

SALVATORE PINCHERLE

SALVATORE PINCHERLE

Sur les fonctions déterminantes

Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Serie 3, Vol. **22**
(1905), p. 9–68

in: Salvatore Pincherle, *Opere Scelte*, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 206–263

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_206>

Sur les fonctions déterminantes.

Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure (Paris);
(3) 22, 9-68 (1905).

Introduction.

LAPLACE, le premier, a étudié le lien qui existe entre les coefficients d'une série de puissances et la fonction représentée par cette série. Si l'on a

$$(I) \quad \varphi(t) = \sum_n a(n) t^n,$$

il a appelé $\varphi(t)$ la *fonction génératrice* de $a(n)$, et $a(n)$, considérée comme fonction de l'indice n , la *fonction déterminante* de $\varphi(t)$. Après lui, les propriétés de la correspondance entre les deux fonctions $a(n)$ et $\varphi(t)$ ont été étudiées par ABEL dans un Mémoire resté célèbre et qui, au point de vue de l'époque, épuise la question, puisqu'on y trouve résumé tout ce qui regarde le côté formel de cette correspondance.

Mais le problème se présente sous un nouvel aspect et acquiert une importance et un intérêt bien plus frappants, le jour où, avec WEIERSTRASS, le concept de fonction analytique s'introduit dans la Science. Toutes les propriétés de la fonction analytique sont renfermées, pour ainsi dire comme dans un embryon, dans la suite des coefficients de l'un quelconque de ses éléments; et, dans ces derniers temps, de nombreux géomètres se sont efforcés de répondre à la question, qui se pose comme d'elle-même, de déduire, des propriétés de la suite des coefficients, l'ensemble et la nature des singularités de la fonction. Il serait oiseux de rappeler tous les travaux qui se rattachent à cette question; je m'en abstiendrai, d'autant plus qu'un

grand nombre d'entre eux se trouvent cités dans l'Introduction d'un travail que j'ai publié en 1900 dans le Tome IV de la 3^{me} série des *Annali di Matematica*. Mais on ne peut passer sous silence un important Mémoire de M. LE ROY⁽¹⁾ : c'est sans doute celui où la question dont il s'agit est traitée le plus à fond. Cet auteur, qui note en plusieurs points de son travail la relation entre notre problème et d'autres questions, comme la théorie de la sommabilité des séries suivant M. BOREL ou le problème des moments de STIELTJES, obtient des résultats remarquables et en grande partie nouveaux en formulant ainsi son point de vue : *Si les coefficients $a(n)$ de la série (I), considérés comme fonctions de l'entier n , appartiennent à des classes déterminées, à quelles classes appartient la fonction génératrice $\varphi(t)$?* Il y répond dans des cas étendus, mais, plutôt que par une théorie générale, par des exemples et des applications dont le but est de montrer le mécanisme de la méthode qu'il propose et l'intérêt qu'elle peut offrir⁽²⁾.

Dans le présent Mémoire, c'est plutôt au point de vue inverse que je me suis placé. Si l'on suppose que la fonction génératrice appartienne à une classe donnée, qu'en résulte-t-il pour la fonction déterminante? Je me suis aussi attaché à donner au développement de la correspondance entre $\varphi(t)$ et $a(n)$ un caractère systématique. Mais ce qui m'a semblé essentiel, c'est de considérer soit la fonction déterminante, soit (voir Chap. IV) une fonction entière qui lui est étroitement liée et que j'appelle *fonction coefficiente*, comme fonction analytique d'une variable complexe ; le caractère analytique, comme l'a déjà remarqué M. E. LINDELÖF à propos des coefficients des fonctions entières, a dans ces recherches non moins d'importance que le caractère asymptotique. M. BOREL dans une Note de quelques lignes⁽³⁾, mais éminemment suggestive, a déjà conseillé l'étude de fonctions analytiques convenables qui, pour les valeurs entières de la variable, coïncident avec les coefficients $a(n)$ de la série de TAYLOR (I) : le Chapitre IV du présent travail peut être regardé comme un essai de réponse au *desideratum* exprimé dans cette Note.

Mais c'est dans le concept de *correspondance* ou d'*opération fonctionnelle* qu'il faut chercher le fil conducteur d'une recherche dans le genre de celle qui nous occupe. Si l'on indique par J l'opération

(1) *Sur les séries divergents et les fonctions définies par un développement de Taylor*, Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2^e série, t. II, 1900, (p. 315).

(2) Loc. cit., p. 319.

(3) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 12 décembre 1898.

qui, appliquée à la série de TAYLOR (I), donne comme résultat le coefficient $a(n)$ du terme en t^n dans cette série, c'est-à-dire si l'on pose

$$(II) \quad J\varphi = a(n),$$

l'opération (II) jouit, par définition, des propriétés suivantes :

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} J(\varphi + \psi) = J\varphi + J\psi, \\ J(c\varphi) = cJ\varphi, \\ J\left[\left(\frac{1}{t} - 1\right)\varphi(t)\right] = \Delta J\varphi, \\ J(tD\varphi) = nJ\varphi. \end{array} \right.$$

Dans ce tableau c est constante par rapport à t et à n , Δ est l'opération de différence finie, D est la dérivation. Or, dans ce qui suit, j'obtiens, d'une façon aussi élémentaire que possible, une opération qui jouit des propriétés ci-dessus tout en donnant comme résultat une fonction, non plus seulement de l'entier n , mais analytique et régulière pour toutes les valeurs d'une variable complexe x dont la partie réelle est plus grande qu'un nombre donné. C'est dans l'étude de cette opération et de son inverse (Chap. II) que réside la théorie des fonctions génératrices et de leurs déterminantes. Pour rendre la lecture plus facile, je n'ai pas fait usage des notations et des propositions de la théorie des opérations distributives en général, et je me suis borné à l'étude systématique de l'intégrale

$$(IV) \quad \int_0^a \varphi(t) t^{x-1} dt$$

et à son inversion.

