\psi(y)\,dy,$$

dove si sia posto

$$A(x,y) = \Sigma \frac{\varphi_n(x)}{y^{n+1}}.$$

Ricorderò che questa sostituzione venne considerata per la prima volta come operazione funzionale dall'APPELL, in un caso speciale (1).

e) La differenziazione finita e l'integrazione corrispondente si possono pure rappresentare con integrali definiti della forma (1) (2).

f) Lo stesso vale per le soluzioni di equazioni differenziali; ecc..

Si aggiunga che la sovrapposizione di due operazioni del tipo (1) riproduce in generale una operazione dello stesso tipo.

---

(1) *Sur une classe de polynômes,* § 12 (Annales de l'Éc. Normale Supérieure, S. II, T. IX, 1880).

(2) V. la mia Nota *Sur une intégrale définie* (Acta Mathematica, t. VII).

Le operazioni enumerate in ciò che precede, da *a*) ad *e*), appartengono al tipo (1) non solo, ma al tipo più speciale, cui ci fermeremo per ora,

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} A(x, y)\, \varphi(y)\, dy, \tag{2}$$

dove con c s'intende una linea chiusa. L'equazione (2) stabilisce una *corrispondenza* fra le funzioni φ e ψ, corrispondenza che viene ad essere caratterizzata dalla funzione $A(x, y)$ che perciò si dirà *caratteristica*, la funzione φ si potrà dire *oggetto* dell'operazione funzionale, la funzione ψ ne sarà il *risultato*. L'operazione funzionale o la corrispondenza data dalla (2) si potranno indicare per brevità con $\psi = \mathbf{a}\,\varphi$.

Giova rammentare che anche se la $\varphi(y)$ è una funzione analitica *monogena* (nel senso adottato dal Prof. WEIERSTRASS) in generale non sarà monogena la $\psi(x)$, ma invece, come ha dimostrato il Sig. HERMITE nel citato lavoro, essa potrà rappresentare nelle varie regioni del piano x diverse funzioni o rami di funzioni analitiche monogene. Quando in ciò che segue si vorrà mettere in evidenza questa circostanza, seguendo l'esempio del Sig. MITTAG-LEFFLER, la $\varphi(x)$ si dirà *espressione analitica* invece che funzione analitica.

Sulle espressioni analitiche del tipo (2) si presentano varie questioni generali; come per esempio le seguenti:

1⁰) Variando φ in modo determinato, in qual modo varierà ψ? In termini più precisi: se φ si mantiene entro classi determinate, anche ψ si manterrà in classi determinate, e quali?

2⁰) Date le funzioni $A(x, y)$ e $\psi(x)$, esisterà una funzione φ tale che sia

$$\mathbf{a}\,\varphi = \psi$$

ed in qual modo si potrà determinarla?

Questa ultima questione è stata detta *inversione degli integrali definiti.*

L'integrazione definita considerata come mezzo per stabilire una corrispondenza fra due funzioni, come nella formola (2) precedente, e la questione dell'inversione degl'integrali definiti nel senso ora indicato, hanno già formato l'oggetto di parecchi lavori, fra i quali mi sembra doveroso di accennare rapidamente a quelli che in modo più o meno esplicito mi hanno ispirato il concetto fondamentale della presente Memoria.

Ricorderò per primo uno scritto postumo di ABEL [1], in cui si trova lo studio di una equazione di corrispondenza fra due funzioni φ e ψ e di cui la (2) è la generalizzazione; questa equazione è

$$\psi(x) = \int e^{xy} \varphi(y) \, dy \,. \tag{3}$$

L'ABEL chiama ψ funzione *generatrice* di φ, e φ funzione *determinante* di ψ. Per mezzo della corrispondenza (3), alle operazioni eseguite sulle funzioni generatrici corrispondono operazioni eseguite sulle funzioni determinanti ed aventi relazioni notevoli colle prime; ad esempio dalla (3) si deduce immediatamente

$$\psi'(x) = \int e^{xy} \, y \, \varphi(y) \, dy \,, \tag{4}$$

che fa corrispondere alla derivazione delle funzioni generatrici la moltiplicazione per y delle funzioni determinanti. Dalla (4), indicando con D il simbolo di derivazione e con $A(z)$ una funzione razionale intera di z, segue:

$$A(\mathrm{D}\,\psi) = \int e^{xy} A(y) \, \varphi(y) \, dy \,. \tag{5}$$

Un'altra classe di trasformazioni di operazioni è data dalla formola

$$\psi(x + \alpha) = \int e^{xy} e^{\alpha y} \, \psi(y) \, dy \,; \tag{6}$$

una terza classe dalla formola

$$x \, \psi(x) = - \int e^{xy} \varphi'(y) \, dy \tag{7}$$

che si può riguardare come inversa della (4) e che si ottiene dalla (3) integrando per parti e prendendo i limiti dell'integrazione in modo che sia zero il termine finito. La trasformazione (3) era stata considerata, anteriormente ad ABEL, da EULER e LAPLACE ed ap-

---

[1] *Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes* (Œuvres complètes, II édition, T. II, Mém. XI).

plicata all'integrazione di certe classi di equazioni differenziali [1]; ma il lavoro di ABEL è notevole perchè egli si colloca in un punto di vista nuovo, ponendo chiaramente in luce il concetto, secondo me fondamentale, di *corrispondenza* fra due funzioni stabilita dall'equazione (3).

L'inversione degl'integrali definiti nel senso indicato più sopra, ma fra limiti d'integrazione reali, è presa in esame in una Memoria del Sig. LAURENT [2], nella quale il problema viene definito in generale ma trattato in due casi speciali; egli si limita infatti a determinare la forma di una funzione $\varphi(y)$ tale che sia

$$\int_a^b y^\nu \varphi(y)\, dy = 0\,, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

o più generalmente, essendo le g_ν costanti,

$$\int_a^b y^\nu \varphi(y)\, dy = g_\nu\,, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Il Prof. VOLTERRA, in una breve Nota inserita nel Nuovo Cimento (S. III, t. XXI, 1884) si occupa pure del problema dell'inversione degli integrali definiti, problema che oltre alla sua importanza nella teoria delle operazioni funzionali è di frequente applicazione nella Fisica matematica. Il Signor VOLTERRA considera l'equazione funzionale (2) nel caso di funzioni di variabili reali e supponendo la $A(x, y)$ simmetrica in x ed y, e riconduce il problema ad una questione di Calcolo delle variazioni: risultato molto notevole perchè mostra il legame fra due questioni funzionali d'aspetto diverso. In questa Nota si trova pure accennato che il Prof. DINI si è occupato di problemi analoghi, di cui non ha pubblicato ancora i risultati, che vedranno la luce nella seconda parte dell'opera *Sulla serie di Fourier*.

---

(1) Il Sig. POINCARÉ ha fatto risaltare nuovi vantaggi della trasformazione (3) per lo studio delle equazioni differenziali nella recente Memoria: *Sur les équations différentielles, etc.* (American Journal of Mathematics, t. VII, N. 3, 1884).

(2) *Sur le calcul inverse des intégrales définies* (Journal de Mathématiques, S. III, t. IV, 1878).

Infine, ricorderò come alcuni problemi di inversione di integrali definiti si trovino trattati nelle numerose Memorie del Prof. BELTRAMI sulla teoria del potenziale: citerò in particolare quello notevolissimo risoluto dalle formole (4) della Memoria *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche* (Mem. Accad. Scienze Bologna, S. IV, T. II).

Colle questioni precedenti si collega strettamente lo studio delle serie

$$(9) \qquad \Sigma\, c_n\, p_n(x)$$

procedenti per funzioni di una determinata successione

$$p_n(x)\,, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Dato il sistema di funzioni analitiche $p_n(x)$, si presentano due domande principali sulle serie (9): primo, quale sia la forma del loro campo di convergenza nel piano della variabile x, e a questa domanda è risposto in modo abbastanza generale nelle Memorie mie (1) e del Sig. POINCARÉ (2); secondo, data una funzione analitica regolare in un certo campo, sotto quali condizioni sarà essa sviluppabile in serie della forma (9); e per quanto io sappia, questa ultima questione (che ha molta affinità col problema già menzionato dell'inversione degli integrali definiti) non è stata studiata in generale, ma vi si è risposto solo nel caso di sistemi $p_n(x)$ di forma speciale.

Nel presente lavoro ho tentato di contribuire in qualche piccola parte allo studio delle operazioni funzionali citate più sopra, cioè delle integrazioni definite estese a linee chiuse e della loro inversione. Questa Memoria è divisa in due parti.

Nella prima parte studio alcune operazioni speciali del tipo (2): quella che serve a separare le varie singolarità di una funzione uniforme e quella in cui la funzione caratteristica è delle forme $g(x/y)$, essendo $g(z)$ una funzione trascendente intera o il prodotto della $g(x/y)$ per una funzione della sola y; esamino specialmente il caso di ABEL, in cui per la $g(z)$ si prende e^z, e ne faccio alcune applicazioni.

---

(1) Annali di Matematica, S. II, t. XII, 1883-84.

(2) Memoria citata dell'« American Journal ».

Nella seconda parte considero l'operazione (2) facendo le ipotesi che la funzione caratteristica $A(x, y)$ sia razionale e che la linea d'integrazione sia una circonferenza; ma queste ipotesi fatte in questo primo lavoro per maggior chiarezza e brevità non sono essenziali per i risultati che si ottengono e che sarebbe ovvio estendere a funzioni caratteristiche $A(x, y)$ singolari nei punti dati da un'equazione algebrica $f(x, y) = 0$ ed a linee d'integrazione chiuse di forma qualunque. Studio il variare della funzione rappresentata dalla (2), prima al variare di x nelle diverse regioni del suo piano (ritrovando così per altra via il teorema di HERMITE) poi al variare della circonferenza d'integrazione; esamino quindi i diversi sviluppi in serie che si deducono dalla espressione (2) e nei quali trovo la proprietà di *continuarsi* l'uno nell'altro come avviene per i vari sviluppi in serie di potenze di una stessa funzione analitica; infine mi occupo del problema accennato più sopra dell'inversione dell'operazione (2), che racchiude quello dello sviluppo di una data funzione in serie di determinata forma.

Parte Prima

I.

1. — Due funzioni analitiche uniformi $\varphi(x)$, $\psi(x)$ si dicono avere le stesse singolarità in un'area A del piano x sul cui contorno non cada alcuna singolarità delle due funzioni, quando la differenza $\varphi(x) - \psi(x)$ è regolare in tutta l'area A. Si potrà dire analogamente che due funzioni uniformi $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ hanno singolarità *simili* nell'area A quando il quoziente $\varphi(x)/\psi(x)$ è regolare e diverso da zero in tutta l'area A (1).

2. — Premetterò una proposizione già nota (2) e facile a ricavare dai principî generali della teoria delle funzioni; ma che mi sembra

(1) Il concetto di paragonare le singolarità di due funzioni per mezzo della loro differenza o del loro quoziente, concetto racchiuso in sostanza nei lavori del RIEMANN, si trova presentato sotto un aspetto nuovo e più fecondo nei lavori del WEIERSTRASS e del MITTAG-LEFFLER. La pregevole tesi del Sig. GUICHARD: *Théorie des points singuliers essentiels* (Paris, Gauthier Villars, 1883) ne contiene una esposizione d'insieme, con sviluppi nuovi in certe parti.

(2) GUICHARD, Memoria citata, § 5.

opportuno di enunciare e dimostrare in termini più precisi di quello che si faccia ordinariamente.

Sia data una funzione analitica $\varphi(x)$ *uniforme e monogena* (1) *con punti, linee ed aree singolari quali si vogliano, ed un'area* A *connessa, sul cui contorno* ϱ *non cada alcuna singolarità della* $\varphi(x)$. *Esisteranno sempre due funzioni analitiche uniformi e monogene: la prima regolare nell'area* A *ed al contorno, avente fuori di* A *le stesse singolarità di* $\varphi(x)$; *la seconda regolare fuori di* A *ed avente entro* A *le stesse singolarità della* $\varphi(x)$.

Si consideri infatti l'espressione analitica

$$E_x = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)} \frac{\varphi(y)\,dy}{y-x}, \tag{1}$$

dove l'integrazione è eseguita in un senso determinato lungo il contorno di A. Questa espressione rappresenta nell'intorno di ogni punto a del piano x, preso nell'interno di A, un elemento di funzione analitica; infatti, per x interno ed y esterno ad un cerchio di centro a e di raggio eguale alla minima distanza δ da a al contorno di A, si ha:

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{(y-a)^{n+1}},$$

ed integrando termine a termine questa serie convergente in egual grado dopo di averla moltiplicata per $\frac{1}{2\pi i}\varphi(y)$, che si mantiene finita e continua lungo la linea d'integrazione, viene, in tutto il cerchio di centro a e di raggio δ,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)} \frac{\varphi(y)\,dy}{y-x} = \boldsymbol{P}(x-a),$$

dove con $\boldsymbol{P}$ si indica una serie di potenze intere e positive.

