SALVATORE PINCHERLE

SALVATORE PINCHERLE

Sugli sviluppi asintotici e le serie sommabili

Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Serie 5, Vol. **13** (1904), p. 513–519

in: Salvatore Pincherle, *Opere Scelte*, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 199–205

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_199>

Sugli sviluppi asintotici e le serie sommabili.

Atti della Reale Accademia dei Lincei,
Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali (Roma);
(5) 13, 513-519 (1904).

Questa breve Nota si propone di mostrare, in modo assai elementare ed adatto didatticamente, quale stretto legame interceda fra il concetto di serie sommabile (esponenzialmente) del BOREL e quello di sviluppo asintotico dovuto al POINCARÉ; di notare come il primo concetto si estenda spontaneamente al caso in cui la funzione associata del BOREL, o generatrice, non sia analitica, purchè ammetta lungo l'asse reale positivo le derivate di tutti gli ordini; infine, di osservare come, negli stessi casi e cioè anche senza l'analiticità della funzione generatrice, si presentino sviluppi precedenti per i fattoriali ed aventi il carattere asintotico.

1. — Sia $\alpha(t)$ una funzione della variabile reale t , che ammetta, per tutti i valori positivi della variabile, la derivata prima $\alpha'(t)$; di più, per i valori di x la cui parte reale supera un numero assegnato a ⁽¹⁾ [scriveremo $\Re(x) > a$], siano convergenti i due integrali

$$(1) \quad \mathbf{a}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \alpha(t) dt,$$

$$(1') \quad \mathbf{a}_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \alpha'(t) dt.$$

⁽¹⁾ È noto, per dimostrazioni date dal BOREL, dal PHRAGMÉN, dal FRANEL e dal LERCH, che, se un integrale della forma (1) è convergente per $x = x_0$, esso è convergente e rappresenta un ramo regolare di funzione analitica per tutti i valori di x tali che sia $\Re(x) > \Re(x_0)$.

Essendo m, k due numeri positivi si ha, integrando per parti,

$$\int_m^{m+k} e^{-xt} \alpha(t) dt = -\frac{1}{x} [e^{-xt} \alpha(t)]_m^{m+k} + \frac{1}{x} \int_m^{m+k} e^{-xt} \alpha'(t) dt;$$

ora, dall'ipotesi della convergenza degli integrali (1) e (1'), risulta che, tenuto fisso x , con $\Re(x) > a$, e preso ε piccolo a piacere, si potrà determinare m abbastanza grande perchè sia, per ogni valore di k ,

$$|[e^{-xt} \alpha(t)]_m^{m+k}| < \varepsilon.$$

Ciò porta alla conseguenza

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{e^{-xt} \alpha(t)\} = 0,$$

e quindi dall'ipotesi della convergenza di (1) e (1') per $\Re(x) > a$ risulta, per gli stessi valori di x , la convergenza assoluta ed uniforme per il primo di questi integrali.

2. — Aggiungendo l'ipotesi della convergenza di

$$\mathbf{a}_2(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \alpha''(t) dt,$$

risulterà parimenti la convergenza assoluta ed uniforme di (1'), e quindi sarà, per $\Re(x) > a$ ed h positivo,

$$(2) \quad \int_0^{+\infty} |e^{-(x+h)t} \alpha'(t)| dt < \int_0^{+\infty} |e^{-xt} \alpha'(t)| dt.$$

Sia $\alpha(t)$ finito per $t = 0$; l'integrazione per parti di (1) ci dà:

$$\mathbf{a}(x) = \frac{\alpha(0)}{x} + \frac{1}{x} \mathbf{a}_1(x),$$

onde, per la (2),

$$|\mathbf{a}(x+h)| < \frac{1}{|x+h|} \alpha(0) + \int_0^{+\infty} |e^{-xt} \alpha'(t)| dt.$$

Facendo ora tendere h all'infinito, $\mathbf{a}(x+h)$ tende a zero, del primo ordine almeno; e quindi $\mathbf{a}(x)$ tende a zero del primo ordine almeno quando x tende all'infinito nel senso dell'asse reale e positivo.

3. — Poniamo ora:

a) La funzione $\alpha(t)$ abbia, fra 0 e $+\infty$, le derivate di tutti gli ordini $\alpha'(t)$, $\alpha''(t)$, ..., $\alpha^{(n)}(t)$,

b) Le $\alpha^{(n)}(t)$ abbiano valore finito per $t=0$; porremo

$$\alpha^{(n)}(0) = k_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

c) Per i valori di x tali che sia $\mathcal{R}(x) > a$ siano convergenti tutti gli integrali

$$(1^*) \quad \mathbf{a}_n(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \alpha^{(n)}(t) dt.$$

Ne risulterà, per §§1 e 2, che per quei valori di x si avrà

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ e^{-xt} \alpha^{(n)}(t) \} = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

e quindi che per $\mathcal{R}(x) > a$ tutti gl'integrali (1*) convergeranno uniformemente ed assolutamente; inoltre, dall'integrazione per parti, verrà

$$(3) \quad \mathbf{a}_n(x) = \frac{k_n}{x} + \frac{1}{x} \mathbf{a}_{n+1}(x), \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

infine, le $\mathbf{a}_n(x)$ tenderanno a zero, del primo ordine almeno, quando x tenda all'infinito nel senso dell'asse reale positivo.