Le Chapitre I est consacré à l'étude de l'intégrale (IV), où $\varphi(t)$ est supposée d'abord simplement continue et, ensuite, dérivable; dans le Chapitre II on étudie l'inversion de cette intégrale; le Chapitre III est consacré au cas où $\varphi(t)$ est une fonction analytique et à l'examen de certaines classes de fonctions $\varphi(t)$; on y retrouve en particulier le concept de polygone de sommabilité de M. BOREL et les conditions nécessaires et suffisantes données déjà par M. NIELSEN, mais rendues plus simples, pour le développement d'une fonction en série des factorielles

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

Enfin, dans le Chapitre IV, on substitue à la fonction déterminante, représentée par l'intégrale (IV), une fonction entière que j'appelle *fonction coefficiente* et dont l'étude permet de retrouver nombre des résultats donnés par MM. LEAU, LE ROY, etc.. Dans ce même Chapitre je donne les conditions nécessaires et suffisantes, et, si je ne me trompe, pour la première fois, pour le développement d'une fonction en série de factorielles

$$\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}.$$

Loin de moi la prétention de donner, dans ce travail, nombre de résultats nouveaux. Mon but est plus modeste : c'est de coordonner, et de placer à un point de vue unique les recherches entreprises, sous des aspects divers et qu'il n'est pas toujours facile de relier entre eux, sur un des Chapitres les plus intéressants du Calcul intégral ⁽¹⁾.

CHAPITRE I.

Étude de l'intégrale $\int_0^a \varphi(t) t^{x-1} dt$.

1. — Nous nous proposons, dans ce Chapitre, l'étude de l'intégrale définie

$$(1) \quad \alpha(x, a) = \int_0^a \varphi(t) t^{x-1} dt,$$

où t est une variable réelle ; $\varphi(t)$ est une fonction finie et continue de cette variable dans l'intervalle $0 < t < a$, le point $t = 0$ excepté, a étant un nombre positif ; enfin x est une variable complexe.

(1) La théorie des fonctions génératrices est susceptible de généralisations intéressantes : les nouvelles recherches indiquées par M. MITTAG-LEFFLER (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 2 mars et 12 octobre 1903 et Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 3, janvier 1904) en sont une preuve.

Pour cette étude, le théorème suivant ⁽¹⁾ doit être considéré comme fondamental :

Si $\alpha(x, a)$ est convergente pour une valeur $x = x_0$ de la variable x , elle est convergente pour toute valeur de x telle que l'on ait

$$\Re(x) > \Re(x_0) \quad (2).$$

Posons, en effet,

$$\alpha(x, a, u) = \int_u^a \varphi(t) t^{x-1} dt,$$

u étant positif, et faisons

$$x = x_0 + y, \quad \Re(y) > 0.$$

Il vient, en intégrant par parties,

$$\alpha(x_0 + y, a, u) = [t^y \alpha(x_0, a, t)]_{t=u}^{t=a} - y \int_u^a t^{y-1} \alpha(x_0, a, t) dt,$$

et, en passant à la limite pour $u = 0$ et en remarquant que la partie aux limites s'annule à cause de $\Re(y) > 0$, on a

$$(2) \quad \lim_{u=0} \alpha(x_0 + y, a, u) = -y \int_0^a t^{y-1} \alpha(x_0, a, t) dt.$$

Ici, le second membre est convergent pour toute valeur de y dont la partie réelle est positive, et le théorème est ainsi démontré.

⁽¹⁾Ce théorème a été donné pour la première fois par DIRICHLET, puis retrouvé par M. BOREL sous une forme un peu différente et pour le cas de la convergence absolue (*Mém. sur les séries divergentes*, Chap. II, Ann. de l'École Normale, 3^e série, t. XVI, 1899; et *Leçons sur les séries divergentes*, p. 108, Paris 1901). Pour le cas de la convergence simple il a été démontré par M. PHRAGMEN (*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXXII, 1901, p. 1396), puis par M. FRANEL, cité par M. Hurwitz (Ann. de l'École Normale, 3^e série, t. XIX, 1902): ces deux auteurs établissent la démonstration sur le second théorème de la moyenne; enfin, par M. LERCH (*Acta Math.*, t. XXVII, 1903, p. 345). La démonstration donnée dans le texte est, sauf des modifications de forme, celle de M. LERCH.

⁽²⁾ Par $\Re(a)$ j'indique la partie réelle du nombre complexe a .

2. — Il résulte immédiatement de ce théorème que si $\alpha(x, a)$ n'est pas convergente pour $x = x_1$, elle ne peut l'être pour aucune valeur de x telle que $\Re(x) < \Re(x_1)$. D'où suit l'existence, pour toute intégrale de la forme (1), d'une droite $\Re(x) = c$ perpendiculaire à l'axe réel et telle qu'à droite de cette perpendiculaire l'intégrale est convergente, tandis qu'elle ne l'est pas à gauche; c est un nombre réel, et les valeurs $c = +\infty$ ou $c = -\infty$ ne sont pas exclues. Le demi-plan $\Re(x) > c$ s'appellera *demi-plan de convergence* de l'intégrale (1). Au nombre c nous donnerons le nom d'*ordre de la fonction* $\varphi(t)$ au point $t = 0$; en d'autres termes, si $\varphi(t)$ est d'ordre c au point $t = 0$, cela signifie que

$$\int_0^a \varphi(t) t^{c+\varepsilon-1} dt$$

converge pour $\Re(\varepsilon) > 0$ et diverge pour $\Re(\varepsilon) < 0$.

Si les fonctions $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$ sont des ordres c , c_1 respectivement, l'ordre de $\varphi(t) + \varphi_1(t)$ est, en général, le plus grand des deux nombres c et c_1 .

