Salvatore Pincherle

Sulle serie di fattoriali. Nota II

Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Serie 5, Vol. **11** (1902), p. 417–426

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 179–190

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_179>

23 [114].

Sulle serie di fattoriali. Nota II.

Atti della Reale Accademia dei Lincei,
Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali (Roma);
(5) **11**$_1$, 417-426 (1902).

In una Nota presentata all'Accademia, nella seduta del 16 febbraio del corrente anno (1), ho considerato le serie procedenti per funzioni della forma

$$\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{y(y+1)\ldots(y+n-1)},$$

e ne ho dato le condizioni di convergenza dipendentemente dalle variabili x ed y, con qualche maggiore precisione di quanto si faccia ordinariamente (2).

Era necessario fare precedere quelle considerazioni alle altre, di cui intendo ora occuparmi, di sviluppabilità di una funzione in serie di tal forma. Sono più particolarmente degne d'interesse (per le loro applicazioni, in special modo al Calcolo delle differenze finite e allo studio delle relazioni fra le funzioni generatrici e le loro determinanti) le serie procedenti secondo le funzioni

$$\binom{x}{n}=\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots n},$$

---

(1) Quella Nota verrà qui citata con **I**, seguìto dal numero del paragrafo. (*R.*) Tale Nota è il precedente lavoro N. **22** di questo Volume, pp. 172-178.

(2) Il Sig. Bendixson (Acta Math., T. IX, pag. 24), ha già avuto occasione di distinguere, per serie procedenti secondo prodotti di fattori lineari, il campo di convergenza semplice da quello di convergenza assoluta.

o secondo le

$$\eta_n(x) = \frac{1.2.3 \dots (n-1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

Queste ultime sono quelle serie che hanno formato oggetto delle recentissime comunicazioni del Sig. NIELSEN all'Accademia di Parigi [1], già citate nella precedente Nota; le prime, che formano l'argomento della presente Nota, dànno pure luogo ad alcune interessanti osservazioni.

1. — Di una data successione

$$(1) \qquad c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad \dots, \quad c_n, \quad \dots$$

si dirà *caratteristica* il massimo limite k (**I**, § **1**) di

$$\frac{\log |c_n|}{\log n} \text{ [2]};$$

la serie $\Sigma\, c_n\, n^{-\varrho}$ è assolutamente convergente per $\mathfrak{R}(\varrho) > k+1$ [3]; essa non è convergente per $\mathfrak{R}(\varrho) < k$.

Assumendo i numeri (1) a coefficienti della serie di fattoriali

$$(2) \qquad \Sigma\, c_n \binom{x}{n},$$

si possono presentare i seguenti casi:

O si ha $k = -\infty$; la (2) appartiene allora alla prima classe (**I**, § **3**); essa converge assolutamente ed uniformemente per tutti i valori finiti di x e rappresenta in tutto il piano una funzione intera.

---

(1) Comptes Rendus, 30 décembre 1901 et 20 janvier 1902. Sul medesimo argomento vedasi anche J. C. KLUYVER nei medesimi Comptes Rendus (10 mars 1902) e nel Nieuw Archief voor Wiskunde di Amsterdam: *Over de ontivikkeling van eene functie in eene Faculteitenreeks* (S. II, T. IV, 1900).

(2) La caratteristica di (1), aumentata di un'unità, dà ciò che il Sig. HADAMARD (J. de Mathém., S. IV, T. VIII, 1892, pag. 170 e seg.; e *La série de Taylor et son prolongement analytique* nella raccolta «Scientia» Paris, C. Naud, 1901, pag. 45) chiama *ordine* della serie $\Sigma\, c_n z^n$ lungo la circonferenza $|z| = 1$.

(3) $\mathfrak{R}(x)$ indica sempre la parte reale di x.

O k è finito; in tal caso la (2) converge assolutamente ed uniformemente per $\mathcal{R}(x) > k$ e rappresenta per tali valori di x [1] un ramo ad un valore $\sigma(x)$ di funzione analitica monogena. La serie si riduce ad un numero finito di termini per $x = 0$ o per x intero positivo e rappresenta quindi, in ognuno di tali punti, un numero determinato; tuttavia questi punti *non si ascriveranno al campo di convergenza* della serie (2), ed i valori che essa assume nei punti stessi possono benissimo non essere quelli della funzione $\sigma(x)$ rappresentata dalla serie (2) nel suo campo di convergenza $\mathcal{R}(x) > k$, anche se la funzione $\sigma(x)$ esiste nel campo $\mathcal{R}(x) \leq k$.