4. — Le relazioni (3) conduce facilmente al primo dei risultati che ci proponevamo di ottenere. Infatti da queste relazioni si ricava

$$\mathbf{a}(x) = \frac{k_0}{x} + \frac{k_1}{x^2} + \dots + \frac{k_n}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{n+1}} \mathbf{a}_{n+1}(x),$$

e quindi

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{n+1} \left\{ \mathbf{a}(x) - \frac{k_0}{x} - \frac{k_1}{x^2} - \dots - \frac{k_n}{x^{n+1}} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{a}_{n+1}(x) = 0,$$

intendendo che x tenda all'infinito nel senso indicato.

Ora, se la serie

$$\sigma(x) = \sum_0^{\infty} \frac{k_n}{x^{n+1}}$$

è convergente, la (4) esprime che, nel campo di convergenza di questa serie, essa rappresenta la funzione $\mathbf{a}(x)$, che pertanto è regolare nell'intorno di $x = \infty$. Invece, se la $\sigma(x)$ è divergente, la (4) esprime appunto che la serie $\sigma(x)$, secondo la definizione dovuta al POINCARÉ⁽¹⁾, è lo sviluppo asintotico di $\mathbf{a}(x)$. *Ogni funzione determinante (1), per la quale siano soddisfatte le condizioni poste al §3, ammette dunque uno sviluppo in serie di potenze intere negative di x , effettivo od asintotico.*

5. — Non si è supposto fin qui l'analiticità della funzione $\alpha(t)$, generatrice della funzione determinante $\mathbf{a}(x)$. Qualora $\alpha(t)$ sia analitica, e regolare entro un cerchio di centro $t = 0$, ove essa ammetta lo sviluppo

$$(5) \quad \alpha(t) = \sum \frac{k_n t^n}{n!},$$

questo sviluppo sarà, per la serie $\sigma(x)$, quello che il BOREL chiama *associato*⁽²⁾. Ora, basta il cambiamento di t in t/x nell'integrale (1) per mostrare come questo integrale dia precisamente la *somma generalizzata*⁽³⁾ della serie $\sigma(x)$, se divergente. Ma non è affatto necessario supporre la convergenza della serie (5)⁽⁴⁾; basta limitarsi alle ipotesi del §3, le quali non richiedono neppure che $\alpha(t)$ sia analitica ed esista fuori dell'asse reale, per potere concludere che, *sotto le ipotesi del §3 per la funzione generatrice, la funzione determinante è rappresentata dalla serie $\sigma(x)$ in quanto ne è la somma generalizzata, ed in quanto la serie stessa ne dà lo sviluppo asintotico.*

6. — Riferendoci alla definizione di serie *assolutamente sommabile*, si vede come essa sia stata ora estesa; infatti non importa più

(1) Acta Math., T. VIII, pag. 296.

(2) All'infuori del cambiamento, nella $\sigma(x)$, di x in $1/x$.

(3) Inoltre $\sigma(x)$ è *assolutamente sommabile*. Vedasi BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, pag. 99 (Paris, Gauthier-Villars, 1901).

(4) Il BOREL avverte (loc. cit., annotazione a piè della pag. 99) che si potrebbe estendere la teoria della sommabilità anche al caso che non sia convergente la serie associata.

che intervenga la serie associata: basta, data la serie divergente $\sigma(x)$, che i suoi coefficienti $k_0, k_1, \dots, k_n, \dots$ siano i valori, per $t = 0$, di una funzione $\alpha(t)$ definita insieme alle sue derivate per tutti i valori positivi di t , in modo che siano soddisfatte le condizioni del § 3, per poter concludere l'esistenza della sommabilità e della proprietà asintotica di $\sigma(x)$.

7. — Abbiassi l'integrale

$$(6) \quad \mathbf{b}(x) = \int_0^1 u^{x-1} f(u) \, du,$$

e si consideri insieme a questo

$$\mathbf{b}_1(x) = \int_0^1 u^{x-1} f'(u) \, du.$$

Se $f(u)$, $f'(u)$ sono tali che gli integrali (6) e (6') siano convergenti, il primo per $\Re(x) > a$ ⁽¹⁾, il secondo per $\Re(x) > a + 1$, si può vedere, con dimostrazione perfettamente simile a quella del § 1, che per $\Re(x) > a$ è

$$\lim_{u \rightarrow 0} \{ u^x f(u) \} = 0;$$

onde, per quei valori di x , l'integrale (6) è assolutamente ed uniformemente convergente. Di più, aggiungendo l'ipotesi della convergenza di

$$\mathbf{b}_2(x) = \int_0^1 u^{x+1} f'(u) \, du$$

per $\Re(x) > a + 2$, si vede, con dimostrazione del tutto analoga a quella del § 2, che $\mathbf{b}(x)$ tende a zero, del primo ordine almeno, se x tende all'infinito nel senso dell'asse reale e positivo.