Une fonction $\varphi(t)$ telle que $\varphi(+0)$ soit fini et différent de zéro est d'ordre nul; une fonction $t^k \psi(t)$, où $\psi(+0)$ est fini et différent de zéro, est d'ordre $-k$. Si l'intégrale (1) n'est jamais convergente, $\varphi(t)$ est de l'ordre $+\infty$; elle est de l'ordre $-\infty$ si l'intégrale est convergente dans tout le plan x . La multiplication de $\varphi(t)$ par t^k en diminue l'ordre de $\Re(k)$; la multiplication par $\log^k t$ n'altère pas cet ordre.

3. — Soit c l'ordre de $\varphi(t)$, et $\Re(x) > c$. Si $\varphi(t) t^x$ tend à zéro pour $t = 0$, l'intégrale (1) est non seulement convergente dans le demi-plan $\Re(x) > c$, mais encore absolument convergente. En effet, σ étant positif arbitraire, on peut trouver un nombre positif δ tel que pour $0 < \varepsilon < \delta$ on ait

$$|\varphi(\varepsilon) \varepsilon^x| < \sigma;$$

qu'on prenne $\varepsilon < \varepsilon' < \delta$, et l'on aura, pour $\Re(x_1) > c$ et λ positif,

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} |\varphi(t) t^{x_1+\lambda-1}| dt < \sigma \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} t^{\lambda-1} dt < \frac{\sigma \varepsilon'^{\lambda}}{\lambda},$$

ce qui démontre l'énoncé.

4. — Revenons au cas général, et soit c l'ordre de $\varphi(t)$.

Dans toute aire S finie, contenue dans le demi-plan $\Re(x) > c$, la droite $\Re(x) = c$ exclue, l'intégrale (1) est uniformément convergente.

En d'autres termes, soient σ, σ' deux nombres positifs arbitraires. On peut déterminer un nombre positif δ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon' < \delta$ et pour $\Re(x) > c + \sigma'$, on ait, dans l'aire S ,

$$(3) \quad \left| \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \varphi(t) t^{x-1} dt \right| < \sigma.$$

A cet effet, posons $x = c_1 + y$, $c_1 > c$, et intégrons par parties en procédant comme au n. 1. Il vient

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \varphi(t) t^{x-1} dt = [\alpha(c_1, \varepsilon', t) ty]_{\varepsilon}^{\varepsilon'} - y \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \alpha(c_1, \varepsilon', t) ty^{-1} dt.$$

La fonction $\alpha(c_1, \varepsilon', t) ty$ est continue par rapport à t et à y pour $0 < t < a$, et pour $\Re(y) > \sigma'$; elle l'est donc uniformément dans l'aire S ; c'est-à-dire on peut déterminer δ_1 positif et indépendant de y , tel que, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon' < \delta_1$, on ait

$$|[\alpha(c_1, \varepsilon', t) ty]_{\varepsilon}^{\varepsilon'}| < \frac{\sigma}{2}.$$

Venons au second terme du deuxième membre. Soit m le module maximum de $\alpha(c_1, a, t)$ pour $0 \leq t \leq a$; soit r le module maximum de y dans l'aire S ; on aura

$$\left| y \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \alpha(c_1, \varepsilon', t) ty^{-1} dt \right| < rm \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} t^{\Re(y)-1} dt,$$

et puisque $\Re(y) \leq r$ et qu'on peut supposer sans restriction $\varepsilon' < 1$, on a

$$\left| y \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \alpha(c_1, \varepsilon', t) ty^{-1} dt \right| < m(\varepsilon'^{\sigma'} - \varepsilon^{\sigma'}).$$

Il suffit maintenant de choisir δ_2 assez petit pour que l'on ait

$$\delta_2^{\sigma'} < \frac{\sigma}{2m},$$

et le second terme du second membre sera plus petit que $\sigma/2$. Si l'on prend δ égal au plus petit des deux nombres δ_1, δ_2 l'inégalité (3) est donc satisfaite.

5. — Pour $\Re(x) > c$, l'intégrale

$$(4) \quad \int_0^a \varphi(t) \log t \cdot t^{x-1} dt$$

est convergente.

Soit c_1 un nombre réel plus grand que c , h un nombre positif arbitraire. Pour $\varepsilon < \varepsilon' < e^{-1/h}$, la fonction $t^h \log t$ est négative et décroissante; on peut donc appliquer le second théorème de la moyenne à l'intégrale

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \varphi(t) \log t \cdot t^{c_1+h-1} dt;$$

ε_1 étant compris entre ε et ε' , cette intégrale sera égale à

$$\varepsilon'^h \log \varepsilon' \cdot \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon'} \varphi(t) t^{c_1-1} dt.$$

Or, σ étant arbitraire, on peut prendre ε' assez petit pour que l'on ait

$$|\alpha(c_1, \varepsilon', \varepsilon_1)| < \sigma,$$

et, puisque $\varepsilon'^h \log \varepsilon'$ tend à zéro avec ε' , l'intégrale

$$\int_0^a \varphi(t) \log t \cdot t^{c_1+h-1} dt$$

est convergente, et, par le théorème du n. 1, l'intégrale (4) l'est donc pour $\Re(x) > c$.

Un raisonnement parfaitement semblable à celui du n. 4 permet aussi de démontrer que *cette intégrale (4) est convergente uniformément dans toute aire finie, contenue dans le demi-plan $\Re(x) > c$.*

6. — Les conditions démontrées pour les intégrales (1) et (4) sont précisément celles qui sont exigées par un théorème connu de L. SCHEEFFER ⁽¹⁾ pour pouvoir conclure que :

Pour toutes les valeurs de x pour lesquelles on a $\Re(x) > c$, c étant l'ordre de $\varphi(t)$, l'expression (1) représente une branche uniforme et régulière de fonction analytique.

7. — Si l'intégrale (1) est convergente au point x_0 avec $\Re(x_0) = c$, elle est uniformément convergente sur toute la demi-droite lieu des points $x_0 + r$, où r est un nombre quelconque positif ou nul.