Se denotiamo con $\psi(x)$ la funzione analitica definita da questo suo elemento, troveremo facilmente che l'espressione E_x ci rappresenta in tutto l'interno di A le serie che sono la continuazione analitica della $\boldsymbol{P}(x-a)$, ossia la stessa $\psi(x)$, che è perciò regolare in tutta l'area A.

---

(1) Nel senso usato dal WEIERSTRASS.

Col medesimo ragionamento si dimostra che la stessa espressione analitica E_x rappresenta fuori di A una seconda funzione analitica che denoterò con $-\chi(x)$.

Ciò posto, racchiudiamo le singolarità di $\varphi(x)$ che sono in A con delle curve $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ in numero finito e per modo che nell'area B racchiusa fra ϱ e $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, i contorni compresi, la $\varphi(x)$ sia regolare: il che si può fare in infiniti modi. Si avrà per x interno a B:

$$E_x = \varphi(x) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{(\sigma_k)} \frac{\varphi(y)\, dy}{y - x} = \psi(x), \tag{2}$$

e per x esterno ad A:

$$E_x = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{(\sigma_k)} \frac{\varphi(y)\, dy}{y - x} = -\chi(x); \tag{3}$$

ma, per lo stesso ragionamento fatto dianzi, il termine sommatorio rappresenta una funzione analitica monogena in tutto il campo esterno ai contorni $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, onde la formola (2) pei valori di x compresi nell'area B dà:

$$\psi(x) = \varphi(x) - \chi(x).$$

Ora una relazione di tale natura fra funzioni analitiche monogene uniformi, vera in un'area in cui le funzioni sono tutte regolari, è vera in tutto il loro campo comune di validità; talchè le funzioni $\psi(x)$ e $\chi(x)$ definite l'una entro A e l'altra fuori dalle (2) e (3), potranno esistere anche in altre parti del piano, e saranno legate in tutto il loro campo di validità da

$$\varphi(x) = \psi(x) + \chi(x), \tag{4}$$

la quale dimostra che la $\psi(x)$, regolare in A, ha le stesse singolarità di $\varphi(x)$ fuori di A, e che la $\chi(x)$, regolare fuori di A, ha entro A le stesse singolarità di $\varphi(x)$, c. d. d..

3. — Data la funzione $\varphi(x)$ come nel § precedente, indico col simbolo $\mathbf{i}_\varrho$ l'operazione funzionale che eseguita su $\varphi(x)$ dà per risultato la funzione $\psi(x)$ e col simbolo $\mathbf{j}_\varrho$ l'operazione *complementare*, che eseguita su $\varphi(x)$ dà la funzione $\chi(x)$.

Queste operazioni sono eseguibili su ogni funzione uniforme e per ogni campo A connesso il cui contorno non passi per alcun punto singolare della funzione.

Esse sono ad un valore, all'infuori di una costante addittiva, perchè se due funzioni ψ e ψ_1 fossero risultato della stessa operazione $\mathbf{i}_\varrho\,\varphi$, la loro differenza sarebbe regolare in tutto il piano, cioè si ridurrebbe ad una costante. La costante si può determinare senza ambiguità nell'operazione $\mathbf{i}_\varrho$ convenendo (se l'area A è tutta a distanza finita) di fare $\mathbf{j}_\varrho\,\varphi = 0$ per $x = \infty$.

Esse sono ambedue esprimibili analiticamente (in porzioni diverse del piano x) mediante lo stesso integrale definito (1) nel quale la funzione *caratteristica* (1) è $1/(y - x)$. Però la loro espressione analitica si può avere direttamente in classi estese di casi, dalla considerazione delle singolarità di $\varphi(x)$ ed indipendentemente dagli integrali definiti, mediante l'applicazione dei teoremi di MITTAG-LEFFLER (2).

4. — Si ha in tutto il piano

$$\mathbf{i}_\varrho\,\varphi + \mathbf{j}_\varrho\,\varphi = \varphi$$

o simbolicamente

$$\mathbf{i} + \mathbf{j} = 1\,.$$

Si ha, per ogni funzione φ regolare fuori di A e nulla all'infinito,

$$\mathbf{i}\,\varphi = 0\,, \qquad \mathbf{j}\,\varphi = \varphi$$

ed inversamente

$$\mathbf{i}\,\varphi = \varphi\,, \qquad \mathbf{j}\,\varphi = 0$$

per ogni funzione regolare in A.

L'equazione funzionale

$$\mathbf{i}\,\varphi = 0$$

ammette dunque per soluzione ogni funzione uniforme regolare fuori di A e reciprocamente.

Dette ω le soluzioni dell'equazione $\mathbf{i}\,\varphi = 0$, si potrà, a seconda delle singolarità che si vogliono ammettere per ω entro A e dei

(1) V. Introduzione.

(2) *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes* (Acta Mathematica, T. IV, 1884).

loro aggruppamenti, dare la forma generale delle funzioni ω mediante l'applicazione dei teoremi di MITTAG-LEFFLER in classi estese di casi. Nel caso più semplice in cui la ω ha un numero finito n di punti singolari a_h in A, si avrà la formola di WEIERSTRASS

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{n} G_k\left(\frac{1}{x - a_k}\right),$$

in cui

$$G_k(z) = A_{k,1}\, z + A_{k,2}\, z^2 + \ldots$$

è una funzione intera di z, razionale o trascendente, e nulla per $z = 0$.

Sono evidenti per ciò che precede le formule simboliche

$$\mathbf{i}\,\mathbf{j} = 0, \qquad \mathbf{i}^2 = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{j}^2 = \mathbf{j}.$$

5. — Fra le operazioni $\mathbf{i}$ eseguite su una data funzione uniforme $\varphi(x)$ relativamente a vari campi di contorni $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ passano le stesse relazioni lineari che passano fra gli integrali di CAUCHY che in porzioni limitate del piano servono a rappresentarle: per esempio l'operazione $\mathbf{i}$ relativa al campo limitato da due contorni ϱ e ϱ' si può rappresentare con $\mathbf{i}_{\varrho'} - \mathbf{i}_{\varrho}$. Ne risulta che, come si fa per gl'integrali di CAUCHY, lo studio dell'operazione $\mathbf{i}$ si può riportare senza scapito della generalità al caso in cui la linea ϱ è una circonferenza. In tal caso esiste una corona circolare concentrica comprendente la circonferenza ϱ ed entro la quale la $\varphi(x)$ è sviluppabile col teorema di LAURENT; entro il cerchio il risultato dell'operazione $\mathbf{i}$ è rappresentato dalla parte dello sviluppo di LAURENT che contiene le potenze nulle e positive della variabile, e fuori del cerchio il risultato dell'operazione $\mathbf{j}$ è rappresentato dalla parte dello sviluppo che contiene le potenze negative. Ma è noto (¹) che nella suddetta corona la $\varphi(x)$ è pure esprimibile mediante il prodotto di due serie, l'una $a(x)$ ordinata per le potenze intere positive, l'altra $b(1/x)$ per le potenze intere negative della variabile. Siamo dunque condotti a studiare più da vicino il risultato dell'operazione

$$\mathbf{i} \cdot a(x)\, b(1/x) \tag{5}$$

(¹) GUICHARD, Mem. citata, § 3.

e qui ci conviene di sviluppare alcuni particolari, quantunque semplici, per l'uso che ne dovremo fare nei capitoli successivi.

6. — Se nella corona circolare che comprende la circonferenza ϱ si ha

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n x^n ,$$

si avrà, essendo m un intero qualunque positivo o negativo,

$$\mathbf{i}\,\frac{\varphi(x)}{x^m} = a_m + a_{m+1}\,x + a_{m+2}\,x^2 + \dots + a_{m+n}\,x^n + \dots$$

e si può porre

$$\mathrm{I}^m\,\varphi(x) = \mathbf{i}\,\frac{\varphi(x)}{x^m} .$$

Ora per l'operazione I^m si trovano le seguenti proprietà:

a) Essa è distributiva.

b) Si ha:

$$\mathbf{i}\,\mathrm{I}^m\,\varphi(x) = \mathrm{I}^m\,\mathbf{i}\,\varphi(x) = \mathrm{I}^m\,\varphi(x) ,$$

il che permette di porre

$$\mathbf{i} = \mathrm{I}^0 .$$

c) Si ha inoltre

$$\mathrm{I}^m \cdot \mathrm{I}^n = \mathrm{I}^{m+n} .$$

d) Sia

$$b(z) = b_0 + b_1\,z + b_2\,z^2 + \dots + b_m\,z^m ,$$

essendo le $b_0, b_1, \dots$ coefficienti costanti. L'operazione

$$b_0\,\mathrm{I}^0 + b_1\,\mathrm{I}^1 + b_2\,\mathrm{I}^2 + \dots + b_m\,\mathrm{I}^m$$

applicata alla funzione $\varphi(x)$ si potrà rappresentare in modo abbreviato con

$$b(\mathrm{I}) \cdot \varphi(x)$$

e si verifica immediatamente che

$$b(\mathrm{I}) \cdot \varphi(x) = \mathbf{i} \cdot \varphi(x)\, b(1/x) .$$

c) Da ciò risulta che l'operazione $c(\mathrm{I})$, analoga a $b(\mathrm{I})$, applicata a $b(\mathrm{I})\cdot\varphi(x)$, equivale ad

$$\mathbf{i}\cdot\varphi(x)\, b(1/x)\, c(1/x),$$

talchè la sovrapposizione delle operazioni $a(\mathrm{I})$ è soggetta alle stesse regole formali di calcolo della moltiplicazione dei polinomi ordinati.

f) Il risultato dell'operazione ora definita si può porre sotto varie forme; si ha dapprima per definizione:

$$b(\mathrm{I})\cdot\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k\, \mathrm{I}^m\, \varphi(x)\,; \tag{6}$$

inoltre

$$b(\mathrm{I})\cdot\varphi(x) = \sum_0^\infty c_n\, x^n$$

con

$$c_n = b_0\, a_n + b_1\, a_{n+1} + \ldots + b_m\, a_{n+m}\,; \tag{7}$$

infine

$$b(\mathrm{I})\cdot\varphi(x) = \sum_0^\infty a_n\, \mathrm{I}^{-n}\, b(1/x) \tag{8}$$

notando che $\mathrm{I}^{-n}\, b(1/x)$ si riduce al polinomio

$$b_0\, x^n + b_1\, x^{n-1} + \ldots + b_m\, x^{n-m}.$$

7. — La formola (8) contiene nel secondo membro un numero infinito di operazioni I; essa ci conduce dunque ad estendere la notazione simbolica usata nel § precedente ed a rappresentare con $b(\mathrm{I})$ il complesso di operazioni dato da

$$\sum_{n=0}^\infty b_n\, \mathrm{I}^n$$

da eseguire sopra uno sviluppo di LAURENT, ed il cui significato è chiarito da quanto precede.

8. — Tornando all'operazione (5), dove ora è posto

$$a\cdot(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n\, x^n, \qquad b\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{b_n}{x^n}\ (^1),$$

(1) Suppongo che $a(x)$ e $b(1/x)$ siano elementi di funzioni uniformi, e rappresento le funzioni in tutto il loro campo di validità colle stesse notazioni $a(x)$ e $b(1/x)$, il che non può dar luogo ad alcun equivoco.

si trova che il risnltato di essa operazione si può scrivere

$$\text{(a)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, \mathrm{I}^n \, a(x) = b(\mathrm{I}) \cdot a(x),$$

oppure

$$\text{(b)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \mathrm{I}^{-n} \, b\left(\frac{1}{x}\right) = a(\mathrm{I}^{-1}) \cdot b\left(\frac{1}{x}\right),$$

o infine

$$\text{(c)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, x^n$$

con

$$(9) \qquad c_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \, a_{n+\nu} .$$

Si noti che

$$(10) \qquad \mathrm{I}^{-n} \, b(1/x) = b_0 \, x^n + b_1 \, x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} \, x + b_n .$$

9. — Il risultato dell'operazione (5) è regolare entro il cerchio ϱ, singolare fuori di ϱ come la $a(x) \, b(1/x)$ e quindi singolare al più nei luoghi dove lo è la $a(x)$. Sia x_0 un punto esterno a ϱ e tale che in una corona circolare di centro x_0 ed esterna a ϱ la $a(x)$ si mantenga regolare e si abbia

$$a(x) = \boldsymbol{P}(x - x_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{(x - x_0)^\nu} ;$$

nello stesso intorno di x_0 sarà

$$b(1/x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu \, (x - x_0)^\nu$$

onde, essendo $\mathbf{i} . a(x) \, b(1/x)$ singolare come $a(x)$, si avrà

$$\mathbf{i} . a(x) \, b\left(\frac{1}{x}\right) = \boldsymbol{P}_1(x - x_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_\nu}{(x - x_0)^\nu} ,$$

dove

$$C_\nu = \sum_{\mu=0}^{\infty} B_\mu \, A_{\nu+\mu} ,$$

cioè i coefficienti C_ν sono dati dalla regola (9).