O infine si ha $k = +\infty$: la (2) non ha campo di convergenza e non rappresenta quindi alcuna funzione analitica di x. Essa ha significato solo per $x = 0$ e per x intero positivo.

2. — Qualunque sia quello dei tre casi ora considerati in cui si trova la serie (2), facendovi $x = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$ si otterrà sempre una successione determinata

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \quad \dots, \quad b_n, \quad \dots, \tag{3}$$

dove b_n è data da

$$b_n = c_0 + n\, c_1 + \binom{n}{2} c_2 + \dots + c_n. \tag{4}$$

Inversamente, risolvendo le (4) rispetto a c_n si otterrà immediatamente la successione (1), data che sia la (3), per mezzo della formula

$$c_n = b_n - n\, b_{n-1} + \binom{n}{2} b_{n-2} - \dots + (-1)^n\, b_0, \tag{5}$$

che, mediante la notazione usuale del Calcolo delle differenze finite, può anche scriversi

$$c_n = \Delta^n\, b_0.$$

Sia ora data una funzione analitica $f(x)$ regolare per ogni valore $\mathcal{R}(x) \geq 0$, e si formi la successione

$$\Delta^n f(0).$$

---

[1] Che si diranno costituire il campo di convergenza della serie.

Se questa ammette una caratteristica k che non sia $+\infty$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n f(0) \binom{x}{n}$$

convergerà assolutamente ed uniformemente per $\mathfrak{R}(x) > k$, e la differenza

$$f(x) - \Sigma\, \Delta^n f(0) \binom{x}{n} \tag{6}$$

rappresenterà, per ogni $\mathfrak{R}(x)$ maggiore del maggiore fra i numeri 0 e k, una funzione analitica regolare, nulla nei punti

$$x = E(k) + 1, \quad E(k) + 2, \quad \ldots,$$

essendo $E(k)$ il massimo intero contenuto in k.

L'espressione (6) è nulla per $x = 0, 1, 2, \ldots, E(k)$, anche se è $E(k) \geq 0$, sebbene per $\mathfrak{R}(x) \leq k$ tale espressione (6) non rappresenti una funzione analitica.

Può accadere che la differenza (6) sia identicamente nulla: in tal caso la funzione $f(x)$ sarà sviluppabile in serie di fattoriali $\binom{x}{n}$, e se ne conclude intanto:

Condizione necessaria affinchè una funzione $f(x)$ sia sviluppabile in serie di fattoriali è che la caratteristica di $\Delta^n f(0)$ non sia $+\infty$.

Si può aggiungere ancora:

Condizione necessaria affinchè una funzione $f(x)$ trascendente intera sia rappresentabile in tutto il piano da una serie di fattoriali $\binom{x}{n}$ è che la caratteristica di $\Delta^n f(0)$ sia $-\infty$.

3. — Le considerazioni precedenti conducono naturalmente a chiedere se possono esistere sviluppi dello zero in serie di fattoriali, e di conseguenza, se per una stessa funzione possono esistere più sviluppi di tale forma. L'esistenza di sviluppi dello zero è stata dimostrata dal FROBENIUS [1] per le serie procedenti secondo funzioni della forma

$$(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n);$$

---

[1] Crelle, Bd. LXXIII (1871), pag. 7.

egli considera più particolarmente il caso in cui $\Sigma |a_n|$ è convergente, ma pure accennandoli, nel § 7 della sua Memoria, per altri casi e in particolare per quello di serie di fattoriali, non costruisce effettivamente, per questo caso, i detti sviluppi dello zero.

Tali sviluppi si possono ottenere direttamente dalle relazioni che abbiamo dal § precedente, nel seguente modo del tutto elementare.