En effet, si σ est positif arbitraire, on peut déterminer un nombre δ tel que pour

$$0 < \varepsilon < \varepsilon' < \delta,$$

on ait

$$\left| \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \varphi(t) t^{x_0-1} dt \right| < \frac{\sigma}{2}.$$

Si maintenant on applique le second théorème de la moyenne aux deux parties, réelle et imaginaire, de l'intégrale

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \varphi(t) t^{x_0+r-1} dt,$$

il viendra

$$\left| \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \varphi(t) t^{x_0+r-1} dt \right| < \varepsilon' \sigma < \sigma,$$

d'où suit immédiatement la convergence uniforme.

Il en résulte ⁽²⁾ que si r tend à zéro, $\alpha(x_0 + r, a)$ tend à $\alpha(x_0, a)$, c'est-à-dire que $\alpha(x, a)$ est continue à droite au point $x = x_0$ le long

⁽¹⁾ Ueber einige bestimmte Integrale, u. s. w., Habilitationsschrift, Berlin 1883, (p. 5).

⁽²⁾ Voir FRANEL, loc. cit. .

de la demi-droite $x_0 + r$. En effet, σ étant arbitraire, on peut déterminer δ tel que pour $\varepsilon < \delta$, on ait

$$\left| \int_0^\varepsilon \varphi(t) t^{x_0+r-1} dt \right| < \frac{\sigma}{3}, \quad \left| \int_0^\varepsilon \varphi(t) t^{x_0-1} dt \right| < \frac{\sigma}{3};$$

soit m le module maximum de $\varphi(t)$ entre ε et a ; en prenant r assez petit pour que l'on ait

$$|t^{x_0+r-1} - t^{x_0-1}| < \frac{\sigma}{3ma},$$

la décomposition

$$\begin{aligned} \alpha(x_0 + r, a) - \alpha(x_0, a) &= \int_0^\varepsilon \varphi(t) t^{x_0+r-1} dt \\ &\quad - \int_0^\varepsilon \varphi(t) t^{x_0-1} dt + \int_\varepsilon^a \varphi(t) (t^{x_0+r-1} - t^{x_0-1}) dt \end{aligned}$$

donne

$$|\alpha(x_0 + r) - \alpha(x_0)| < \sigma.$$

L'analogie entre ce théorème et celui d'ABEL sur une série de puissances convergente en un point de sa circonférence de convergence est évidente.

8. — Une proposition remarquable sur les expressions (1) est celle qu'a donnée récemment M. LERCH⁽¹⁾, sous la forme suivante:

Si l'expression (1) s'annule pour les valeurs de x formant une progression arithmétique $x = p + nq$ de raison q réelle ($n = 0, 1, 2, \dots$), la fonction $\varphi(t)$ sera identiquement nulle, et par suite $\alpha(x, a)$ le sera aussi.

Il en résulte que si une branche uniforme régulière de fonction analytique, donnée pour les valeurs de x telles que $\Re(x)$ soit plus grand que c , admet une expression de la forme (1), elle ne peut en admettre que une.

9. — Les propositions énoncées jusqu'ici sont susceptibles d'extension en plusieurs sens. Ainsi, il n'est pas nécessaire d'admettre

(1) Acta Math., t. XXVII, 1903, p. 345.

la continuité de $\varphi(t)$; il suffit de supposer que cette fonction soit intégrable et satisfasse aux conditions sous lesquelles on peut appliquer le second théorème de la moyenne, dont on a fait usage aux nn. 5 et 7; les résultats obtenus conservent leur valeur. On peut aussi supposer que $\varphi(t)$ soit une fonction complexe de la variable réelle t : il suffit, dans ce cas, de considérer séparément dans $\varphi(t)$ la partie réelle et l'imaginaire, pour reconnaître que les propositions données ci-dessus restent valables.

Dans ce qui suit nous continuerons à admettre la continuité pour $\varphi(t)$, pour éviter des discussions trop minutieuses, mais il nous sera indifférent de supposer $\varphi(t)$ réel ou complexe; dans ce dernier cas, si $\varphi(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, l'ordre de $\varphi(t)$ sera le plus grand des ordres de $\xi(t)$ et de $\eta(t)$.

Enfin, les mêmes résultats se conservent si l'on suppose complexe la variable t elle-même, et si l'on exécute l'intégration le long d'une ligne simple, de longueur finie; la fonction $\varphi(t)$ est en ce cas une fonction continue des points de cette ligne, qui joint le point $t = 0$ à un point $t = a$. Mais nous ne ferons usage de cette hypothèse plus large qu'au Chapitre III.

10. — Si la fonction $\varphi(t)$ peut, au voisinage du point $t = 0$, se mettre sous la forme

$$\varphi(t) t^h = c + \omega(t),$$

où $c \neq 0$ est une constante et $\omega(t)$ est d'ordre négatif $-\varepsilon$, la fonction $\alpha(x, a)$ ⁽¹⁾ aura au point $x = h$ un pôle du premier ordre, dont c est le résidu.

D'après la définition du n. 2, l'ordre de $\varphi(t)$ est $\mathcal{R}(h)$. Or, pour $\mathcal{R}(x) > \mathcal{R}(h)$, on a

$$\alpha(x) = \int_0^a \varphi(t) t^{x-1} dt = \frac{ca^{x-h}}{x-h} + \int_0^a \omega(t) t^{x-h-1} dt;$$

mais $\omega(t)$ est d'ordre $-\varepsilon$, par conséquent l'intégrale du dernier membre représente une branche de fonction analytique régulière et

(1) Lorsqu'il ne peut y avoir lieu à équivoque, la même notation $\alpha(x, a)$, que nous écrirons aussi simplement $\alpha(x)$, servira à indiquer tant l'expression analytique (1) que la fonction analytique qu'elle représente pour $\mathcal{R}(x) > c$.

uniforme pour $\Re(x) > h - \varepsilon$. Il en résulte que, tandis que l'intégrale (1) définit une fonction analytique régulière et uniforme dans le demi-plan $\Re(x) > \Re(h)$, la fonction existe dans tout le demi-plan $\Re(x) > \Re(h) - \varepsilon$ pour le moins, et s'y maintient aussi régulière, à l'exception du point $x = h$, où elle admet un pôle du premier ordre, avec le résidu c .

