Salvatore Pincherle

Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattoriali

Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Serie 5, Vol. **12** (1903), p. 336–343

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 191–198

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_191>

24 [119].

Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattoriali.

Atti della Reale Accademia dei Lincei,
Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali (Roma);
(5) 12_2, 336-343 (1903).

In una recente Memoria, il Sig. N. NIELSEN [1] ha espresso le condizioni necessarie e sufficienti per la sviluppabilità di una funzione analitica in serie della forma

$$\Sigma\, c_n \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)},$$

o serie di fattoriali. Queste condizioni non si riferiscono però direttamente alla funzione $\alpha(x)$ da svilupparsi, bensì ad una funzione $\varphi(t)$ legata ad essa dalla relazione

$$\text{(a)} \qquad \alpha(x) = \int_0^1 \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt\,;$$

fra $\alpha(x)$ e $\varphi(t)$ passa cioè quella tale corrispondenza funzionale notata per primo dal LAPLACE [2] e nella quale egli designò la $\varphi(t)$ col nome di *funzione generatrice*, la $\alpha(x)$ con quello di *funzione determinante*. Il NIELSEN ha ricordato [3] come la sviluppabilità in serie di fattoriali fosse stata già dallo SCHLÖMILCH subordinata alla rappresentazione della funzione $\alpha(x)$ sotto forma di un integrale definito del tipo (a), e J. C. KLUYVER [4] ottenne lo sviluppo in serie

---

(1) Ann. de l'École Normale, S. III, T. XIX, 1902.
(2) *Théorie analytique des probabilités,* Paris 1812.
(3) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 30 décembre 1901.
(4) Nieuw Archief voor Wiskunde, S. II, T. 4, Amsterdam 1899.

di fattoriali calcolando la funzione generatrice della funzione $\alpha(x)$ mediante il metodo di inversione di integrale definito che egli attribuisce a KRONECKER e a MURPHY, ma che va fatto risalire al RIEMANN (¹).

Le condizioni di sviluppabilità date dal NIELSEN si possono esprimere in una forma notevolmente più semplice, quando si generalizzi alquanto l'espressione (a), considerando come variabile l'estremo superiore dell'integrazione, e quando si faccia uso del concetto di *ordine* di un punto singolare, quale è stato introdotto dall'HADAMARD (²). Lo scopo della presente Nota è appunto di mettere in luce il legame fra codesto concetto di ordine e la sviluppabilità in serie di fattoriali: assumendo per tali serie la forma

$$a^x \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}, \tag{b}$$

dove a e le c_n sono costanti indipendenti da x. Per brevità di scrittura si indicherà con $\eta_n(x)$ il fattoriale $\dfrac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

1. — Dal citato lavoro di HADAMARD ricordiamo anzitutto le definizioni ed i teoremi seguenti.

Data una serie di potenze

$$f(t) = \sum_{0}^{\infty} c_n t^n \tag{1}$$

avente $(0, 1)$ come cerchio di convergenza (³), s'intende con *ordine* di un punto t_0 della circonferenza di convergenza un numero reale g tale che, indicando con D il simbolo di derivazione e con ω un numero qualsiasi, sia

$$t^{-\omega} \mathrm{D}^{-\omega} f(t) \tag{2}$$

finita, continua e a scartamento finito nell'intorno del punto t_0 se è $\mathcal{R}(\omega) > g$ (⁴), ma cessi di essere tale se è $\mathcal{R}(\omega) < g$. Se il punto t_0

(¹) *Werke*, ed. DEDEKIND e WEBER, Leipzig 1876, p. 140.

(²) Nel suo *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, J. de Math., S. IV, T. VIII, 1892.

(³) Con (a, b) indicheremo brevemente il cerchio avente per centro il punto a e per raggio il numero positivo b.

(⁴) Con $\mathcal{R}(a)$ si intende la parte reale del numero complesso a.

non è singolare per la funzione analitica $f(t)$ definita dalla serie (1), il suo ordine è $-\infty$ [1].

L'ordine di $f(t)$ sulla circonferenza di convergenza è un numero reale g_1 tale che la (2) sia finita, continua e a scartamento finito su tutta la circonferenza $(0, 1)$, se è $\mathcal{R}(\omega) \geq g_1$, ma che cessi di essere tale per $\mathcal{R}(\omega) < g_1$. In modo analogo si definisce l'ordine di $f(t)$ sopra un arco della circonferenza.