Dapprima, non può esistere uno sviluppo dello zero

$$\sigma(x) = \Sigma c_n \binom{x}{n} = 0 \tag{7}$$

in cui la caratteristica k di c_n sia negativa, a meno che tutte le c_n non siano nulle. Infatti, se ciò fosse, i punti $x = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ cadrebbero nel campo di convergenza di (7), e sarebbe pertanto $b_0 = b_1 = \ldots = b_n = 0$, da cui, per le (5), $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Può invece esistere uno sviluppo (7) in cui la caratteristica di c_n sia nulla. In tal caso, $x = 0$ cadendo al contorno del campo di convergenza di (7), può b_0 essere differente da zero, e siccome è ammissibile in (7) la presenza di un moltiplicatore arbitrario costante, si può supporre senza restrizioni $b_0 = 1$, da cui $c_n = (-1)^n$.

Si giunge così alla serie

$$\sigma_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{x}{n}.$$

Ora questa rappresenta effettivamente lo zero per ogni $\mathscr{R}(x) > 0$: ciò risulta dalla nota formula [1]

$$\frac{1}{x-y} = -\frac{1}{y-1} - \frac{x-1}{(y-1)(y-2)} - \frac{(x-1)(x-2)}{(y-1)(y-2)(y-3)} - \ldots$$

valida per $\mathscr{R}(x) > \mathscr{R}(y)$; facendovi $y = 0$, se ne deduce

$$\sigma_0(x) = 1 - x + \binom{x}{2} - \binom{x}{3} + \ldots = 0.$$

Dato un numero positivo k, cerchiamo finalmente se possa esistere uno sviluppo dello zero dato da una serie (7) in cui k sia la caratteristica del sistema c_n dei coefficienti. Sia $m - 1$ il massimo

---

(1) Vedasi per es. BENDIXSON: Mem. cit., pag. 7.

intero contenuto in k; i punti $x = 0, 1, \ldots, m-1$ non apparterranno allora al campo di convergenza della (7), e quindi si potranno fissare arbitrariamente le b_0, b_1, ..., b_{m-1}, mentre saranno nulle le b_n per $n \geqq m$. Ne viene, dalle (5),

$$c_n = (-1)^n \left\{ b_0 - n\, b_1 + \binom{n}{2} b_2 - \ldots + (-1)^{m-1} \binom{n}{m-1} b_{m-1} \right\}.$$

La serie (7) formata con questi coefficienti essendo una combinazione lineare a coefficienti costanti delle m serie

$$\sigma_r(x) = \sum_{n=r}^{\infty} (-1)^n \binom{n}{r} \binom{x}{n}, \quad (r = 0, 1, \ldots, m-1), \tag{8}$$

dove i coefficienti hanno per caratteristica r, ne viene che k deve essere uguale precisamente ad $m-1$, cioè ad un numero intero. Di più, si verifica che ognuna delle serie $\sigma_r(x)$ rappresenta effettivamente lo zero per $\mathcal{R}(x) > r$, poichè si ha immediatamente

$$\sigma_r(x) = (-1)^r \binom{x}{r} \sigma_0(x-r) \quad (^1).$$

Esistono dunque, per ogni intero $m-1$, infinite serie (7) convergenti uniformemente ed assolutamente e rappresentanti lo zero per ogni $\mathcal{R}(x) > m-1$; queste serie sono combinazioni lineari

$$b_0\, \sigma_0(x) + b_1\, \sigma_1(x) + \ldots + b_{m-1}\, \sigma_{m-1}(x), \tag{9}$$

a coefficienti b_0, b_1, ..., b_{m-1} arbitrari, delle serie (8).

Non può esistere uno sviluppo dello zero avente $\mathcal{R}(x) > m-1$ per campo di convergenza che non sia della forma (9). Abbiasi infatti un tale sviluppo

$$\bar{\sigma}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n \binom{x}{n};$$

deve essere intanto

$$c'_0 + n\, c'_1 + \binom{n}{2} c'_2 + \ldots + c'_n = 0 \quad \text{per } n \geqq m;$$

---

(1) Per i punti $0, 1, \ldots, r-1$, r, posti fuori o al contorno del campo di convergenza, la $\sigma_r(x)$ ha rispettivamente i valori $0, 0, \ldots, 0, (-1)^r$.

posto poi

$$b'_0 = c'_0, \quad b'_1 = c'_0 + c'_1, \quad \dots, \quad b'_{m-1} = c'_0 + m\, c'_1 + \binom{m}{2} c'_2 + \dots + c'_{m-1},$$

si vede subito che la serie

$$b'_0\, \sigma_0 x) - b'_1\, \sigma_1(x) + \dots + (-1)^{m-1}\, b'_{m-1}\, \sigma_{m-1}(x)$$

coincide colla $\bar{\sigma}(x)$ in tutti i suoi coefficienti.