11. — Si la fonction $\varphi(t)$, au voisinage du point $t = 0$, peut se mettre sous la forme

$$\varphi(t) t^h = c \log^k t + \omega(t),$$

où c est une constante et $\omega(t)$ une fonction d'ordre négatif $-\varepsilon$, la fonction $\alpha(x)$ existe pour le moins dans tout le demi-plan $\Re(x) > \Re(h) - \varepsilon$, et y est régulière, à l'exception du point $x = h$, où elle admet une singularité de la forme $Cx^{-k-1} \log x$ si k est un entier négatif, et Cx^{-k-1} pour toute autre valeur de k .

Nous avons déjà remarqué que la multiplication par une puissance du logarithme n'altère pas l'ordre. L'intégrale $\alpha(x)$ représente par conséquent une branche de fonction régulière et uniforme pour $\Re(x) > \Re(h)$. Mais on a

$$\alpha(x) = c \int_0^a \log^k t \cdot t^{x-h-1} dt + \int_0^a \omega(t) t^{x-h-1} dt,$$

où la seconde intégrale représente une branche de fonction régulière et uniforme pour $\Re(x) > \Re(h) - \varepsilon$. Par conséquent, la fonction analytique $\alpha(x)$ existe dans ce domaine plus étendu, et, dans la bande

$$\Re(h) - \varepsilon < \Re(x) < \Re(h),$$

elle admet les singularités de la fonction

$$\lambda(x - h) = \int_0^a \log^k t \cdot t^{x-h-1} dt.$$

Mais on vérifie immédiatement que la fonction $\lambda(x)$ est une intégrale de l'équation linéaire

$$x \frac{d\lambda(x)}{dx} + (k + 1) \lambda(x) = a^x \log^{k+1} a;$$

il en résulte, d'après les propriétés connues de cette équation, que $\lambda(x)$ est de la forme

$$\begin{aligned} Cx^{-k-1} \log x + g(x) & \quad \text{pour } k \text{ entier négatif,} \\ Cx^{-k-1} + g(x) & \quad \text{pour les autres valeurs de } k, \end{aligned}$$

en désignant par C une constante, et par $g(x)$ une fonction entière. Le théorème est ainsi démontré.

Pour rendre uniforme dans le demi-plan $\Re(x) > \Re(h) - \varepsilon$ la fonction $\alpha(x)$, il faudra naturellement, sauf le cas de k entier positif, y faire une coupure du point $x = h$ à un point arbitraire de la droite $\Re(x) = \Re(h) - \varepsilon$.

12. — On a, par la formule (2) (n. 1),

$$\alpha(x_0 + y, a) = -y \int_0^a \alpha(x_0, a, t) t^{y-1} dt;$$

ici x_0 est une valeur de x pour laquelle $\alpha(x_0, a)$ est convergente, et l'on a $\Re(y) > 0$; posons $\Re(y) = r$. La fonction $\alpha(x_0, a, t)$ est finie et continue de $t = 0$ à $t = a$, les extrêmes inclus; si donc m est sa valeur absolue maxima, on aura

$$|\alpha(x_0 + y, a)| \leq |y| m a^r / r.$$

Supposons maintenant que $x = x_0 + y$ tende à l'infini dans une direction comprise entre les arguments $-(\pi/2) + \varepsilon$ et $(\pi/2) - \varepsilon$, ε étant positif et aussi petit qu'on voudra; le rapport $|y|/r$ demeure inférieur à un nombre fini, et l'on a par suite

$$|\alpha(x_0 + y, a)| < m' a^r.$$

Enfin, en remarquant que $a^r = a^{\Re(x-x_0)}$ ne diffère de a^x que par un facteur fini, on obtient le théorème suivant:

Pour toutes les valeurs de x comprises dans un angle de sommet x_0 , et dont les côtés sont pour arguments $-(\pi/2) + \varepsilon$ et $(\pi/2) - \varepsilon$, le rapport

$$\alpha(x)/a^x$$

reste inférieur à un nombre fini; x_0 étant une valeur de x pour laquelle l'intégrale (1) est convergente.

13. — Jusqu'ici nous n'avons pas supposé l'existence de la dérivée pour la fonction $\varphi(t)$. Admettons à présent que $\varphi(t)$ ait une dérivée $\varphi'(t)$ finie et continue dans tout intervalle $\varepsilon < t < a$, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on voudra; en outre c indiquant toujours l'ordre de $\varphi(t)$, supposons que $\varphi'(t)$ soit d'ordre fini c' . On a alors, en intégrant entre ε et ε' ($0 < \varepsilon < \varepsilon' \leq a$),

$$(5) \quad \varphi(\varepsilon') \varepsilon'^x - \varphi(\varepsilon) \varepsilon^x = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \varphi'(t) t^x dt + x \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \varphi(t) t^{x-1} dt.$$

La première intégrale du second membre est convergente pour $\Re(x) > c' - 1$; la deuxième l'est pour $\Re(x) > c$; toutes deux convergent uniformément, comme on l'a vu au n. 4. Indiquons par g le plus grand des deux nombres $c, c' - 1$, et soit x pris dans une aire $\mathcal{S}$ finie quelconque contenue dans le demi-plan $\Re(x) > g$. Si σ est un nombre arbitraire positif, on pourra déterminer δ tel que pour

$$0 < \varepsilon < \varepsilon' < \delta,$$

on ait pour tout x de $\mathcal{S}$, r désignant comme plus haut le module maximum de x dans $\mathcal{S}$,

$$\left| \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \varphi'(t) t^x dt \right| < \frac{\sigma}{2}, \quad \left| \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \varphi(t) t^{x-1} dt \right| < \frac{\sigma}{2r}.$$