10. — Si cerchi la soluzione $a(x)$ dell'equazione

$$\mathbf{i} \cdot a(x)\, b(1/x) = \text{cost.}, \tag{11}$$

essendo $b(1/x)$ una funzione uniforme data, regolare in tutto il campo esterno ad un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio minore di ϱ, e che non sia nulla sulla circonferenza ϱ stessa [1]. S'intende che la soluzione $a(x)$ cercata debba essere regolare in un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio maggiore di ϱ. Ciò posto, in forza dell'equazione data, la funzione $a(x)\, b(1/x)$ non ha alcuna singolarità fuori di ϱ, ma le sue singolarità sono al più nei posti dove è singolare la $a(x)$, onde o la $a(x)$ stessa non ha singolarità fuori di ϱ, e quindi si riduce ad una costantc, o queste singolarità sono tali da sparire colla moltiplicazione per una funzione regolare $b(1/x)$, cioè sono semplici poli.

Onde *l'equazione* (11), *sotto le ipotesi fatte, ammette per soluzione sole funzioni razionali aventi i poli negli zeri della* $b(1/x)$ *esterni al cerchio* ϱ *e di ordine non maggiore dell'ordine di questi zeri stessi.*

Inversamente, ogni funzione razionale soddisfacente a queste condizioni sarà soluzione dell'equazione (11).

La costante del secondo membro dell'equazione (11) sarà nulla se si prende $a(x)$ per modo che sia $a(x)\, b(1/x)$ nulla per $x = \infty$. Aggiunta questa condizione, abbiamo che se gli zeri di $b(1/x)$ esterni a ϱ (per ipotesi in numero finito) sono nei punti $\infty, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ e degli ordini di multiplicità $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ rispettivamente, la forma generale della soluzione dell'equazione funzionale

$$\mathbf{i} \cdot a(x)\, b(1/x) = 0 \tag{12}$$

sarà:

$$a(x) = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{\lambda_\nu} \frac{A_{\mu,\nu}}{(x - \alpha_\nu)^\mu} + A_{0,0} + A_{0,1}\, x + \dots + A_{0,\lambda_0 - 1}\, x^{\lambda_0 - 1}, \tag{13}$$

dove le $A_{\mu,\nu}$ sono costanti arbitrarie.

---

[1] S'intende che quest'ultima condizione non restringe la generalità della funzione $b(1/x)$, potendosi variare di pochissimo la circonferenza ϱ.

11. — L'equazione (12) si può considerare sotto vari aspetti.

a) Essa si può scrivere [§ 8, (a)]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \mathrm{I}^n a(x) = 0 ; \tag{14}$$

questa è un'equazione funzionale rispetto ad $a(x)$, e la soluzione ne è data dal § precedente.

b) La stessa equazione si può pure scrivere [§ 8, (b)]

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (b_0 x^n + b_1 x^{n+1} + \dots + b_{n+1} x + b_n) = 0 \tag{15}$$

e come tale ci esprime il seguente problema: Dato il sistema di polinomi $\mathrm{I}^{-n} b(1/x)$, trovare i coefficienti di uno sviluppo dello zero procedente per questi polinomi [1]; questi coefficienti sono quelli dello sviluppo in serie di potenze positive di x delle funzioni razionali indicate al § precedente.

c) Infine dall'equazione (12) si ha ancora [§ 8, (c)];

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 ;$$

onde segue che la risoluzione dell'equazione (12) dà anche la soluzione del sistema di infinite equazioni lineari ad infinite incognite a_n:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu a_{n+\nu} = 0 , \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) ;$$

ferme sempre le ipotesi fatte a principio del § 10.

12. — La classe (chiusa) delle funzioni aventi la proprietà che il gruppo di operazioni costituito dalla somma, dalla moltiplicazione per costanti arbitrarie e dalle operazioni I riproduca funzioni dello stesso insieme, è dato dalle funzioni razionali che non sono infinite per $x = 0$; è evidente d'altronde che questa ultima restrizione non è sostanziale. Infatti, ogni funzione razionale è composta di termini della forma $A x^n$ e $B/(x - \alpha)^m$; la somma e la moltiplicazione per

---

[1] Cfr. la mia Memoria *Sui sistemi di funzioni analitiche ecc.*, Mem. II, Annali di Matematica, S. II, T. XII, 1884.

costanti arbitrarie riproducono funzioni della stessa natura, e lo stesso succede applicando l'operazione I, poichè

$$\mathrm{I}\cdot A\, x^n = A\, x^{n-1},$$

ed

$$\mathrm{I}\,\frac{B}{(x-\alpha)^m} = \frac{B}{x}\left\{\frac{1}{(x-\alpha)^m} - \frac{(-1)^m}{\alpha^m}\right\}\ \text{(1)}$$

che è una funzione razionale, infinita solo per $x = \alpha$.

Inversamente, un gruppo lineare di funzioni che non si altera col gruppo di operazioni sopra indicato è composto di funzioni razionali: infatti, sia

$$F = c_{01}\,\varphi_1 + c_{02}\,\varphi_2 + \dots + c_{0n}\,\varphi_n$$

e sia

$$\mathrm{I}\,F = c_{11}\,\varphi_1 + c_{12}\,\varphi_2 + \dots + c_{1n}\,\varphi_n\,;$$

sarà analogamente

$$\mathrm{I}^n\,F = c_{n1}\,\varphi_1 + c_{n2}\,\varphi_2 + \dots + c_{nn}\,\varphi_n\,,$$

da cui coll'eliminazione delle $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ risulta:

$$\begin{vmatrix} F & c_{01} & c_{02} & \dots & c_{0n} \\ \mathrm{I}\,F & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{I}^n\,F & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = 0\,,$$

equazione della forma (14) e che ammette per soluzione un sistema di funzioni razionali.

13. — Si consideri ora l'equazione

$$\mathbf{i}\cdot a(x)\, b(1/x) = k(x)\,, \tag{16}$$

essendo $k(x)$ una funzione data regolare in un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio maggiore di ϱ, $b(1/x)$ ed $a(x)$ essendo soggette

(1) Si noti infatti che $\mathrm{I}\,a(x) = \{ a(x) - a(0) \}/x$.

alle stesse condizioni del § 10. Per definizione, $k(x)$ avrà fuori di ϱ le stesse singolarità di $a(x)\, b(1/x)$; onde $a(x)$ avrà le sue singolarità nei luoghi dove è singolare $k(x)$, oltre ai poli che essa può avere e che sono distrutti dagli zeri di $b(1/x)$. La funzione

$$a(x)\, b(1/x) - k(x)$$

sarà regolare fuori di ϱ, e quindi sarà esprimibile fuori di ϱ mediante una serie $\boldsymbol{P}(1/x)$ di potenze $1/x$; talchè si avrà:

$$a(x) = \dot{\mathrm{I}}\, \frac{k(x)}{b(1/x)} + \dot{\mathrm{I}}\, \frac{\boldsymbol{P}(1/x)}{b(1/x)}. \tag{17}$$

La prima parte del secondo membro si può determinare mediante lo sviluppo di Laurent relativo a $\dfrac{k(x)}{b(1/x)}$ in una corona circolare che comprenda ϱ; la seconda parte è una funzione razionale regolare in ϱ, ed avente i suoi poli dove è nulla la $b(1/x)$ e d'ordine eguale o inferiore a quello degli zeri di $b(1/x)$; talchè è una soluzione dell'equazione (12).

14. — Colla risoluzione dell'equazione (16) si viene a rispondere ai seguenti problemi:

a) Trovare una funzione $a(x)$ che soddisfi all'equazione funzionale

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, \mathrm{I}^n\, a(x) = k(x).$$

La soluzione ne è data da

$$\dot{\mathrm{I}}\, \frac{k(x)}{b(1/x)},$$

cui si aggiunge una soluzione qualunque dell'equazione (12).

b) Sviluppare una data funzione $k(x)$ in serie di polinomi

$$\mathrm{I}^{-n}\, b(1/x) = b_0\, x^n + b_1\, x^{n-1} + \ldots + b_n,$$

cioè trovare i coefficienti dello sviluppo. Si ottiene

$$k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \mathrm{I}^{-n}\, b(1/x),$$

dove le a_n sono i coefficienti della serie di potenze $a(x)$ determinata nel § precedente.

c) Determinare un sistema di numeri a_n soddisfacenti ad infinite equazioni lineari della forma

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \, a_{n+\nu} = k_n \,, \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)\,;$$

sotto le condizioni fra le a_n, b_n e k_n che risultano dalle ipotesi dei §§ 10 e 13. Questo problema viene risoluto dai coefficienti a_n della serie $a(x)$, ed ammette infinite soluzioni per l'arbitrarietà della soluzione dell'equazione (12).

d) Determinare una funzione $F(x)$ che fuori di un cerchio ϱ abbia le stesse singolarità di una funzione data $k(x)$, che entro il cerchio abbia singolarità simili a quelle di una funzione data $b(1/x)$ e sia regolare sulla circonferenza. Questa funzione è la $a(x)\,b(1/x)$, essendo $a(x)$ una soluzione dell'equazione (16).

15. — Conviene osservare che, posto

$$a(x)\,b(1/x) = k(x) + h(1/x)\,,$$

e ferme sempre le ipotesi del § 10, è:

a) dati arbitrariamente a e b, sono determinati k ed h;

b) dati k ed h, il problema di determinare a e b possibile [1];

c) dati arbitrariamente b e k, il problema di determinare a ed h è possibile per ciò che precede, e similmente è possibile il problema di determinare b e k dati a ed h;

d) invece è impossibile in generale di determinare b ed h dati arbitrariamente a e k o viceversa, poichè la relazione (18) richiede che k ed a siano singolari fuori di ϱ negli stessi luoghi; in altri termini: è impossibile di risolvere l'equazione funzionale (16), dove a e k sono funzioni date e b è una funzione incognita, a meno che fra a e k non passino delle speciali relazioni di cui sarebbe interessante uno studio più approfondito.

16. — Analogamente all'operazione I^m definita al § 6, si può definire l'operazione

$$\mathrm{J}^m\,\varphi = \mathbf{j}\cdot\varphi(x)\,x^m\,,$$

[1] Guichard, Mem. cit., §§ 3 e 4.

essendo $\varphi(x)$ una funzione uniforme regolare lungo la circonferenza ϱ. Su questa operazione si possono ripetere le considerazioni fatte sull'operazione I^m; ci conviene solo di aggiungere un'osservazione sulla forma dello sviluppo dell'operazione J^m applicata ad una funzione $\varphi(x)$ con un solo punto singolare, nel caso che la circonferenza ϱ racchiuda quel punto. Sarà

$$\varphi(x) = G\left(\frac{1}{x-\alpha}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{n-1}}{(x-\alpha)^n},$$

da cui, sviluppando,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_{n-1}}{x^n} \binom{n+\nu-1}{\nu} \frac{\alpha^\nu}{x^\nu},$$

ossia, ordinando rispetto ad x,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(A;\alpha)}{x^{n+1}},$$

dove si è posto

$$p_n(A;\alpha) = \alpha^n A_0 + \binom{n}{1}\alpha^{n-1} A_1 + \binom{n}{2}\alpha^{n-2} A_2 + \dots + A_n;$$

e questo coefficiente non è altro che l'n^{simo} polinomio di APPELL [1] formato coi coefficienti $A_0, A_1, \dots$. Ne segue

$$\mathrm{J}^m G\left(\frac{1}{x-\alpha}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{m+n}(A;\alpha)}{x^{n+1}}. \tag{18}$$

17. — Se lo sviluppo di $\varphi(x)$, invece che in serie di potenze di $1/x$, si fa in serie di potenze di $1/(x-b)$, l'operazione corrispondente a J^m, e che si può indicare con J_b^m, è quella che serve all'applicazione dei teoremi di MITTAG-LEFFLER per formare l'espressione analitica di una funzione monogena che in posti determinati a_ν diventa singolare come date funzioni $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$, o che rappre-

---

(1) *Sur une classe de polynômes*, § 1.

senta una funzione analitica data in punti assegnati con un grado di approssimazione prefissato. Infatti, l'espressione analitica costruita nel teor. A del § 1 della citata Memoria di MITTAG-LEFFLER, *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes,* teorema su cui si fondano in sostanza le altre proposizioni di quell'importante lavoro, si può scrivere:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(x-b_\nu)^{m_\nu}} \mathrm{J}_{b_\nu}^{m_\nu} G_\nu \left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$$

che, nel caso speciale in cui il sistema dei punti singolari a_ν abbia per unico punto limite $x=\infty$, diviene

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} x^{m_\nu} \mathrm{I}^{m_\nu} G_\nu \left(\frac{1}{x-a_\nu}\right).$$

II.