Risulta da quanto precede che se una funzione $\psi(x)$ ammette uno sviluppo $s(x)$ in serie di fattoriali col campo di convergenza $\mathcal{R}(x) > a$, essa non ammette altri sviluppi convergenti in quel campo se è $a < 0$, mentre se è $a \geq 0$, essa ammette nel campo medesimo lo sviluppo più generale

$$(10) \qquad s_1(x) = s(x) + b_0\, \sigma_0(x) + b_1\, \sigma_1(x) + \dots + b_{m-1}\, \sigma_{m-1}(x),$$

essendo $m - 1$ il massimo intero contenuto in a; e se m' è un intero maggiore di $m - 1$, ammette nel campo $\mathcal{R}(x) > m'$ lo sviluppo

$$s_2(x) = s_1(x) + b_m\, \sigma_m(x) + b_{m+1}\, \sigma_{m+1}(x) + \dots + b_{m'}\, \sigma_{m'}(x):$$

le b_0, b_1, ..., $b_{m'}$ essendo costanti arbitrarie.

Infine, se una funzione uniforme o un ramo uniforme di funzione $\psi(x)$ ha significato per tutto il semipiano $\mathcal{R}(x) \geq 0$, ma è rappresentata da una serie $s(x)$ di fattoriali solo nel campo $\mathcal{R}(x) > > a > 0$, si potrà, considerando la serie $s_1(x)$ più generale che rappresenta la funzione stessa in quel campo, giovarsi dell'indeterminazione delle costanti b_0, b_1, ..., b_{m-1} per far in modo che i valori assunti da $s_1(x)$ nei punti $0, 1, \dots, m - 1$, sebbene fuori del campo di convergenza della $s_1(x)$ stessa, coincidano coi valori $\psi(0)$, $\psi(1)$, ..., $\psi(m - 1)$ della funzione; basta evidentemente fare

$$b_r = (-1)^r \{\psi(r) - s(r)\}, \quad (r = 0, 1, 2, \dots, m - 1).$$

4. — Accanto ad una serie di fattoriali

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x}{n}$$

si consideri la serie di potenze $\varphi(t)$ di t^{-1}, formata colla stessa successione di coefficienti, in modo che a $t^{-(n+1)}$ sia dato il coefficiente di $\binom{x}{n}$. La successione c_n avendo per caratteristica un numero k che non è l'infinito positivo, la serie $\varphi(t)$ convergerà fuori di un cerchio di centro $t = 0$ e di raggio generalmente uguale all'unità, ma che nel caso di $k = -\infty$ potrà anche essere minore. Diremo che *la serie* $\varphi(t)$ *ammette la caratteristica* k.

Fra le due serie $s(x)$, $\varphi(t)$ si viene in tal modo a stabilire una corrispondenza che si indicherà mediante la scrittura

$$s(x) = \mathrm{A}(\varphi(t)),$$

dove il simbolo A sta a rappresentare un'operazione, manifestamente distributiva, che può venire applicata formalmente ad ogni serie di potenze, di t^{-1},

$$\varphi(t) = \Sigma \frac{c_n}{t^{n+1}},$$

ed il cui risultato ha significato, se la caratteristica di c_n è k, per $\mathcal{R}(x) > k$. Si aggiungerà l'ipotesi che l'operazione A dia come risultato lo zero qualora venga applicata ad una potenza intera positiva o nulla di t.