Il en résulte que

$$|\varphi(\varepsilon') \varepsilon'^x - \varphi(\varepsilon) \varepsilon^x| < \sigma,$$

ce qui exprime que $\varphi(\varepsilon) \varepsilon^x$ admet une limite finie pour $\varepsilon = 0$. Mais il en est de même de $\varphi(\varepsilon) \varepsilon^{x_1}$, avec $\Re(x) > \Re(x_1) > g$; donc puisque

$$\varphi(\varepsilon) \varepsilon^x = \varepsilon^{x-x_1} \varphi(\varepsilon) \varepsilon^{x_1},$$

il vient

$$\lim_{\varepsilon=0} \varphi(\varepsilon) \varepsilon^x = 0.$$

Donc, si $\varphi(t)$ admet une dérivée d'ordre fini c' , pour $\Re(x)$ plus grand que le plus grand des deux nombres $c, c' - 1$, $\varphi(t) t^x$ tend vers zéro avec t .

En se reportant à la remarque qui fait l'objet du n. 3, on conclut aussi que, *pour les mêmes valeurs de x et sous les mêmes conditions, l'intégrale (1) est absolument convergente.*

14. — Réciproquement, supposons que, pour $\mathcal{R}(x) > c$, on ait

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) t^x = 0,$$

et que $\varphi(t)$ ait une dérivée : l'ordre de cette dérivée est alors fini et au plus égal à $c + 1$. En effet, par la formule (5) ci-dessus, σ étant un nombre positif arbitraire, on peut déterminer un nombre δ tel que pour $\varepsilon < \varepsilon' < \delta$ on ait

$$|\varphi(\varepsilon) \varepsilon^x| < \frac{\sigma}{3}, \quad |\varphi(\varepsilon') \varepsilon'^x| < \frac{\sigma}{3}, \quad \left| \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \varphi(t) t^{x-1} dt \right| < \frac{\sigma}{3r},$$

d'où il résulte

$$\left| \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \varphi'(t) t^x dt \right| < \sigma,$$

ce qui démontre la convergence de l'intégrale

$$\int_0^a \varphi'(t) t^{x-1} dt$$

pour $\mathcal{R}(x) > c + 1$.

15. — Nous avons trouvé au n. 12 que si l'on considère un angle de sommet x_0 , avec $\mathcal{R}(x_0) > c$, et dont les côtés ont pour arguments $-(\pi/2) + \varepsilon$ et $(\pi/2) - \varepsilon$, où ε est un nombre positif aussi petit que l'on voudra, pour tous les points x intérieurs à l'angle, on a

$$\alpha(x) = a^x \mu(x),$$

où $\mu(x)$ est en valeur absolue, inférieure à un nombre fini m . Si maintenant on suppose que $\varphi(t)$ admette la dérivée d'ordre fini c' , on aura, pour $\mathcal{R}(x) > g$, où g désigne encore le plus grand des deux nombres $c, c' - 1$,

$$\int_0^a \varphi(t) t^{x-1} dt = \frac{a^x \varphi(a)}{x} - \frac{1}{x} \int_0^a \varphi'(t) t^x dt,$$

puisque, d'après le n. 13, $\varphi(t) t^x$ tend à zéro avec t pour $\mathcal{R}(x) > g$.

Mais dans un angle de sommet x_0 , $\Re(x_0) > g$, et dont les arguments des côtés sont $-(\pi/2) + \varepsilon$ et $(\pi/2) - \varepsilon$, l'intégrale au second membre est de la forme $a^x \mu(x)$; par conséquent la fonction $\alpha(x)$ est, dans l'angle indiqué, de la forme

$$(6) \quad \alpha(x) = \frac{ka^x}{x} + \frac{\mu(x)a^x}{x},$$

où k est une constante et $\mu(x)$ est, en valeur absolue, inférieure à un nombre fini m .

16. — En ajoutant aux hypothèses faites sur $\varphi(t)$ celle de l'existence des dérivées deuxième, troisième, etc., on pourrait étendre les résultats précédents et détailler davantage les propriétés de la fonction $\alpha(x)$. Ainsi, par exemple, si $\varphi(t)$ admet la première et la deuxième dérivée, des ordres finis c' et c'' , on aura pour $\Re(x) > g$, où g est le plus grand des trois nombres c , $c' - 1$, $c'' - 2$,

$$\int_0^a \varphi(t) t^{x-1} dt = \frac{a^x \varphi(a)}{x} - \frac{a^{x+1} \varphi'(a)}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)} \int_0^a \varphi''(t) t^{x+1} dt;$$

or, dans un angle comme celui que l'on a considéré au numéro précédent, la dernière intégrale est de la forme $a^x \mu(x)$, d'où suit pour $\alpha(x)$ la forme

$$(6') \quad \alpha(x) = a^x \left[\frac{c}{x} + \frac{\mu_1(x)}{x(x+1)} \right],$$

où l'on a aussi, dans le même angle, $|\mu_1(x)|$ inférieur à un nombre fini.

En dehors de cette remarque, nous allons nous borner à l'examen de deux cas particuliers intéressants.

Soit d'abord

$$\varphi(t) = \psi(t) t^{-h},$$

où $\psi(t)$ est finie et continue dans l'intervalle $0 \leq t \leq a$, différente de zéro pour $t=0$, et dont les dérivées $\psi'(t)$, $\psi''(t)$, ..., jusqu'à la $(r+1)^{\text{ième}}$ inclusivement, sont également finies et continues dans le même intervalle.