18. — Sia

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$$

una funzione trascendente intera di z, e $\varphi(x)$ una funzione uniforme e monogena che si supporrà regolare nel punto $x=0$, il che non costituisce una restrizione sostanziale; sia ϱ una curva che racchiude un'area semplicemente connessa e che non passa per il punto zero nè per alcun punto dove sia singolare la $\varphi(x)$.

L'espressione

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\varrho)} g\left(\frac{x}{y}\right) \varphi(y) \frac{dy}{y}, \tag{1}$$

dove l'integrazione s'intende eseguita lungo la linea ϱ in un senso determinato, rappresenta una funzione intera ed in generale trascendente di x.

Infatti, preso un punto x qualunque nel piano, si ha identicamente, per questo valore finito di x e per y diverso da zero,

$$\frac{1}{y} g\left(\frac{x}{y}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{x^n}{y^{n+1}}.$$

Questa serie è evidentemente convergente in egual grado rispetto ad y lungo tutto il contorno ϱ; moltiplicando dunque la serie per $\frac{1}{2\pi i}\varphi(y)$ che rimane finita e continua lungo tutta la linea d'integrazione, ed integrando termine a termine, viene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)} g\left(\frac{x}{y}\right)\varphi(y)\frac{dy}{y} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n,$$

posto

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)} \varphi(y)\frac{g_n}{y^{n+1}}\,dy.$$

Sia ora P il massimo valore di $\varphi(y)$ lungo la linea ϱ: essendo $g(z)$ funzione intera si ha, indicando R un numero grande quanto si vuole,

$$|g_n| < \frac{M}{R^n};$$

ma se δ è la minima distanza dei punti del contorno ϱ dal punto $y=0$, si ha

$$\left|\frac{\varphi(y)}{y^{n+1}}\right| < \frac{P}{\delta^{n+1}},$$

talchè

$$|C_n| < \frac{MP}{R^n\,\delta^{n+1}}$$

e la serie

$$\Sigma\, C_n x^n$$

è convergente in tutto il piano, cioè rappresenta una funzione intera, c. d. d..

19. — Rappresentiamo con $\mathbf{g}_\varrho$ l'operazione (1) che eseguita sopra una funzione data rispetto ad un contorno dato, genera, come si è visto, una funzione intera. Questa funzione rimane la medesima al variare della linea ϱ finchè questa non attraversa il punto $x=0$ o qualche punto dove sia singolare la $\varphi(x)$; essa varia invece quando il contorno attraversa tali punti. Dunque l'operazione (1) eseguita rispetto a linee chiuse diverse può dare origine a funzioni intere

diverse, e fra queste passeranno delle relazioni dipendenti dalla natura dei punti singolari della $\varphi(x)$ compresi fra queste linee e che ora accenneremo.

20. — Sia la linea ϱ una circonferenza col centro nel punto $x=0$ e con raggio piccolissimo; sarà lungo quella circonferenza

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n ,$$

onde

$$\mathbf{g}_0 \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n x^n .$$

Per trovare le relazioni fra le varie funzioni $\mathbf{g}$ relative a diversi contorni ϱ, basterà considerare il caso, cui si possono in ultima analisi ricondurre gli altri, di due curve ϱ e ϱ' che formino ciascuna il contorno di due campi semplicemente connessi e tali che ϱ' sia tutta compresa nel campo chiuso da ϱ. Allora se fra ϱ e ϱ' vi è il punto zero e nessun punto singolare della $\varphi(x)$, per il teorema di CAUCHY si avrà:

$$\mathbf{g}_\varrho = \mathbf{g}_{\varrho'} + \mathbf{g}_0 .$$

Se invece fra ϱ e ϱ' vi è il punto zero, e delle singolarità qualunque della funzione $\varphi(x)$, escludiamo il punto $x=0$ con un cerchio piccolissimo e le altre singolarità con una curva σ che non abbia punti a comune con questo cerchio; si avrà

$$\mathbf{g}_\varrho = \mathbf{g}_{\varrho'} + \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_\sigma .$$

Ma, secondo il § 2, la funzione $\varphi(x)$ si può scomporre nella somma di due, l'una $\mathbf{i}_\sigma \varphi$ regolare in tutto il campo chiuso da σ, l'altra $\mathbf{j}_\sigma \varphi$ singolare entro σ come $\varphi(x)$; onde l'integrale relativo ad $\mathbf{i}_\sigma \varphi$ è nullo, e rimane:

$$\int_{(\sigma)} g\left(\frac{x}{y}\right) \varphi(y) \frac{dy}{y} = \int_{(\sigma)} g\left(\frac{x}{y}\right) \mathbf{j}_\sigma \varphi(y) \frac{dy}{y} ,$$

talchè

(2) $$\mathbf{g}_\varrho = \mathbf{g}_{\varrho'} + \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_\sigma \cdot \mathbf{j}_\sigma \varphi .$$

Le varie relazioni fra le funzioni $\mathbf{g}_\varrho$ e $\mathbf{g}_{\varrho'}$ si troveranno esaminando le varie forme cui si può ridurre la $\mathbf{j}_\sigma \varphi$.

a) Se fra ϱ e ϱ' vi è un solo punto singolare α, si potrà assumere come curva σ una circonferenza di centro α e di raggio sufficientemente piccolo; sarà allora

$$\mathbf{j}_\sigma \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(x-\alpha)^{n+1}},$$

onde, applicando il teorema di CAUCHY,

$$\mathbf{g}_\sigma \cdot \mathbf{j}_\sigma \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} \frac{\mathrm{d}^n \{(1/\alpha)\, g\,(x/\alpha)\}}{\mathrm{d}\,\alpha^n}. \tag{3}$$

b) Se fra ϱ e ϱ' vi è un numero finito di punti singolari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, con ragionamento analogo si trova

$$\mathbf{g}_\sigma \cdot \mathbf{j}_\sigma \varphi = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\nu,n}}{n!} \frac{\mathrm{d}^n \{(1/\alpha_\nu)\, g\,(x/\alpha_\nu)\}}{\mathrm{d}\,\alpha_\nu^n}. \tag{4}$$

c) Supponiamo infine che in σ vi siano infiniti punti singolari per la $\varphi(x)$, e siano

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots,$$

e limitiamoci per brevità al caso che essi abbiano un solo punto limite b; i casi più generali potendosi trattare in modo analogo a quello tenuto dal MITTAG-LEFFLER nella più volte citata Memoria.

La funzione φ, e quindi la $\mathbf{j}_\sigma \varphi$, sia singolare in α_ν come una determinata funzione ad un solo punto singolare

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-\alpha_\nu}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\nu,n}}{(x-a_\nu)^{n+1}},$$

questa si può sviluppare in serie di potenze negative di $x-b$ della forma

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-\alpha_\nu}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{\nu,n}}{(x-b)^{n+1}}$$

convergente fuori di un cerchio di centro b e di raggio $|b-\alpha_\nu|$. Ora, posto

$$F_\nu(x) = \sum_{n=m_\nu}^{\infty} \frac{B_{\nu,n}}{(x-b)^{n+1}},$$

il teorema di MITTAG-LEFFLER c'insegna a determinare i numeri interi m_ν per modo che la serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu(\nu)$ sia convergente, e $\mathbf{j}_\sigma \varphi$

si può, per lo stesso teorema, porre sotto la forma:

$$\mathbf{j}_\sigma \varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu(x) + G\left(\frac{1}{x-b}\right).$$

Ora si potrà sempre scrivere

$$\mathbf{j}_\sigma \varphi = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} F_\nu(x) + \sum_{\nu=\mu}^{\infty} F_\nu(x) + G\left(\frac{1}{x-b}\right),$$

prendendo μ abbastanza grande perchè sia

$$|b - a_\nu| < |b| \qquad \text{per} \qquad \nu \geq \mu;$$

in tal caso si potrà applicare l'integrazione alla prima sommatoria come nel caso b), e alla seconda, che è una serie convergente in egual grado, lungo una circonferenza di centro b cui il punto $x=0$ sia esterno ed i punti α_μ, $\alpha_{\mu+1}$, ... siano interni, e si avrà:

$$\mathbf{g}_\sigma \cdot \mathbf{i}_\sigma \varphi = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\nu,n}}{n!} \frac{d^n \{(1/\alpha_\nu)\, g\,(x/\alpha_\nu)\}}{d\alpha_\nu^n} +$$

(5)

$$+ \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \sum_{n=m_\nu}^{\infty} \frac{B_{\nu,n}}{n!} \frac{d^n \{(1/b)\, g\,(x/b)\}}{db^n}.$$

21. — Risulta da ciò che precede che l'operazione $\mathbf{g}$ applicata a funzioni analitiche uniformi, serve alla costruzione di funzioni intere; e di più, che le *funzioni risultato* si possono scindere in somme di funzioni intere più semplici, al modo stesso che le *funzioni oggetto* φ si possono scomporre nella somma di funzioni uniformi più semplici e che ne isolano le singolarità. Per esempio, se si assumono come oggetto le funzioni uniformi più semplici, che sarebbero le

$$\frac{A}{x-\alpha}, \qquad \frac{A}{(x-\alpha)^{k+1}}$$

si trova come risultato le funzioni più semplici rispetto all'operazione $\mathbf{g}$:

$$\frac{A}{\alpha}\, g\left(\frac{x}{\alpha}\right), \qquad \frac{A}{k!} \frac{d^k \{(1/\alpha)\, g\,(x/\alpha)\}}{d\alpha^k}.$$

Ma le serie della forma (3) non si presentano soltanto applicando l'operazione **g** alle funzioni ad un sol posto singolare $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$; se infatti $\varphi(x)$ è una funzione regolare in tutti i punti di una circonferenza di centro α e di raggio ϱ minore di $|\alpha|$, si avrà in una corona circolare concentrica e comprendente quella circonferenza

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(y-\alpha)^{n+1}} + \boldsymbol{P}(y-\alpha)$$

con

$$|a_n| < M(|\alpha| - \varepsilon)^n,$$

dove M è un numero positivo finito ed ε una quantità positiva minore di $|\alpha|$; inoltre entro il cerchio di centro α e di raggio $|\alpha|$ si ha:

$$\frac{1}{y} g\left(\frac{x}{y}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \{(1/\alpha)\, g\,(x/\alpha)\}}{d\alpha^n} \frac{(y-\alpha)^n}{n\,!}$$

con

$$\left| \frac{1}{n!} \frac{d^n \{(1/\alpha)\, g\,(x/\alpha)\}}{d\alpha^n} \right| < \frac{M'}{(|\alpha| - \varepsilon')^n},$$

dove si può prendere $\varepsilon' < \varepsilon$ ed M' è una quantità finita positiva; onde integrando lungo la circonferenza ϱ, viene

(6) $$\mathbf{g}_\varrho\, \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n\,!} \frac{d^n \{(1/\alpha)\, g\,(x/\alpha)\}}{d\alpha^n},$$

dove la serie del secondo membro è convergente incondizionatamente ed in egual grado per tutti i valori finiti di x.

Troviamo così che *le funzioni intere generate dall'operazione* **g** *si possono sviluppare in serie della forma* (6), *e ciò in infiniti modi per l'arbitrarietà che vi è nella scelta del punto* α.

Troviamo altresì che *una serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \frac{d^n \{(1/z)\, g\,(x/z)\}}{dz^n},$$

dove è

$$c_n \backsim \alpha^n,$$

rappresenta una funzione intera di x per ogni valore di z tale che sia $|z| > \alpha$. Se è $|z| < \alpha$, la serie è divergente; per $|z| = \alpha$ si è in dubbio. In questo ultimo caso si potrà secondo la forma della funzione g, usare anche dei metodi proposti dal POINCARÉ [1] per la ricerca dei campi di convergenza di queste serie nel piano x.