L'ordine di $f(t)$ sulla circonferenza di convergenza è uguale al *massimo limite* [2] del rapporto

$$\frac{\log |a_n|}{\log n}$$

(o *caratteristica* della successione a_n), aumentato di un'unità.

L'ordine di $f(t)$ sopra un arco della circonferenza è il limite superiore degli ordini nei punti di questo arco.

Se su un arco compreso fra gli argomenti θ_1 e θ_2 l'ordine g di $f(t)$ è positivo, si avrà

$$\lim_{\varrho=1} \{(1-\varrho)^{\omega} f(\varrho\, e^{i\theta})\} = 0 \tag{3}$$

per $\mathcal{R}(\omega) > g$, uniformemente per i valori di θ compresi fra θ_1 e θ_2. Se l'ordine è negativo o nullo la (3) vale per $\mathcal{R}(\omega) > 0$.

2. — È facile estendere le definizioni precedenti al caso, che a noi interesserà in ciò che segue, di una serie

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-a)^n \tag{4}$$

avente (a, r) come cerchio di convergenza. Il suo ordine sarà il numero $g = k + 1$, essendo k la caratteristica della successione $c_n r^n$, e si avrà, uniformemente rispetto a θ,

$$\lim_{\varepsilon=0} \{\varepsilon^{\omega} \varphi(a + (r-\varepsilon)\, e^{i\theta})\} = 0 \tag{3'}$$

---

(1) I punti di ordine $-\infty$ si comprenderanno perciò fra quelli d'ordine finito.

(2) *La plus grande des limites* secondo l'espressione di CAUCHY.

per $\mathcal{R}(\omega) > g$ se è $g > 0$. Se s è un punto singolare di $\varphi(t)$ sulla circonferenza (a, r), l'ordine di s sarà un numero $g_0 \leq g$. È importante notare che se si prende dentro al cerchio (a, r) un punto a' che sia più prossimo ad s che ad ogni altro punto singolare di $\varphi(t)$ e si deduce, con lo sviluppo di MACLAURIN, lo sviluppo di $\varphi(t)$ in serie di potenze di $t - a$, l'ordine di questo sviluppo sulla propria circonferenza di convergenza sarà ancora g_0.

3. — Abbiasi ora un ramo ad un valore di funzione analitica $\varphi(t)$, dato in una stella di MITTAG-LEFFLER A di centro c, dove c è un punto del piano t differente da $t = 0$. Il punto $t = 0$ sia un punto singolare del ramo di funzione $\varphi(t)$, e perciò posto al contorno della stella. Preso un punto a comunque nell'interno della stella, dovrà verificarsi uno dei tre seguenti casi:

a) O il cerchio $(a, |a|)$ è tutto interno alla stella, e sulla sua circonferenza si trova il solo punto singolare $t = 0$.

b) O il cerchio $(a, |a|)$ è tutto interno alla stella, ma sulla sua circonferenza, oltre a $t=0$, si trovano altri punti singolari di $\varphi(t)$.

c) O infine il cerchio $(a, |a|)$ non è tutto interno alla stella.

4. — Sia dapprima un punto a che appartenga al primo dei tre casi ora enumerati. Se accade che, per un tale punto, l'ordine della serie di potenze

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!} (t - a)^n \tag{4'}$$

sulla sua circonferenza $(a, |a|)$ di convergenza sia finito [1] e uguale a g, tale ordine sarà finito e uguale a g per gli sviluppi relativi a tutti gli altri punti appartenenti a quello stesso primo caso. Potremo dire allora, senza riferimento ad alcuno sviluppo (4') speciale, che il punto $t = 0$ è *punto singolare d'ordine finito* g per il ramo $\varphi(t)$ di funzione analitica. Supporremo dapprima $g > 0$.

Prendiamo a considerare l'integrale

$$\int_0^a \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt, \tag{5}$$

[1] Si include, come si è avvertito, il caso di $g = -\infty$.

dove l'integrazione va fatta lungo una linea semplice λ congiungente 0 ad a senza uscire dalla stella A. L'integrale, sotto questa condizione per λ, è indipendente da codesta linea; in particolare si può prendere λ tutta entro il cerchio $(a, |a|)$. Dalla (3′) segue che $t^{\omega}\varphi(t)$ tende a zero per $t=0$ per $\mathcal{R}(\omega) > g$, e quindi l'integrale (5) è convergente nel semipiano definito da $\mathcal{R}(x) > g$. Ma se ε è un punto della linea λ, prossimo a $t=0$ quanto si vuole, la serie (4′) sarà uniformemente convergente fra ε ed a e si potrà integrare termine a termine; osservando che

$$\int_{\varepsilon}^{a} (t-a)^n t^{x-1}\,dt = (-1)^n (a^{n+x} - \varepsilon^{n+x}) \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

si otterrà

$$\int_{\varepsilon}^{a} \varphi(t)\, t^{x-1}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!} (a^{n+x} - \varepsilon^{n+x})\, \eta_n(x).$$