On a pour $t \leq \delta$, où δ est un nombre positif suffisamment petit,

$$\psi(t) = \psi(0) + t \psi'(0) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \psi''(0) + \dots + \frac{t^r}{r!} \psi^{(r)}(0) + \frac{t^{r+1}}{(r+1)!} \psi^{(r+1)}(\theta t),$$

où θ est un nombre positif moindre que 1, qui varie avec t . Or, pour $\Re(x) > \Re(h)$, on a

$$\alpha(x) = \int_0^\delta \varphi(t) t^{x-1} dt + \int_\delta^a \varphi(t) t^{x-1} dt.$$

La seconde intégrale au second membre est une fonction entière $\omega(x)$; quant à la première, elle donne

$$\sum_{s=0}^r \frac{\psi^{(s)}(0)}{s!} \int_0^\delta t^{x-h+s-1} dt + \frac{1}{(r+1)!} \int_0^\delta \psi^{(r+1)}(\theta t) t^{x-h+r} dt.$$

Ici, la dernière intégrale représente une fonction analytique régulière dans tout le demi-plan

$$\Re(x) > \Re(h) - r - 1,$$

indiquons-la par $\alpha_r(x)$. On a ainsi, pour $\Re(x) > \Re(h)$,

$$\begin{aligned} \alpha(x) = \delta^{x-h} \left[\frac{\psi(0)}{x-h} + \frac{\psi'(0) \delta}{x-h+1} + \dots + \frac{\psi^{(r)}(0) \delta^r}{r! (x-h+r)} \right] + \\ + \frac{1}{(r+1)!} \alpha_r(x) + \omega(x). \end{aligned}$$

Mais tandis que le premier membre, comme valeur de l'intégrale définie (1), n'a de sens que pour $\Re(x) > \Re(h)$, le second membre représente une fonction analytique régulière dans tout le demi-plan $\Re(x) > \Re(h) - r - h$, sauf aux points

$$x = h, h-1, h-2, \dots, h-r,$$

où elle admet des pôles du premier ordre; nous représenterons la fonction par la même notation $\alpha(x)$. Le résidu relatif au point $x = h-s$ est $\frac{\psi^{(s)}(0)}{s!}$, ($s = 0, 1, 2, \dots, r$); la fonction $\alpha(x)$ a donc la forme

$$(7) \quad \alpha(x) = \sum_{s=0}^r \frac{\psi^{(s)}(0)}{s! (x-h+s)} + \alpha_1(x),$$

où $\alpha_1(x)$ est une fonction analytique, régulière en tous les points du demi-plan $\Re(x) > \Re(h) - r - 1$.

En intégrant par parties l'expression

$$\alpha(x) = \int_0^a \psi(t) t^{x-h-1} dt,$$

il vient

$$\alpha(x) = \frac{\psi(a)a^{x-h}}{x-h} - \frac{1}{x-h} \int_0^a \psi'(t) t^{x-h} dt.$$

En répétant $r-1$ fois l'intégration par parties, on arrive à la formule

$$(8) \quad \alpha(x) = a^{x-h} \sum_{s=0}^r \frac{(-1)^s a^s \psi^{(s)}(a)}{(x-h)(x-h+1) \dots (x-h+s)} + \\ + \frac{(-1)^{r+1}}{(x-h)(x-h+1)(x-h+r)} \int_0^a \psi^{(r+1)}(t) t^{x-h+r} dt,$$

qui, comme la formule (7), représente la fonction $\alpha(x)$ dans tout le demi-plan $\Re(x) > \Re(h) - r - 1$, où la dernière intégrale est convergente.

17. — Soit ensuite une fonction $\varphi(t)$ de la forme

$$\varphi(t) = \psi(t) t^{-h} \log^k t,$$

où la fonction $\psi(t)$ est finie et continue pour $0 \leq t \leq a$, ainsi que ses dérivées successives jusqu'à la $(r+1)^{\text{ième}}$ inclusivement; $\psi(t)$ n'étant en outre pas nulle pour $t=0$. Par la méthode suivie au numéro précédent, on trouve sans peine que l'intégrale (1) admet l'expression suivante :

$$(9) \quad \alpha(x) = \bar{\alpha}(x) + a^x \sum_{s=0}^r c_s (x-h+s)^{-k-1} \log(x-h+s)$$

si k est un nombre entier négatif, et

$$(9') \quad \alpha(x) = \bar{\alpha}(x) + a^x \sum_{s=0}^r c_s (x-h+s)^{-k-1}$$

pour les autres valeurs de k . Ici $\bar{\alpha}(x)$ est une branche uniforme de fonction analytique, régulière en tout point du demi-plan $\Re(x) > \Re(h) - r - 1$; les formules (9) et (9') sont donc valables en tout ce demi-plan et mettent en évidence les singularités de $\alpha(x)$ dans la bande comprise entre $\Re(x) = \Re(h)$ et $\Re(x) = \Re(h) - r - 1$. Les c_s ($s = 0, 1, \dots, r$) sont des nombres indépendants de x .

18. — Dans ce qui précède nous avons étudié une *correspondance fonctionnelle* qui fait dépendre de la fonction $\varphi(t)$, de la variable réelle t , la fonction analytique $\alpha(x)$ dont une branche uniforme est représentée par l'intégrale (1) pour toutes les valeurs de x comprises dans le demi-plan $\Re(x) > c$. Cette correspondance est univoque, d'après le théorème de M. LERCH (n. 8), puisque $\alpha(x)$ ne peut être identiquement nulle que si $\varphi(t)$ l'est aussi. Cette correspondance a été remarquée pour la première fois par LAPLACE⁽¹⁾, qui a appelé $\varphi(t)$ *fonction génératrice* de $\alpha(x)$, et celle-ci *fonction déterminante* de la première: nous adopterons ces dénominations.