Per l'operazione A si verificano immediatamente le due seguenti proprietà:

Se $\varphi'(t)$ è la derivata di $\varphi(t)$, si ha, per $\mathcal{R}(x) > k + 1$,

$$\mathrm{A}(\varphi') = -x\, s(x-1); \tag{11}$$

si ha inoltre:

$$\mathrm{A}\{(1+t)\,\varphi(t)\} = s(x+1). \tag{12}$$

5. — Si tratta ora di dare un'espressione analitica effettiva per l'operazione A. Cominceremo coll'esaminare il caso $k < -1$ in cui l'espressione di A si troverà senza difficoltà. Infatti, in questo caso $\varphi(t)$ è assolutamente ed uniformemente convergente lungo la circonferenza di centro $t = 0$ e di raggio 1; pertanto nell'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \varphi(t)\,(1+t)^x\, dt, \quad \mathcal{R}(x) > 0, \tag{13}$$

esteso a questa circonferenza, l'integrazione si può eseguire termine a termine e come risultato si ottiene immediatamente la serie $s(x)$.

Onde:

Per le serie $\varphi(t)$ *aventi una caratteristica minore di* -1, *l'operazione* $A(\varphi)$ *è per* $\mathfrak{R}(x) > 0$, *rappresentata dall'integrale definito* (13).

La (13) applicata ad una potenza intera positiva o nulla di t dà zero come risultato.

Le serie $\varphi(t)$ per le quali si realizza in tal modo l'operazione A, formano un insieme lineare, al quale si può aggiungere un numero arbitrario di potenze intere positive di t, ed anche una serie di potenze intere positive di t purchè convergente in un cerchio di centro $t = 0$ e di raggio maggiore di uno. Per queste serie $\varphi(t)$ si verifica immediatamente che l'operazione A, espressa per $\mathfrak{R}(x) > 0$ da

$$A(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \varphi(t)\ (1+t)^x\, dt, \tag{14}$$

soddisfa alle relazioni (11) e (12), la prima sotto la condizione $\mathfrak{R}(x) > 1$, la seconda per $\mathfrak{R}(x) > 0$.

6. — Conviene ora ricercare se, anche per il caso in cui sia $k \geq -1$, sia possibile una rappresentazione analitica per l'operazione A. Per tale scopo ci servirà un principio che, sebbene abbia già trovato numerose applicazioni in vari campi dell'Analisi, non pare sia stato ancora enunciato nella sua generalità. Questo principio è il seguente:

Siano A, K due operazioni univocamente definite per gli elementi di un insieme C; sia G la trasformata di K mediante A. Se φ appartiene a C, e vi appartiene anche $K(\varphi)$, si avrà per definizione

$$AK(\varphi) = GA(\varphi),$$

onde

$$G^{-1}AK = A. \tag{15}$$

Supponiamo ora che φ appartenga ad un campo C' che comprende C, ma non necessariamente a C stesso; che K sia applicabile a φ, e che $K(\varphi)$ appartenga a C. Sotto questa ipotesi, il primo membro della (15) *si potrà assumere come definizione dell'operazione* A per gli elementi dell'insieme più esteso C', e si verificherà in generale che l'operazione A, così estesa, mantiene nel nuovo campo le sue proprietà formali.

Il principio ora enunciato è quello che viene applicato in sostanza nella continuazione analitica secondo il WEIERSTRASS; nel classico teorema di MITTAG-LEFFLER per la costruzione di una funzione uniforme con date singolarità; nella sommabilità delle serie secondo il BOREL e nei vari tentativi fatti per l'interpretazione delle serie divergenti; nell'integrazione finita, data dal GUICHARD, di una funzione trascendente intera; ecc.. Di questo principio ci gioveremo ora per ottenere l'espressione analitica dell'operazione A per tutte le serie $\varphi(t)$ appartenenti a caratteristica finita.

7. — Da ogni serie di potenze, di t^{-1},

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{t^{n+1}}$$

si può dedurre la serie

$$\mathrm{K}_m(\varphi) = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)\, t^{n+1}};$$

questa deduzione è fatta mediante un'operazione distributiva che diremo K_m, la quale non è altro che la $\mathrm{D}^{-m} \frac{1}{t^m} \varphi$, dove D è il simbolo di derivazione, quando si facciano nulle le costanti introdotte dall'integrazione. L'operazione K_m ha evidentemente la proprietà di diminuire di m unità la caratteristica cui appartiene φ; se φ ha la caratteristica k, $\mathrm{K}_m(\varphi)$ avrà la caratteristica $k - m$.