Qui la serie del secondo membro converge assolutamente ed uniformemente rispetto ad x entro il semipiano $\mathcal{R}(x) > g$, e tende per $\varepsilon = 0$, alla serie

$$a^x \sum (-1)^n \frac{\varphi^{(n)}(a)\, a^n}{n!}\, \eta_n(x), \tag{6}$$

pure uniformemente convergente rispetto ad x nel sempiano stesso [1]. È allora applicabile, per un noto teorema del Dini, l'integrazione termine a termine fra 0 ed a alla serie (4′) moltiplicata per t^{x-1}, e si ha così l'eguaglianza, valida nel detto semipiano $\mathcal{R}(x) > g$,

$$\int_{0}^{a} \varphi(t)\, t^{x-1}\,dt = a^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{(n)}(a)\, a^n}{n!}\, \eta_n(x). \tag{6'}$$

5. — Il punto a si trovi invece nel secondo dei tre casi casi enumerati al § **2**. Qui la caratteristica k del sistema $\varphi^{(n)}(a)\, a^n/n!$,

---

[1] Basta ricordare (vedasi, per esempio, la mia Nota in questi Rendiconti, seduta del 16 febbraio 1902) che il campo di convergenza assoluta ed uniforme di una serie di fattoriali $\Sigma\, c_n\, \eta_n(x)$ è il semipiano $\mathcal{R}(x) > k+1$, dove k è la caratteristica del sistema c_n.

cioè l'ordine $k+1=g'$ della serie (4') non dipenderà più dal punto $t=0$ soltanto; ma (per le proposizioni già citate di HADAMARD) anche dagli altri punti singolari di $\varphi(t)$ posti sulla circonferenza $(a, |a|)$. Se g è l'ordine del punto $t=0$, si avrà $g' \geqq g$. L'eguaglianza (6') avrà ancora luogo; solo, mentre il primo membro ha significato per $\mathfrak{R}(x) > g$, il secondo membro avrà validità nel semipiano $\mathfrak{R}(x) > g'$, generalmente contenuto nel precedente, e solo entro quest'ultimo semipiano è valida l'eguaglianza (6').

6. — Veniamo ora al terzo caso, in cui il raggio di convergenza dello sviluppo (4') è inferiore ad $|a|$. In tale caso la caratteristica di $\varphi^{(n)}(a)\, a^n/n!$ è evidentemente uguale a $+\infty$, e quindi la serie di fattoriali che figura nel secondo membro di (6') è costantemente divergente. Ma in questo caso si prenda sulla linea d'integrazione un punto c abbastanza prossimo a $t=0$ perchè codesto punto c venga ad appartenere al primo caso; si spezzi l'integrale (5) nella somma

$$\int_0^c \varphi(t)\ t^{x-1}\,\mathrm{d}t + \int_c^a \varphi(t)\ t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Il primo integrale, per $\mathfrak{R}(x) > g$, si sviluppa come è indicato al § 3; in quanto al secondo, esso è una funzione intera di x. Ponendo in esso

$$t^x = (a' + t - a')^x,$$

dove $|a'|$ sia preso abbastanza grande per superare $|t - a'|$ lungo tutta la linea d'integrazione fra c ed a, esso diviene

$$a'^x \int_c^a \varphi(t) \left(1 + \frac{t-a'}{a'}\right)^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

e, sviluppando con la serie binomiale, viene per esso lo sviluppo convergente in tutto il piano:

$$a'^x \sum_0^\infty c'_n \,\frac{x\,(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots n},$$

dove

$$c'_n = \frac{1}{a'^n} \int_c^a (t-a')^n\, \varphi(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Il fattoriale $\dfrac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$ può, per molteplici ragioni, considerarsi come una funzione $\eta_n(x)$ per valori negativi dell'indice, e perciò in questo caso si può dire che l'integrale (5) è sviluppabile in una serie di funzioni $\eta_n(x)$ in cui n varia da $-\infty$ a $+\infty$.