8. — Ora sia dato l'integrale (1) in cui siano soddisfatte le ipotesi del § 3; ponendo in questo e in (1')

$$t = -\log u, \quad \alpha(-\log u) = f(u),$$

(1) Vedasi l'annotazione fatta al § 1.

si avranno gl'integrali (6) e (6') in cui sono soddisfatte le ipotesi del paragrafo precedente, e sarà precisamente

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{b}(x), \quad \mathbf{a}_1(x) = -\mathbf{b}_1(x).$$

Eseguendo lo stesso cambiamento di variabile sui successivi integrali $\mathbf{a}_2(x)$, $\mathbf{a}_3(x)$, ..., si vede senza difficoltà che $e^{-tx}\alpha^{(n)}(t)$ si esprime in funzione lineare a coefficienti costanti di

$$u^x f(u), \quad u^{x+1} f''(u), \quad \dots, \quad u^{x+n} f^{(n)}(u);$$

e dalle ipotesi del §3 risulta che

$$(7) \quad \mathbf{b}_n(x) = \int_0^1 u^{x-1} f^{(n)}(u) du$$

è convergente per $\Re(x) > a + n$.

Si vede ancora che $f^{(n)}(1)$ è un numero finito g_n , ($n = 0, 1, 2, \dots$), e che fra le k_n e le g_n passano delle relazioni che si possono ottenere in modo assai semplice⁽¹⁾.

Ora l'integrazione per parti di (6) e (7) ci dà

$$\mathbf{a}(x) = \frac{g_0}{x} - \frac{1}{x} \mathbf{b}_1(x+1) \quad \text{per } \Re(x) > a,$$

$$\mathbf{b}_n(x) = \frac{g_n}{x} - \frac{1}{x} \mathbf{b}_{n+1}(x+1) \quad \text{per } \Re(x) > a + n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

(1) Per ottenere queste relazioni, $\alpha(t)$ si può, senza restrizione, supporre sviluppabile in serie di potenze di t . Ne viene

$$f(u) = a(-\log u) = \sum (-1)^n \frac{k_n}{n!} \log^n u;$$

ma

$$\log^n u = c_{n,n}(u-1)^n + c_{n+1,n}(u-1)^{n+1} + c_{n+2,n}(u-1)^{n+2} + \dots,$$

dove $c_{n,n}$, $c_{n+1,n}$, ... sono numeri noti (i cosiddetti numeri di SCHLÄFLI). Onde viene

$$f(u) = \sum \frac{g_n}{n!} (u-1)^n,$$

con

$$g_n = (-1)^{n-1} (c_{n+1,1} k_1 + c_{n+1,2} k_2 + \dots + c_{n+1,n+1} k_{n+1}).$$

Cfr. il metodo di STIRLING indicato da NIELSEN (*Recherches sur les séries de factorielles*, Ann. de l'Éc. Normale, S. III, T. XIX, pag. 437).

Cambiando in quest'ultima x in $x + n$, risulta dalla combinazione delle eguaglianze precedenti la relazione, valida per $\Re(x) > a$,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(x) &= \frac{g_0}{x} - \frac{g_1}{x(x+1)} + \frac{g_2}{x(x+1)(x+2)} - \dots + \\ &+ \frac{(-1)^n g_n}{x(x+1)\dots(x+n)} + \frac{(-1)^{n+1}}{x(x+1)\dots(x+n)} \mathbf{b}_n(x+n+1). \end{aligned}$$

Tendendo x all'infinito nel senso dell'asse reale, $\mathbf{b}_n(x+n+1)$ tende a zero; onde viene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x(x+1)\dots(x+n) \left\{ \mathbf{a}(x) - \frac{g_0}{x} + \frac{g_1}{x(x+1)} - \dots + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(-1)^n g_n}{x(x+1)\dots(x+n)} \right\} \right] = 0; \end{aligned}$$

e quindi lo sviluppo in serie di fattoriali, che, se convergente, rappresenta effettivamente $\mathbf{a}(x)$, lo rappresenta asintoticamente con estensione immediata della definizione del POINCARÉ, se divergente; e quest'ultimo caso si può dare senza che la funzione generatrice sia necessariamente analitica.

Le considerazioni ingegnose fatte dal NIELSEN⁽¹⁾ nel caso della convergenza delle serie di fattoriali, per formare il prodotto, si potrebbero estendere al caso del prodotto di sviluppi asintotici.

(¹) Vedansi questi Rendiconti, seduta del 17 gennaio 1904.