22. — Come applicazione, si eseguisca l'operazione $\mathbf{g}_\varrho$ relativa ad un contorno qualunque, sopra una funzione

$$G\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)$$

con un solo posto singolare e nulla per $x = \infty$. L'operazione darà i risultati

$$0\,, \qquad \mathbf{g}_0\, G = H(x)\,, \qquad -H(x)\,,$$

secondochè la curva ϱ non racchiuderà nè x nè α, o li racchiuderà tutti e due, o racchiuderà solo il punto $x = 0$, o solo il punto $x = \alpha$.

Per ogni punto z del piano tale che sia

$$|z-\alpha| < |z|,$$

cioè posto dalla parte di α rispetto alla perpendicolare innalzata nella metà del segmento $\overline{0\alpha}$, la $H(x)$ ammetterà uno sviluppo della forma

$$H(x) = -\Sigma \frac{c_n}{n\,!}\,\frac{\mathrm{d}^n\,\{(1/z)\,g\,(x/z)\}}{\mathrm{d}z^n}\,.$$

23. — Merita osservazione il risultato dell'operazione $\mathbf{g}_\varrho\,\varphi(x)$ quando ϱ è una circonferenza avente il centro nell'origine. In tal caso si ha

$$\mathbf{g}_\varrho\,\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\, c_n\, x^n\,,$$

ove sia

$$\mathbf{i}_\varrho\,\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n\,.$$

---

(1) Mem. citata, § 7.

Data dunque una serie di potenze $\boldsymbol{P}(x)$, si può definire l'operazione $\mathbf{g}$ come quella che consiste nel moltiplicare per g_n il termine in x^n della serie; e per le proprietà di pura forma di questa operazione si può fare astrazione dalla convergenza della serie e quindi dalla circonferenza ϱ. L'operazione inversa g^{-1} darebbe per risultato

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{g_n} x^n .$$

Se la serie data è convergente in un cerchio di raggio finito, la $\mathbf{g}\,\boldsymbol{P}(x)$ è convergente in tutto il piano, onde la $\mathbf{g}\,\boldsymbol{P}(x)$ non può essere convergente in un cerchio di raggio finito altro che se la $\boldsymbol{P}(x)$ è sempre divergente.

Applicando l'operazione ora definita al prodotto

$$a(x)\, b(1/x)$$

ed alle formole ottenute ai §§ 6 e seguenti, si giungerebbe per altra via a risultati che ho dati in un altro lavoro [1] e che per questa ragione non starò qui a riprendere.

III.

24. — Si ponga $g(z) = e^z$, e si otterrà l'operazione

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{e}_\varrho\, \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\varrho)} e^{x/y} \varphi(y) \frac{dy}{y}$$

che è la trasformazione di Abel citata nell'introduzione del presente lavoro, per il caso in cui la linea d'integrazione è chiusa.

Dalla (1) segue:

$$\text{(2)} \qquad \frac{d\, \mathbf{e}_\varrho\, \varphi(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\varrho)} e^{x/y} \varphi(y) \frac{dy}{y^2} = \mathbf{e}_\varrho \frac{\varphi(x)}{x} .$$

---

[1] *Sopra una generalizzazione della derivazione* (Giornale di Matematiche diretto da G. Battaglini, t. XXII, Napoli 1884).

Limitandosi ora al caso che la linea ϱ sia una circonferenza col centro nella origine, e posto

$$\mathbf{i}_\varrho\, \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n ,$$

sarà

$$\Phi(x) = \mathbf{e}_\varrho\, \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, x^n}{n\,!}$$

e dalla (2) risulta facilmente

$$\mathbf{e} \cdot \mathrm{I}^m\, \varphi(x) = \frac{\mathrm{d}^m\, \Phi(x)}{\mathrm{d}\, x^m}. \tag{3}$$

Ne segue, posto

$$b(z) = b_0 + \frac{b_1}{1}\, z + \frac{b_2}{1\cdot 2}\, z^2 + \ldots + \frac{b_m}{m\,!}\, z^m ,$$

che

$$\mathbf{e} \cdot \varphi(x)\, b\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{k\,!}\, \frac{\mathrm{d}^k\, \Phi(x)}{\mathrm{d}x^k} ,$$

e, sotto la condizione di convergenza del risultato, la stessa formola si può estendere al caso che $b(z)$ sia una serie di potenze di z invece che un polinomio. È condizione sufficiente perchè il risultato sia convergente in tutto il piano che esista un ϱ tale che le serie $i_\varrho(x)$ e $b(1/x)$ abbiano una corona circolare di convergenza in comune.

25. — Sviluppando l'operazione precedente, si ha dapprima:

$$\mathbf{e} \cdot \varphi(x)\, b\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n\,!}\, \frac{\mathrm{d}^n\, \Phi(x)}{\mathrm{d}x^n}. \tag{4}$$

Inoltre, ordinando il risultato rispetto ad x, si ha:

$$\mathbf{e} \cdot \varphi(x)\, b\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n\, x^n}{n\,!} ,$$

dove

$$c_n = b_0\, a_n + \frac{b_1}{1}\, a_{n+1} + \ldots + \frac{b_\nu}{\nu\,!}\, a_{n+\nu} + \ldots ;$$

infine, ordinando rispetto ai coefficienti a_n, viene, come è facile a verificare,

$$\mathbf{e} \cdot \varphi(x)\, b\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\, p_n(b\,;\,x), \tag{5}$$

dove, usando la notazione del § 16, $p_n(b\,;\,x)$ indica l'n^{simo} polinomio di APPELL costruito coi coefficienti $b_0, b_1, b_2, \ldots$. La formola (5) si può anche scrivere, adottando la notazione introdotta dall'APPELL stesso al § 12 della citata Memoria,

$$\mathbf{e} \cdot \varphi(x)\, b(1/x) = \Phi(B)\,.$$

Dalle formole (4) e (5) appare, a quanto mi sembra, una specie di correlazione fra gli sviluppi formati colle derivate successive e quelli formati coi polinomî di APPELL: per modo che ad ogni sviluppo di una specie per una data funzione corrisponde per la stessa funzione e sotto certe condizioni, uno sviluppo dell'altra specie coi coefficienti scambiati.

La stessa cosa si è già presentata per gli sviluppi formati colle I^m e coi polinomî I^{-n} considerati al § 8. Questa correlazione si manifesta ancora nello sviluppo (19) del § 16, paragonato collo sviluppo della stessa funzione $G\left(\dfrac{1}{x-\alpha}\right)$ per le potenze di $x - x_0$.

Le relazioni sviluppate al § 3 della citata Memoria di APPELL si potrebbero qui ritrovare facilmente dallo sviluppo dell'operazione

$$\mathbf{e} \cdot \varphi(x)\, b(1/x)\, c(1/x)$$

e fare così dipendere da integrali definiti.

26. — Abbiasi da risolvere l'equazione

$$\mathbf{e} \cdot a(x)\, b(1/x) = 0\,. \tag{6}$$

Osservo intanto che

$$\mathbf{e} \cdot a(x)\, b(1/x) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}\; a(x)\, b(1/x)$$

e che, per essere

$$\mathbf{e}\, \boldsymbol{P}(x) = 0\,,$$

deve essere necessariamente $P(x) = 0$; onde la (6) ammette per soluzioni le soluzioni $a(x)$ della equazione (12) del § 10, cioè le funzioni razionali aventi per poli quei punti esterni a ϱ nei quali è nulla la $b(1/x)$, e d'ordine rispettivamente minore o al più eguale all'ordine degli zeri di $b(1/x)$.

Ma l'equazione (6) si può considerare sotto due altri aspetti.

a) Ordinandola rispetto alle b_n, essa si presenta sotto la forma di un'equazione differenziale lineare omogenea, a coefficienti costanti, ma con infiniti termini,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} \frac{d^n A(x)}{dx^n} = 0, \tag{7}$$

dove è posto

$$A(x) = \mathrm{e} \cdot a(x);$$

ora siccome per la (13) del § 10 si ha

$$a(x) = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{\lambda_\nu} \frac{A_{\mu,\nu}}{(x-\alpha_\nu)^\mu},$$

per il § 19 sarà

$$A(x) = -\sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\mu=0}^{\lambda_\nu} \frac{A_{\mu,\nu}}{(\mu-1)!} \frac{d^{\mu-1}}{d\alpha^{\mu-1}} \frac{e^{x/\alpha_\nu}}{\alpha_\nu}, \tag{8}$$

ed è facile verificare che questa soluzione coincide con quella ben nota delle equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti quando il numero dei termini dell'equazione è finito.

b) L'equazione (6) si può anche scrivere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} p_n(b; x) = 0,$$

dove le incognite sono i coefficienti a_n, ed esprime la questione: *Dato un sistema di polinomi di Appell, determinare i coefficienti degli sviluppi dello zero ordinati rispetto a questi polinomi.* I coefficienti in discorso si ottengono sviluppando le (8) in serie di potenze positive di x.

27. — L'insieme (chiuso) delle funzioni aventi la proprietà che il gruppo di operazioni costituito dalla somma, moltiplicazione per costanti arbitrarie e derivazione riproduca funzioni dello stesso insieme, è costituito dalle funzioni della forma (8) (cfr. § 12).

28. — Si consideri ora l'equazione

$$\text{(9)} \qquad \mathbf{e} \cdot a(x)\, b(1/x) = \Psi(x),$$

essendo $\Psi(x)$ una serie di potenze data sotto la forma

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{n!} x^n$$

e potendosi porre virtualmente, cioè fatta astrazione dalla convergenza del risultato,

$$\psi(x) = \mathbf{e}^{-1}\, \Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n .$$

L'equazione (9) si può scrivere sotto una delle forme

$$\text{(a)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} \frac{\mathrm{d}^n A(x)}{\mathrm{d}x^n} = \Psi(x),$$

dove si è posto

$$A(x) = \mathbf{e}\, a(x),$$

$$\text{(b)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} p_n(b\,; x) = \Psi(x),$$

$$\text{(c)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_0 a_n + \frac{b_1}{1} a_{n+1} + \dots + \frac{b_\nu}{\nu!} a_{n+\nu} + \dots \right) \frac{x^n}{n!} = \Psi(x),$$

e quindi esprime tre questioni diverse. S'intende che trovata una soluzione $a(x)$ della (9), le altre si ottengono aggiungendo a questa una soluzione qualunque dell'equazione (6).

Ora l'equazione (9) posta sotto la forma (c) si riconduce alla risoluzione del sistema di infinite equazioni lineari, ad infinite incognite, della forma

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_\nu}{\nu!} a_{n+\nu} = k_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

sistema che, sotto determinate condizioni per le b_ν e le k_n, abbiamo imparato a risolvere al § 14, c). Soddisfatte che siano quelle condizioni, la funzione $a(x)$ è data, come si è visto, da

$$a(x) = \mathbf{i}\,\frac{\psi(x)}{b(1/x)} \tag{10}$$

e quindi $A(x)$ da

$$A(x) = \mathbf{e}\,\frac{\mathbf{e}^{-1}\,\Psi(x)}{b(1/x)}, \tag{11}$$

ed abbiamo così risposto:

a) alla questione di determinare una funzione $A(x)$ soddisfacente ad una equazione differenziale lineare, a coefficienti costanti e non omogenea, il cui numero di termini può anche essere infinito;

b) alla questione di sviluppare una funzione data $\Psi(x)$ in serie di polinomi di APPELL.

Però, quando anche le condizioni suaccennate non fossero soddisfatte, la formola (10) applicata in modo puramente virtuale potrebbe dare origine ad una serie a coefficienti finiti benchè divergente, e la formola (11) potrebbe di conseguenza dare una serie convergente; in tal caso va verificato a posteriori che la funzione $A(x)$ così ottenuta dà la soluzione effettiva delle questioni a) e b).

Una applicazione della formola (11) si ottiene supponendo che la $b(1/x)$ si riduca ad un polinomio; in tal caso si vede senza difficoltà che quella formola ci dà, purchè la $\Psi(x)$ sia convergente, una serie convergente che sostituita nella (9) la rende soddisfatta, talchè la (11) ci compendia la soluzione dell'ordinaria equazione differenziale lineare a coefficienti costanti e non omogenea.