7. — Fin qui abbiamo supposto $g > 0$; però questa restrizione non è affatto essenziale. Mostriamo infatti che per $g \leq 0$ la relazione (6′) è valida per $\mathfrak{R}(x) > 0$. Supponiamo la singolarità $t = 0$ della funzione $\varphi(t)$ di ordine g compreso fra $-p+1$ e $-p$, dove p è intero positivo; è chiaro che gli integrali

$$\int_0^a \varphi(t) t^{x-1}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^a \varphi'(t)\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t, \quad \dots, \quad \int_0^a \varphi^{(p-1)}(t)\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

saranno convergenti per $\mathfrak{R}(x) > 0$, mentre

$$\int_0^a \varphi^{(p)}(t)\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t,$$

dove la $\varphi^{(p)}(t)$ è di ordine positivo $g+p$, converge per $\mathfrak{R}(x) > g+p$. Per questi valori di x si ha dunque, applicando p volte l'integrazione per parti,

$$\int_0^a \varphi(t)\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \tag{7}$$

$$= a^x \left\{ \frac{\varphi(a)}{x} - \frac{a\,\varphi'(a)}{x(x+1)} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{a^{p-1}\varphi^{(p-1)}(a)}{x(x+1)\dots(x+p-1)} \right\} +$$

$$+ \frac{(-1)^p}{x(x+1)\dots(x+p-1)} \int_0^a \varphi^{(p)}(t)\, t^{x+p-1}\,\mathrm{d}t,$$

Qui l'ultimo integrale è, per $\mathfrak{R}(x) > g$, sviluppabile in serie della forma

$$a^x \Sigma\, c_n\, \eta_n(x+p),$$

e quindi il secondo membro della (7) dà una serie della forma (6), convergente assolutamente per $\mathfrak{R}(x) > g$, ad eccezione dei punti $x = 0, -1, -2, \dots, -p+1$ dove essa diventa infinita del primo ordine. L'eguaglianza fondamentale (6′) vale dunque solo per $\mathfrak{R}(x) > 0$, sebbene il secondo membro di essa conservi significato in tutto il semipiano $\mathfrak{R}(x) > g$.

8. — Le considerazioni precedenti si riferivano al caso di un punto $t = 0$ posto al contorno della stella A, e quindi, in generale, singolare per $\varphi(t)$. Ma per il caso in cui $t = 0$ sia un punto regolare per $\varphi(t)$, le cose precedentemente dette rimangono valide, con la circostanza favorevole che la caratteristica dei coefficienti della serie (6) è $-\infty$, e quindi, mentre il primo membro della (6′) è convergente per $\mathcal{R}(x) > 0$, la serie del secondo membro converge assolutamente in tutto il piano, eccettuati i poli del primo ordine 0, $-1, -2, -3, \ldots$. Questo secondo membro è dunque una *funzione meromorfa* (trascendente fratta).

9. — È facile vedere che la condizione trovata dianzi come sufficiente per lo sviluppo di una funzione (5) in serie di fattoriali, che cioè $t = 0$ sia per $\varphi(t)$ punto regolare o singolare d'ordine finito, è anche *necessaria*. Sia infatti

$$a^x \Sigma\, c_n\, \eta_n(x) \tag{8}$$

una serie di fattoriali, in cui la caratteristica di c_n sia finita ed eguale a $g - 1$ [1]. Pongo

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{a^n} (t - a)^n. \tag{9}$$

Per la proprietà delle c_n, la serie $\Sigma\, c_n\, z^n$ ammette $(0, 1)$ come cerchio di convergenza, e quindi lo sviluppo (9) ha per cerchio di convergenza $(a, |a|)$. Ne viene che la funzione $\varphi(t)$ è d'ordine finito g sulla sua circonferenza di convergenza, e quindi è d'ordine finito $g_1 \leq g$ anche il punto $t = 0$; pertanto l'integrale

$$\int_0^a \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt$$

sarà convergente per $\mathcal{R}(x) > g_1$, e col metodo del § 4 si dimostrerà eguale alla serie (8) in questo semipiano.

Riassumendo: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè $\alpha(x)$ sia sviluppabile in serie di fattoriali, è che essa sia funzione determinante di una funzione analitica $\varphi(t)$ per la quale il punto $t = 0$ sia o regolare o singolare d'ordine finito.*

---

[1] Se la caratteristica fosse $+\infty$, la serie (8) non potrebbe convergere per alcun valore di x. Se fosse $g = -\infty$ il raggio di convergenza di (9) potrebbe anche essere $> |a|$, e $t = 0$ sarebbe certamente punto regolare per $\varphi(t)$.