Sia φ una tale serie di potenze che le sia applicabile l'operazione A definita al § 4; tale operazione sarà a fortiori applicabile alla serie $\mathrm{K}_m(\varphi)$: si vuole vedere quale sia la trasformata di K_m mediante A. Usando a questo scopo i soliti simboli del Calcolo delle differenze finite Δ e θ (1), si deduce dalla proprietà (12) della A che se $\mathrm{A}(\varphi) = s(x)$, sarà:

$$\mathrm{A}\{t\varphi(t)\} = \Delta\, s(x), \quad \mathrm{A}\{t^{-1} \varphi(t)\} = \Delta^{-1} s(x),$$

e, dalla (11), che

$$\mathrm{AD}^{-1}\varphi(t) = -\frac{1}{x+1}\, \theta\, s(x).$$

(1) $\Delta \psi(x) = \psi(x+1) - \psi(x)$, $\theta \psi(x) = \psi(x+1)$, Δ^{-1} è l'operazione di sommazione finita o inversa di Δ.

Ne viene

$$AD^{-m}\left(\frac{1}{t^m}\varphi(t)\right)=\frac{(-1)^m}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}\,\theta^m\,\Delta^{-m}\,s(x)$$

e quindi la trasformata G_m di K_m mediante A è

$$G_m=\frac{(-1)^m}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}\,\theta^m\,\Delta^{-m},$$

onde

$$G_m^{-1}=(-1)^m\,\Delta^m\,x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}.$$

Con ciò, la (15) ci dà

$$\text{(16)}\qquad A=(-1)^m\,\Delta^m\,x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}\,A\,K_m.$$

Ora, se $\varphi(t)$ è una serie di caratteristica minore di -1, le si può applicare, per $\mathcal{R}(x)>0$, l'operazione A rappresentata dall'integrale definito (14), e la (16) non è altro che una semplice identità. Invece, se $\varphi(t)$ ha una caratteristica $k\geq -1$, sia $m-2$ il massimo intero contenuto in k; la serie $K_m(\varphi)$ avrà per caratteristica un numero minore di -1 e le sarà quindi applicabile per $\mathcal{R}(x)>0$ l'operazione A sotto forma d'integrale definito, ottenendosi

$$AK_m\,\varphi=(-1)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}\binom{x}{n};$$

da cui

$$(-1)^m\,x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}\,AK_m\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\binom{x}{n+m},$$

e infine, poichè $\Delta\binom{x}{n}=\binom{x}{n-1}$,

$$(-1)^m\,\Delta^m\,x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}\,AK_m\,\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\binom{x}{n}.$$

L'operazione A *definita dalla* (16), cioè data, per $\mathcal{R}(x)>m$, da

$$\text{(17)}\quad A(\varphi)=\frac{(-1)^m}{2\pi i}\Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1)\int_{(l)}D^{-m}\left(\frac{1}{t^m}\varphi(t)\right)(1+t)^{x-m}\,dt,$$

coincide dunque con l'operazione A *definita in principio del* § 4 *per* *ogni serie* $\varphi(t)$ *avente caratteristica* k *finita, e quindi per ogni tale serie l'operazione* A *ivi definita ammette l'espressione analitica* (17), dove m è il massimo intero contenuto in k aumentato di 2 se è $k \geq -1$, ed è zero se è $k < -1$.

In questo modo ad ogni serie di fattoriali $s(x)$ della prima o della seconda classe corrisponde una funzione analitica $\varphi(t)$ regolare nell'intorno di $t = \infty$, che si costruisce immediatamente e mediante la quale si ha l'espressione analitica (17) della $s(x)$.

È facile vedere che a $\varphi(t) = (1 + t)^{-m}$, per un intero positivo, la (17) fa corrispondere gli sviluppi dello zero già ottenuti per altra via al § 3.

Ad ogni proprietà di carattere lineare della $\varphi(t)$, le relazioni (11) e (12) alle quali soddisfa l'operazione A fanno corrispondere proprietà pure di carattere lineare per la $s(x)$. Di questa corrispondenza, della sua applicazione alle equazioni alle differenze, come pure del significato da attribuire alle serie $s(x)$ della terza classe, tratterò in una prossima Nota.