29. — Dall'equazione (1) si deduce:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)} e^{(x+1)/y}\,\varphi(y)\,\frac{dy}{y} = \mathbf{e}_\varrho \cdot \varphi(x)\,e^{1/x},$$

onde

$$\Phi(x+1) = \mathbf{e}\cdot\varphi(x)\,e^{\frac{1}{x}}, \tag{12}$$

ed anche, posto $\Delta\varphi = \varphi(x+1) - \varphi(x)$,

$$\Delta\,\Phi(x) = \mathbf{e}\cdot\varphi(x)\,(e^{\frac{1}{x}} - 1). \tag{13}$$

Se ora si pone

$$b(e^{1/x}) = b_0 + b_1\,e^{1/x} + b_2\,e^{2/x} + \dots + b_m\,e^{m/x},$$

questa espressione sarà sviluppabile in serie di potenze di $1/x$ convergente per ogni valore di x, eccettuato $x = 0$, e si avrà:

$$\text{(14)} \quad \mathbf{e}\cdot\varphi(x)\, b(e^{1/x}) = b_0\, \Phi(x) + b_1\, \Phi(x+1) + \ldots + b_m\, \Phi(x+m).$$

Avendosi pertanto da risolvere l'equazione alle differenze finite lineare, omogenea ed a coefficienti costanti,

$$\text{(15)} \qquad b_0\, \Phi(x) + b_1\, \Phi(x+1) + \ldots + b_m\, \Phi(x+m) = 0,$$

essa si potrà scrivere

$$\mathbf{e}\cdot\varphi(x)\, b(e^{1/x}) = 0,$$

da cui risulta (cfr. § 26)

$$\mathbf{i}_\varrho\cdot\varphi(x)\, b(e^{1/x}) = 0,$$

equazione che sappiamo essere soddisfatta da una funzione $\varphi(x)$ che sulla circonferenza ϱ e fuori si comporta come una funzione razionale, ed è infinita fuori di ϱ al più nei luoghi dove $b(e^{1/x})$ è nulla, e cogli infiniti d'ordine minore dei corrispondenti zeri di $b(e^{1/x})$. Sarà dunque $\varphi(x)$ della forma (13) del § 10, all'infuori di una arbitraria $\boldsymbol{P}(1/x)$, e quindi $\Phi(x)$ della forma (8) del § 26. Si ritrova in tal modo la soluzione ordinaria per l'equazione alle differenze finite (15).

Avendosi finalmente l'equazione alle differenze finite lineare, a coefficienti costanti e non omogenea,

$$\text{(16)} \qquad b_0\, \Phi(x) + b_1\, \Phi(x+1) + \ldots + b_m\, \Phi(x+m) = \Psi(x),$$

se ne avrà almeno virtualmente la soluzione dalla formola:

$$\text{(17)} \qquad \Phi(x) = \mathbf{e}\, \frac{\mathbf{e}^{-1}\Psi(x)}{b(e^{1/x})} \text{ [1]}.$$

---

(1) L'operazione $\mathbf{e}$ lievemente modificata può servire alla trasformazione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti polinomi in equazioni alle differenze, o viceversa. Vedasi in proposito una mia Nota nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo, del giugno 1886. Devo alla cortesia del Sig. G. ENESTRÖM la seguente indicazione: il germe di quella trasformazione trovasi nella teoria delle funzioni generatrici del LAPLACE (*Calcul des probabilités*), ed è stato sviluppato dallo SPITZER in varie Note pubblicate nel Grunert's Archiv, T. 32 e 33.

Parte Seconda

I.

30. — Sia $A(x, y)$ una funzione razionale delle due variabili x ed y, della forma

$$A(x, y) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)},$$

dove $f(x, y)$ è una funzione intera di ordine m in y e $g(x, y)$ una funzione intera d'ordine inferiore; sia poi $\varphi(y)$ una funzione analitica uniforme e monogena qualsivoglia, e sia infine (α, ϱ) una circonferenza di centro α e di raggio ϱ arbitrari, posta nel piano y ma che non passi per alcun punto singolare della $\varphi(y)$.

Prendo a considerare l'operazione

$$\mathfrak{a}_\varrho \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\varrho)} A(x, y) \varphi(y) \, dy \tag{1}$$

applicata alla funzione $\varphi(y)$, la linea d'integrazione essendo la circonferenza ϱ.

31. — L'operazione (1) è funzionale, cioè dà origine a funzioni analitiche. Infatti, si indichi con C_ϱ la linea del piano x che corrisponde al circolo ϱ mediante la trasformazione

$$f(x, y) = 0, \tag{2}$$

e si prenda un punto $x = x_0$ il quale abbia da ogni punto della linea C_ϱ una distanza maggiore di una quantità positiva δ. Per ogni punto y della circonferenza d'integrazione la $A(x, y)$ non sarà singolare per i punti del cerchio di centro x_0 e di raggio δ, talchè per i valori di x compresi entro questo cerchio si avrà:

$$A(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n A(x_0, y)}{\partial x_0^n} (x - x_0)^n. \tag{3}$$

Ma essendo, lungo tutta la circonferenza ϱ,

$$\left| \frac{1}{n!} \frac{\partial^n A(x_0, y)}{\partial x_0^n} \right| < \frac{M}{\delta^n},$$

dove M è un numero positivo, la serie (3) sarà convergente in egual grado lungo la linea d'integrazione, e perciò, moltiplicando per $\varphi(y)$ ed integrando termine a termine, viene:

$$\mathbf{a}_\varrho \varphi = \boldsymbol{P}(x - x_0),$$

il che dimostra che la (1) è un'operazione funzionale. La serie trovata si può continuare analiticamente per ogni campo connesso racchiuso da un ramo della linea C_ϱ, ma in campi separati da questa linea non è possibile la continuazione analitica; perciò l'espressione $\mathbf{a}_\varrho \varphi$ sarà in generale poligena e suscettibile di rappresentare, nei diversi campi separati dalla linea C_ϱ, parti di funzioni analitiche diverse. La linea C_ϱ costituisce coi suoi diversi rami, ciò che l'HERMITE ha chiamato *tagli* (1) dell'integrale definito. È chiaro che la dimostrazione precedente si applicherebbe senza difficoltà a funzioni $A(x, y)$ ed a linee d'integrazione più generali.

32. — Sulla espressione (1) si presentano due questioni: primo, come si muti all'oltrepassare dei tagli la funzione analitica che essa rappresenta; secondo, come essa funzione si muti al mutare della circonferenza d'integrazione. La risposta alla prima di queste domande è stata data dall'HERMITE (2) per il caso che la linea d'integrazione sia un segmento rettilineo, ma, come vedremo, il risultato si conserva anche nel caso che considero; rispetto a questa prima domanda mi sembra opportuno d'introdurre una rappresentazione geometrica che credo non debba essere senza vantaggio per la maggior chiarezza di queste e di analoghe considerazioni.

33. — Per ogni punto del piano x l'equazione

(2) $$f(x, y) = 0$$

dà m valori per $y - \alpha$: rappresentando i moduli di queste quantità

(1) *Coupures.*

(2) Memoria citata.

$y-\alpha$ con delle ordinate innalzate perpendicolarmente al piano x nel punto corrispondente ed in senso determinato, si otterrà come luogo degli estremi di queste ordinate una superficie S_α riferita agli assi u (reale) e v (immaginario) del piano x e ad un asse w perpendicolare a questo piano. La S_α sarà in generale a più strati che possono essere in tutto od in parte coincidenti o s'incontrano secondo linee o in punti singolari della superficie.

Tagliando la superficie S_α col piano

$$w=\varrho$$

si otterrà una sezione che si proietta in vera grandezza sul piano x e dà su questo la curva C_ϱ, luogo dei punti x pei quali una soluzione almeno dell'equazione (2) soddisfa alla condizione

$$|y-\alpha|=\varrho\,.$$

Ora il piano $w=\varrho$ in alcune sue parti non lascia sotto di sè nessun punto della superficie S_α; in altre parti esso ne lascia sotto di sè uno, due, o più strati, e queste varie parti del piano, connesse o no, e che sono fra loro separate dai varî rami della curva d'intersezione, si proiettano sul piano x in regioni che indicherò con $E_0(\alpha,\varrho), E_1(\alpha,\varrho), \ldots, E_m(\alpha,\varrho)$, e quando non vi possa essere ambiguità, semplicemente con $E_0, E_1, \ldots, E_m$. Esse sono definite per modo che per i punti di E_0 nessuna radice dell'equazione (2) soddisfa alla diseguaglianza

$$|y-\alpha|\leq\varrho\,,$$

per i punti di E_1 una radice, ..., per quello di E_m tutte le m radici soddisfano alla diseguaglianza precedente.

Alcuni di questi campi E_i potranno mancare o ridursi al loro contorno.

L'equazione (2) avrà un numero finito di punti critici, ma questi si potranno escludere mediante cerchi piccolissimi dai campi E_i entro i quali si fa variare le k, onde avere maggiore semplicità nelle formole.

34. — Consideriamo il valore di $\mathbf{a}_\varrho\,\varphi$ in un punto x di E_h. Per quel punto la equazione (2) ha h radici $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_h$ interne al cerchio (α,ϱ); perciò se σ è una linea che racchiude tutte le singolarità di $\varphi(y)$ poste nell'interno di (α,ϱ) ed indichiamo con Σ'

che la somma non si estende alle radici che cadono entro σ, si avrà, per il teorema di CAUCHY ed essendosi supposte semplici tutte le radici $\overline{y}_\nu$,

$$\mathbf{a}_\varrho\, \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} A(x, y)\, \varphi(y)\, dy + \sum_{\nu=1}^{h}{}' \frac{g(x, \overline{y}_\nu)\, \varphi(\overline{y}_\nu)}{\dfrac{\partial f(x, \overline{y}_\nu)}{\partial \overline{y}_\nu}}. \tag{4}$$

Prendasi ora un punto x' nella parte di E_{h+1} contigua alla parte di E_h in cui cade x: si avrà analogamente

$$\mathbf{a}_\varrho\, \varphi(x') = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} A(x', y)\, \varphi(y)\, d\,y + \tag{5}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{h}{}' \frac{g(x', \overline{y}_\nu)\, \varphi(\overline{y}_\nu)}{\dfrac{\partial f(x', \overline{y}_\nu)}{\partial \overline{y}_\nu}} + \frac{g(x', \overline{y}_{h+1})\, \varphi(\overline{y}_{h+1})}{\dfrac{\partial f(x', \overline{y}_{h+1})}{\partial \overline{y}_{h+1}}};$$

ora se i due punti x, x' si prendono fra loro vicini tanto da potersi racchiudere in un cerchio che non esca dalle porzioni considerate di E_h, E_{h+1}, e che non contenga alcun punto critico di (2), il secondo membro della (4) avrà per continuazione analitica i due primi termini del secondo membro della (5), e la differenza fra le due funzioni analitiche $\mathbf{a}\, \varphi(x')$ ed $\mathbf{a}\, \varphi(x)$ sarà data da

$$\frac{g(x, \overline{y}_{h+1})\, \varphi(\overline{y}_{h+1})}{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{y}_{h+1}}}.$$

Si ritrova così il teorema di HERMITE.

Risulta da ciò che precede che le diverse funzioni analitiche rappresentate da $\mathbf{a}_\varrho\, \varphi(x)$ si ottengono aggiungendo ad una di esse uno o più rami della funzione analitica ad m valori

$$R(x, y) = \frac{g(x, \overline{y})\, \varphi(\overline{y})}{f'_y(x, \overline{y})},$$

che è funzione uniforme del *punto analitico* dato da

$$f(x, \overline{y}) = 0.$$

35. — Consideriamo ora due circonferenze di centri α ed α' e di raggi ϱ e ϱ', e sia (α', ϱ') interna ad (α, ϱ). Fra le due circonferenze si potranno trovare alcune singolarità della $\varphi(y)$ e, per un dato x, alcune radici dell'equazione (2). Notiamo che per il teorema del § 31, onde determinare la funzione $\mathbf{a}\,\varphi(x)$ non è necessario di esaminare quei valori speciali di x pei quali le singolarità di $\varphi(y)$ coincidono con qualche radice della (2).

Ogni punto del campo $E_h(\alpha, \varrho)$ sarà in uno dei campi $E_k(\alpha', \varrho')$ dove $k \leq h$: ora si prenda x in un campo F connesso comune ad $E_h(\alpha, \varrho)$ ed $E_k(\alpha', \varrho')$ e si supponga che fra i due cerchi ϱ e ϱ' vi siano singolarità di $\varphi(y)$ in numero finito od infinito ma tali da potersi rinchiudere in un numero finito p di cerchi tutti compresi fra ϱ e ϱ', e siano b_μ i centri e σ_μ i raggi di questi cerchi. Si avrà

$$\mathbf{a}_{\varrho'}\,\varphi(x) - \mathbf{a}_{\varrho}\,\varphi(x) =$$

$$= \sum_{i=k+1}^{h-k} \int_{(\bar{y}_i)} A(x, y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}\,y + \sum_{\mu=1}^{p} \int_{(\sigma_\mu)} A(x, y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}\,y.$$

La prima sommatoria ci dà una funzione di quelle considerate nel § precedente, cioè la somma di più rami della funzione $R(x, \bar{y})$ del punto analitico (2), somma che rappresenterò per brevità con ΣR.

Per determinare la seconda sommatoria, basta notare che lungo la circonferenza σ_μ sulla quale la $\varphi(y)$ non ha alcun punto singolare, si ha

$$\varphi(y) = \boldsymbol{P}_\mu(y - b_\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{\mu,n}}{(y - b_\mu)^{n+1}},$$

onde segue

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_\mu)} A(x, y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}\,y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{\mu,n}}{n!} \frac{\partial^n A(x, b_\mu)}{\partial b_\mu^n}. \tag{6}$$

Il campo di convergenza della serie (6) si trova senza difficoltà. Si ha infatti, usando la notazione del Frœbenius,

$$C_{\mu,n} \backsim \sigma_\mu^n;$$

d'altra parte sviluppando $A(x, y)$ per le potenze di $y - b_\mu$ si trova immediatamente che, detta λ la minima distanza di b_μ dalla più prossima radice dell'equazione (2), si ha

$$\frac{1}{n\,!}\,\frac{\partial^n A\,(x\,,b_\mu)}{\partial\, b_\mu^n} \backsim \frac{1}{\lambda^n}\,;$$

perciò la convergenza della serie (6) avrà luogo nel campo definito dalla condizione

$$\sigma_\mu < \lambda\,,$$

che è precisamente quello che viene indicato colla notazione $E_0\,(b_\mu\,,\sigma_\mu)$.

36. — Lo studio fatto al § precedente comprende in particolare:

a) Il caso in cui fra ϱ e ϱ' la $\varphi\,(y)$ sia singolare in p punti separati b_μ. In tal caso il sistema dei coefficienti $C_{\mu,n}$ è *ologene* (¹) ed il campo di convergenza della serie (6) è il campo $E_0\,(b_\mu\,,0)$, che si estende a tutto il piano x eccettuati i punti tali che

$$f\,(x\,,b_\mu) = 0\,.$$

b) Il caso che in uno dei campi σ si trovino infiniti punti singolari

$$a_1\,,a_2\,,\ldots\,,a_n\,,\ldots\,.$$

In tal caso cerchiamo la riduzione dell'espressione (6) in elementi più semplici, supponendo per maggiore brevità che i punti singolari a_ν abbiano un solo punto limite b. Si avrà:

$$\int_{(\sigma)} A\,(x\,,y)\,\varphi\,(y)\,\mathrm{d}y = \int_{(\sigma)} A\,(x\,,y)\,\mathbf{j}_\sigma\,\varphi\,(y)\,\mathrm{d}y\,:$$

ora siano

$$G_\nu\left(\frac{1}{y-a_\nu}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{\nu,n}}{(y-a_\nu)^{n+1}}$$

le funzioni caratteristiche delle singolarità di $\varphi\,(y)$ nei punti a_ν, ognuna di queste si sviluppa fuori di un cerchio di centro b e di raggio $|\,b - a_\nu\,|$ in una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{\nu,n}}{(y-b)^{n+1}}\,;$$

(¹) Chiamo *ologene* un sistema di coefficienti c_n tali che la serie $\Sigma\, c_n\, z^n$ sia convergente in tutto il piano.

ora, posto

$$F_\nu(y) = \sum_{n=m_\nu}^{\infty} \frac{B_{\nu,n}}{(y-b)^{n+1}},$$

il teorema di MITTAG-LEFFLER c'insegna a determinare i numeri m_ν per modo che la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu(y)$$

sia convergente uniformemente, e $\mathbf{j}_\sigma \varphi$ si può scrivere, per lo stesso teorema, sotto la forma

$$\mathbf{j}_\sigma \varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(y) + G\left(\frac{1}{y-b}\right)$$

od anche

$$\mathbf{j}_\sigma \varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{F}_\nu(y)$$

includendo nell'ultima somma i termini della $G\left(\frac{1}{y-b}\right)$. Integrando termine a termine, lungo la circonferenza σ, questa serie convergente uniformemente moltiplicata per $A(x, y)$, ed indicando con $\overline{B}_{\nu,n}$ i coefficienti delle serie $\overline{F}_\nu$, viene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} A(x, y)\,\varphi(y)\,dy = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=m_\nu}^{\infty} \frac{\overline{B}_{\nu,n}}{n!}\frac{\partial^n A(x, b)}{\partial b^n}. \tag{7}$$

37. — Sulle espressioni trovate nei paragrafi precedenti, che servono a rappresentare il risultato delle operazioni $\mathbf{a}_\varrho \varphi$ e che corrispondono alla scomposizione di una funzione uniforme nelle funzioni caratteristiche delle sue singolarità, si possono aggiungere alcune osservazioni.

a) Anzitutto, l'espressione in forma di serie

$$\sum \frac{c_n}{n!}\frac{\partial^n A(x, \alpha)}{\partial \alpha^n} \tag{8}$$

può rappresentare uno stesso ramo di funzione analitica in un campo più ampio dell'espressione equivalente in forma d'integrale.

Ad esempio, data

$$\varphi(y) = \Sigma \frac{c_n}{(y-\alpha)^{n+1}},$$

essendo c_n un sistema ologene, ed integrando lungo una circonferenza di centro α e di raggio ϱ, l'espressione

$$\int_{(\varrho)} A(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

rappresenta entro il campo $E_0(\alpha, \varrho)$ e non al di fuori la stessa funzione della serie

$$\Sigma \frac{c_n}{n!} \frac{\partial^n A(x, \alpha)}{\partial \alpha^n},$$

mentre, essendo c_n ologene, la serie stessa è convergente in tutto il piano x, eccettuati i punti in numero finito dove è

$$f(x, \alpha) = 0,$$

e quindi rappresenta una funzione uniforme in tutto il piano, e con un numero finito di punti singolari.

b) Se in una corona circolare che comprende la circonferenza (α, ϱ) la $\varphi(y)$ ammette lo sviluppo di LAURENT

$$\varphi(y) = \boldsymbol{P}(y-\alpha) + \Sigma \frac{c_n}{(y-\alpha)^{n+1}},$$

si avrà, per x preso entro il campo $E_0(\alpha, \varrho)$,

$$\mathfrak{A}_\varrho\, \varphi(y) = \sum_0^\infty \frac{c_n}{n!} \frac{\partial^n A(x, \alpha)}{\partial \alpha^n}.$$

Si prenda ora nell'interno del cerchio (α, ϱ) un punto β tale che si possa, da β come centro, descrivere una corona circolare di raggi r ed r' $(r' < r)$ che comprenda la circonferenza ϱ ed entro cui la $\varphi(y)$ sia regolare. Entro questa corona si avrà

$$\varphi(y) = \boldsymbol{P}_1(y-\beta) + \Sigma \frac{c'_n}{(y-\beta)^{n+1}},$$

onde sarà nel, campo $E_0(\beta, r)$,

$$\mathbf{a}_\varrho \varphi = \sum_0^\infty \frac{c'_n}{n!} \frac{\partial^n A(x, \beta)}{\partial \beta^n},$$

talchè nella parte comune ai due campi $E_0(\alpha, \varrho)$ ed $E_0(\beta, r)$ si avrà:

$$\sum_0^\infty \frac{c_n}{n!} \frac{\partial^n A(x, \alpha)}{\partial \alpha^n} = \sum_0^\infty \frac{c'_n}{n!} \frac{\partial^n A(x, \beta)}{\partial \beta^n},$$

e si può dire che uno di questi sviluppi è la *continuazione analitica* dell'altro, non senza analogia colla continuazione l'uno nell'altro degli sviluppi di Mac Laurin relativi ad una stessa funzione analitica.

c) Trovati così gli sviluppi di $\mathbf{a}_\varrho \varphi$ per il campo $E_0(\alpha, \varrho)$, gli sviluppi negli altri campi del piano x si avranno aggiungendo ai primi uno dei rami della funzione ΣR, come al § 35.

d) Non rimane escluso che il campo $E_0(\alpha, \varrho)$ possa constare di più pezzi separati, e quindi che uno sviluppo della forma (8) possa, nel suo campo di convergenza, essere un'espressione analitica poligena.

e) Mediante l'equazione (2) l'esterno del cerchio (α, ϱ) si trasforma nell'interno del campo $E_0(\alpha, \varrho)$; si può dire che contemporaneamente gli sviluppi in serie di funzioni $1/(x - \alpha_\nu)^{n+1}$ validi fuori del cerchio si *trasformano* negli sviluppi in serie di funzioni $\frac{1}{n!} \frac{\partial^n A(x, \alpha_\nu)}{\partial \alpha_\nu^n}$ coi medesimi coefficienti, e validi nel campo E_0.

f) Per i punti del campo $E_m(\alpha, \varrho)$, tutte le radici dell'equazione (2) sono entro il cerchio (α, ϱ); perciò, ricordando che per l'ipotesi fatta al § 30 si ha $A(x, \infty) = 0$, la funzione $A(x, y)$ sarà sviluppabile nell'interno di E_m in serie della forma

$$A(x, y) = \sum_{n=0}^\infty \frac{A_n(x, \alpha)}{(y - \alpha)^{n+1}}$$

per tutta la porzione del piano y esterna al cerchio ϱ o al contorno. Fra gli sviluppi (8) vanno dunque considerati anche quelli della forma

$$\sum_{n=0}^\infty c_n A_n(x, \alpha) \tag{9}$$

che godono delle stesse proprietà.

Per maggiore semplicità, in ciò che segue porremo nell'origine il centro α delle circonferenze d'integrazione e scriveremo $A_n(x)$ in luogo di $A_n(x, 0)$ ed $E_i(\varrho)$ in luogo di $E_i(0, \varrho)$.

II.

38. — Si presenterebbe ora lo studio del problema della inversione dell'operazione $\mathbf{a}_\varrho \varphi$, problema che si può enunciare nei seguenti termini:

Data la funzione $A(x, y)$, la circonferenza di centro 0 e di raggio ϱ nel piano y ed una funzione $\psi(x)$ regolare nel campo $E_i(\varrho)$, trovare (se esiste) una funzione $\varphi(y)$ tale che sia

$$\mathbf{a}_\varrho \varphi = \psi(x). \tag{1}$$

La soluzione di questo problema, quale l'ho potuta trovare, essendo piuttosto complessa, mi limiterò per ora a darne qualche cenno, sperando di poter riprendere e svolgere con maggiore ampiezza la questione in un successivo lavoro.

39. — Esaminerò prima di tutto il caso in cui la funzione $\psi(x)$ è data nel campo $E_m(\varrho)$, al quale si riconduce quello in cui essa è data nel campo E_0 col cambiamento di y in $1/y$, e premetterò le seguenti osservazioni.

a) Si ha evidentemente quando x è preso nel campo E_m, cioè quando tutte le radici dell'equazione

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

sono interne al cerchio ϱ, che

$$\mathbf{a}_\varrho \varphi = \mathbf{a}\, \mathbf{i}_\varrho \varphi,$$

per cui basta limitarsi a considerare funzioni $\varphi(y)$ regolari nel cerchio ϱ e sulla circonferenza; basta dunque prendere

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n,$$

donde viene

$$\mathbf{a}\, \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A_n(x). \tag{3}$$

Il problema espresso dall'equazione (1) equivale dunque allo sviluppo di una funzione data $\psi(x)$ in serie di funzioni $A_n(x)$.

b) Se la funzione $\psi(x)$ è già conosciuta sotto la forma

$$\sum_{\nu=1}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n,\nu}}{n!} \frac{\partial^n A(x, a_\nu)}{\partial a_\nu^n}, \qquad |a_\nu| > \varrho,$$

la determinazione dei coefficienti c_n dello sviluppo (3) e quindi la risoluzione dell'equazione (1) si deduce dal § 37.

In particolare, se la funzione ψ è data sotto la forma

$$\sum_{\nu=1}^{p} \sum_{n=0}^{m_\nu} \frac{c_{n,\nu}}{n!} \frac{\partial^n A(x, a_\nu)}{\partial a_\nu^n}, \tag{4}$$

i coefficienti c_n saranno ricorrenti.

c) Se poniamo

$$\mathrm{A}^m \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n} A_n(x)$$

ed

$$h(\mathrm{A}) \cdot \varphi = h_0 \mathbf{a} \varphi + h_1 \mathrm{A} \varphi + \dots + h_\nu \mathrm{A}^\nu \varphi + \dots,$$

osservando che

$$\mathrm{A}^m \varphi = \mathbf{a}\, \mathrm{I}^m \varphi$$

otterremo senza difficoltà la soluzione dell'equazione

$$h(\mathrm{A}) \cdot \varphi = 0$$

fondandoci sui §§ 10-12; e giungeremo facilmente al risultato che ogni serie della forma $\Sigma\, c_n A_n(x)$ a coefficienti ricorrenti rappresenta una funzione della forma (4). Si otterrà parimenti la soluzione della equazione

$$h(\mathrm{A}) \cdot \varphi = \psi(x)$$

fondandosi sulle medesime considerazioni, quando si sappia già risolvere l'equazione (1) per la funzione data ψ; e si troveranno così facili generalizzazioni dei risultati ottenuti ai §§ 10-15 e 26-28, dovendosi per altro distinguere se con funzioni $A_n(x)$ sono possibili o no sviluppi dello zero. Fra le altre osservazioni, si potrà notare che i polinomi

$$h_0 A_n(x) + h_1 A_{n-1}(x) + \dots + h_n A_0(x)$$

godono di proprietà distributive affatto analoghe a quelle dei polinomi di APPELL.

40. — Vogliasi ora determinare, quando esiste, una funzione, regolare nel cerchio ϱ e sul contorno,

$$\varphi(y) = \Sigma\, c_n\, y^n$$

che per x preso entro il campo E_m soddisfi all'equazione (1). Dette

$$\overline{y}_i\,, \qquad (i = 1, 2, 3, \dots, m)\,,$$

le m radici dell'equazione (2) corrispondenti al valore x, l'integrale $\mathbf{a}_\varrho\, \varphi$ è eguale alla somma dei residui di $A(x, y)\, \varphi(y)$ nei punti $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \dots, \overline{y}_m$, cioè (§ 34) l'equazione (1) equivale all'altra

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{g(x, \overline{y}_i)}{f'_y(x, \overline{y}_i)}\, \varphi(\overline{y}_i) = \psi(x)\,. \tag{5}$$

L'equazione (5) si può semplificare riducendo l'espressione $\dfrac{g(x, \overline{y})}{f'_x(x, \overline{y})}$ a funzione intera di y del grado $m-1$ al più in y e razionale in x, come è noto dalla teoria delle funzioni algebriche; indi ponendo

$$\prod_{i=1}^{m} f'_y(x, y_i) = s(x)$$

ed

$$\frac{s(x)\, g(x, \overline{y}_i)}{f'_y(x, \overline{y}_i)} = r(x, \overline{y}_i)\,,$$

dove le r sono funzioni intere in x ed $\overline{y}$ del grado $m-1$ al più in $\overline{y}$, viene un'equazione della forma

$$\sum_{i=1}^{m} r(x, \overline{y}_i)\, \varphi(\overline{y}_i) = s(x)\, \psi(x)\,. \tag{6}$$

Quando questa equazione funzionale equivalente alla (1) ammetta una soluzione, essa si potrà trovare con uno dei seguenti metodi [1].

---

[1] Riserbando, come ho detto, ad altro lavoro l'esposizione di un altro metodo generale per l'inversione dell'operazione **a**.

a) Nei casi più semplici, col metodo dei coefficienti indeterminati: posto per la $\varphi(y)$ lo sviluppo a coefficienti indeterminati $\Sigma c_n y^n$, si ordini il primo membro della (6) ponendo per le somme delle potenze simili delle $\overline{y}_i$ le loro espressioni in funzione di x. Sotto la condizione di convergenza uniforme, questo sviluppo rappresenta una funzione analitica di x che eguagliata alla $s(x)\psi(x)$ somministra relazioni atte a determinare i coefficienti C_n.

b) Quando si possa mediante le relazioni fra i coefficienti e le radici della equazione (2), trasformare la $s(x)\psi(x)$ ed i coefficienti delle $r(x, \overline{y}_i)$ in funzione simmetrica delle radici $\overline{y}_i$, si otterrà dalla (6) un'equazione della forma

$$\sum_{i=1}^{m} R_i(y_1, y_2, \dots, y_m)\,\varphi(y_i) = F(y_1, y_2, \dots, y_m).$$

Dopo che in questa equazione si sono fatte tutte le riduzioni fra le y_i in base alle relazioni che passano fra di esse, se si dànno valori costanti alle $y_2, y_3, \dots, y_m$ si otterrà un'equazione lineare in $\varphi(y_1)$ che ne darà la soluzione della (6) ove sia possibile.

c) Infine, in certi casi potrà servire a trovare la soluzione della (6) il metodo indicato da ABEL nella VI Memoria del t. II delle *Œuvres complètes* (2ª edizione).

41. — Consideriamo ora il caso in cui la funzione $\psi(x)$ è data entro il campo $E_1(\varrho)$. Per ogni valore di x, una sola radice $\overline{y}$ dell'equazione (2) è compresa entro il cerchio ϱ, talchè l'integrale $\mathbf{a}_\varrho\,\varphi$ sarà eguale al residuo di $A(x, y)\,\varphi(y)$ per $y = \overline{y}$, e l'equazione (1) equivarrà all'altra:

$$\frac{g(x, \overline{y})}{f'_y(x, \overline{y})}\,\varphi(\overline{y}) = \psi(x). \tag{7}$$

Indicando ora con $\overline{x}$ il valore di x ricavato dalla (2) in funzione di y, la (7) permetterà di ottenere $\varphi(y)$ nella forma

$$\varphi(y) = \psi(\overline{x})\,\frac{f'_y(\overline{x}, y)}{g(\overline{x}, y)} \tag{8}$$

e se questa, entro il cerchio ϱ, sarà una funzione uniforme di y, essa darà la soluzione del problema.

42. — Per x preso entro il campo $E_2(\varrho)$, l'equazione (1) equivale all'equazione funzionale

$$\frac{g(x, \overline{y}_1)}{f'_y(x, \overline{y}_1)} \varphi(\overline{y}_1) + \frac{g(x, \overline{y}_2)}{f'_y(x, \overline{y}_2)} \varphi(\overline{y}_2) = \psi(x) \tag{9}$$

che (quando è possibile) si risolve col metodo di ABEL citato al § 40.

Per x preso in uno degli altri campi $E_3, \ldots, E_{m-1}$, si presentano difficoltà maggiori sulle quali per ora non insisto.

III.

43. — Per dare qualche applicazione fra le più semplici delle cose sopra esposte, si consideri prima l'equazione

$$y^2 - x^2 + 1 = 0. \tag{1}$$

La superficie S_0 (v. § 32) ha per equazione

$$w^4 = (u^2 + v^2 + 1)^2 - 4u^2v^2.$$

Le curve C_ϱ sono cassinoidi coi fuochi ± 1 (1). Per ogni valore di ϱ manca il campo $E_1(\varrho)$; l'interno della cassinoide costituisce il campo $E_2(\varrho)$ e l'esterno il campo $E_0(\varrho)$. Entro il campo $E_2(\varrho)$ la $\frac{1}{y^2 - x^2 + 1}$ è regolare per ogni $|y| > \varrho$ e quindi sviluppabile in serie

$$\Sigma \frac{(x^2-1)^n}{y^{2+2n}};$$

le serie

$$\Sigma c_n (x^2 - 1)^n$$

hanno dunque l'interno delle cassinoidi per campo di convergenza. Per sviluppare in serie di funzioni $(x^2 - 1)^n$ una funzione $\psi(x)$ data entro il campo $E_2(\varrho)$, si avrà da risolvere l'equazione funzionale

$$\frac{\varphi(y_1)}{2y_1} + \frac{\varphi(y_2)}{2y_2} = \psi(x),$$

(1) Una figura rappresentante la S_0 si trova in una Memoria del sig. HATON DE LA GOUPILLIÈRE (Journal de l'École Polytechnique, t. XXI, cahier 37, p. 54) nella quale questa superficie si presenta in una questione d'indole ben diversa.

e poichè $y_1 = - y_2$, viene

(2) $$\varphi(y) - \varphi(-y) = 2\, y\, \psi\left(\sqrt{1+y^2}\right),$$

da cui

(3) $$\varphi(y) = y\, \psi\left(\sqrt{1+y^2}\right)$$

all' infuori di una funzione pari additiva arbitraria, che, assoggettata all'operazione **a**, dà un risultato nullo. Il risultato (3) sarà valido in un cerchio ϱ in cui sia uniforme.

44. — Si consideri invece l'equazione

(4) $$y^2 - 2\, x\, y + 1 = 0\,.$$

La superficie S_0 ha per equazione

$$\frac{4u^2}{(w+1/w)^2} + \frac{4v^2}{(w-1/w)^2} = 1\,;$$

essa è generata da un'ellisse che si sposta parallelamente al piano $x\,(u\,,v)$ conservando i fuochi sulle perpendicolari al piano stesso nei punti ± 1, ed appoggiandosi alle due iperbole

$$w^2 \pm 2\, u\, w + 1 = 0\,.$$

La curva C_ϱ è un'ellisse con fuochi nei punti ± 1; per $\varrho < 1$ l'interno dell'ellisse è il campo $E_2(\varrho)$ e l'esterno il campo $E_1(\varrho)$, per $\varrho > 1$ l'interno dell'ellisse è il campo $E_0(\varrho)$ e l'esterno il campo $E_1(\varrho)$; per $\varrho = 1$, l'ellisse si riduce al segmento $-1 \ldots +1$ che si può considerare come campo E_0 od E_2, ed il piano cui sia tolto quel segmento è il campo $E_1(\varrho)$.

Posto

$$\mathbf{a}_\varrho\, \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\varrho)} \frac{\varphi(y)\, \mathrm{d}y}{y^2 - 2\, x\, y + 1}\,,$$

essendo $\varphi(y)$ una funzione regolare nell' interno e sulla circonferenza del cerchio di centro 0 e raggio ϱ, si avrà:

a) Per $\varrho > 1$ ed x entro l'ellisse C_ϱ:

$$\mathbf{a}_\varrho\, \varphi = \frac{\varphi\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{2\sqrt{x^2-1}} - \frac{\varphi\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{2\sqrt{x^2-1}}\,;$$

b) per $\varrho > 1$ ed x esterno all'ellisse C_ϱ:

$$\mathbf{a}_\varrho\, \varphi = \frac{\varphi\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{2\sqrt{x^2-1}}\,,$$

il segno del radicale essendo preso per modo che la radice sia la minore in valore assoluto;

c) per $\varrho < 1$ ed x esterno all'ellisse C_ϱ, vale la stessa formola che per il caso precedente, colla medesima avvertenza;

d) per $\varrho < 1$ ed x interno all'ellisse C_ϱ, si ha

$$\mathbf{a}_\varrho \varphi = 0 .$$

Avendosi dunque da risolvere l'equazione

$$\mathbf{a}_\varrho \varphi = \psi(x) , \tag{5}$$

essendo la $\psi(x)$ una funzione uniforme e regolare data fuori dell'elisse C_ϱ, si avrà

$$\frac{\varphi\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \psi(x)$$

onde, essendo

$$x = \frac{1}{2}(y + 1/y) ,$$

segue

$$\varphi(y) = (y - 1/y)\,\psi\left(\frac{1}{2}(y + 1/y)\right). \tag{6}$$

Avendosi da risolvere la stessa equazione (5) quando la $\psi(x)$ sia una funzione uniforme e regolare data entro l'ellisse C_ϱ e per $\varrho > 1$, si avrà

$$\varphi\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - \varphi\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = 2\sqrt{x^2 - 1}\,\psi(x) ,$$

ossia, dette y_1 ed y_2 le due radici dell'equazione (4),

$$\varphi(y_1) - \varphi(y_2) = (y_1 - y_2)\,\psi\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right); \tag{7}$$

onde la soluzione dell'equazione (5) sarà data secondo il metodo indicato al § 40, b) dalla formola precedente nella quale si tenga conto della condizione $y_1 y_2 = 1$. Per esempio, se $\psi(x) = x^3$, si trova

$$\varphi(y_1) - \varphi(y_2) = \frac{1}{8}(y_1^4 - y_2^4) + \frac{1}{4}(y_1^2 - y_2^2)$$

onde

$$\varphi(y) = \frac{y^4}{8} + \frac{y^2}{4} .$$