Si l'on indique par $J\varphi$ la fonction déterminante de $\varphi(t)$, les propriétés formelles de l'opération fonctionnelle représentée par J sont les suivantes (indépendamment d'une expression analytique quelconque pour cette opération):

Cette opération est *distributive*, c'est-à-dire, φ et ψ étant deux fonctions de t et c étant une constante,

$$(a) \quad J(\varphi + \psi) = J\varphi + J\psi, \quad J(c\varphi) = cJ\varphi.$$

Soit Δ la différence finie

$$\Delta\alpha = \alpha(x+1) - \alpha(x);$$

soit Θ l'opération $\Delta + 1$, $\Theta^h = (\Delta + 1)^h$, c'est-à-dire

$$\Theta^h \alpha = \alpha(x+h),$$

enfin soit

$$\Delta_z \alpha = \alpha(x+1) - z\alpha(x).$$

⁽¹⁾ *Sur les suites*, Mémoire de l'Académie des Sciences, 1779; *Théorie analytique des probabilités*, Paris 1812. Voir aussi LACROIX, *Traité de Calcul différentiel et intégral*, t. III, Chap. IV, Paris 1819.

On a alors

$$(b) \quad J[\varphi(t) t] = \Theta\alpha, \quad J[\varphi(t) t^h] = \Theta^h\alpha;$$

$$(c) \quad J[\varphi(t) (t-1)] = \Delta\alpha,$$

$$(d) \quad J[\varphi(t) (t-z)] = \Delta_z\alpha,$$

d'où, si $c_0, c_1, c_2, \dots$ sont des constantes,

$$(e) \quad J\{\varphi(t) [c_0 + c_1(t-z) + c_2(t-z)^2 + \dots]\} = c_0\alpha + c_1\Delta_z\alpha + c_2\Delta_z^2\alpha + \dots$$

Si D est la dérivation

$$(f) \quad J[\varphi(t) \log t] = D\alpha$$

et par suite

$$(g) \quad J[\varphi(t) (c_0 + c_1 \log t + c_2 \log^2 t + \dots)] = c_0\alpha + c_1 D\alpha + c_2 D^2\alpha + \dots$$

Les applications formelles de ces relations, qui ont été données par LAPLACE dans les Ouvrages cités et par ABEL dans un Mémoire bien connu ⁽¹⁾, n'offrent plus actuellement un grand intérêt; mais ces mêmes formules peuvent donner lieu à d'autres applications plus intéressantes; telle est la transformation des équations linéaires différentielles en équations aux différences, dont s'est occupé M. MELLIN ⁽²⁾; tel est aussi le principe que l'on peut y trouver pour la sommation, suivant les idées de M. BOREL, de certaines séries divergentes.

Aux relations précédentes l'on peut en ajouter d'autres si l'on assujettit la fonction génératrice à certaines conditions. Si l'on suppose le point a , limite supérieure de l'intégration, tel que $\varphi(a) = 0$, les fonctions $\varphi(t)$ forment un ensemble linéaire pour lequel on a

$$(h) \quad J[\varphi'(t)] = -(x-1)\alpha(x-1);$$

et, si $\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(r-1)}(t)$ s'annulent pour $t = a$, les fonctions $\varphi(t)$ qui vérifient cette propriété forment un ensemble linéaire pour lequel

$$(i) \quad J[\varphi^{(r)}(t)] = (-1)^r (x-1)(x-2)\dots(x-r)\alpha(x-r).$$

⁽¹⁾ *Œuvres*, 2^e édit., t. II, Mém. XI.

⁽²⁾ *Act. Math.*, t. IX, 1886.

19. — Si la fonction génératrice a , pour $t = 0$, une valeur finie $\varphi(0)$, la fonction déterminante a en général (n. 16) pour $x = 0$ un pôle du premier ordre, avec le résidu $\varphi(0)$. La multiplication de $\varphi(t)$ par t déplace ce pôle; ainsi $\varphi(t)t^h$ admet le pôle pour $t = -h$. Ceci est une conséquence de la propriété (h). Au contraire, la multiplication de $\varphi(t)$ par une puissance de $\log t$ ne déplace pas la singularité de $\alpha(x)$, mais en change le caractère; ainsi le point singulier de $\varphi(t)t^h \log^{-k} t$ sera au point $x = -h$ au lieu de $x = 0$, et au lieu d'un pôle on aura une singularité de la forme $(x + h)^{k-1} \log(x + h)$; ceci est une conséquence de la propriété (f). Enfin, et ceci résulte encore de (h), la propriété de $\varphi(t)$ d'admettre la dérivée permet d'étendre le champ d'existence de la fonction analytique $\alpha(x)$. La limite du champ de convergence de l'intégrale (1) était marquée par la présence d'un point singulier de la fonction représentée par cette intégrale; la nature de la singularité est mise en évidence par suite de l'existence de la dérivée. De même, le champ d'existence de la fonction déterminante s'étend davantage et des nouvelles singularités de cette fonction, de plus en plus éloignées, sont mises en évidence lorsque l'on suppose encore que la fonction génératrice admette la dérivée seconde, la troisième, et ainsi de suite.

CHAPITRE II.

Inversion de l'intégrale $\int_0^a \varphi(t) t^{x-1} dt$.

20. — Indiquons par $\alpha(x)$ une branche uniforme de fonction analytique, régulière pour toutes les valeurs finies de x telles que l'on ait

$$\Re(x) > c,$$

c étant un nombre réel donné. Admettons en outre que l'on ait, dans le demi-plan $\Re(x) > c$,

$$(1) \quad \alpha(x) = a^x \left(\frac{h}{x - g} + \frac{\mu(x)}{(x - g)^{1+\varepsilon}} \right),$$

où a et ε sont des nombres réels et positifs, h est un nombre quelconque et g est tel que sa partie réelle soit plus petite que c ; enfin,

$\mu(x)$ soit une fonction qui, pour toutes les valeurs de x telles que $\Re(x) > c$, a sa valeur absolue plus petite qu'un nombre positif m .

Il est clair que s'il existe un nombre g , $\Re(g) > c$, tel que la fonction $\alpha(x)$ puisse, pour $\Re(x) > c$, se mettre sous la forme (1), il en sera de même pour tout autre nombre g' , sujet à la même condition $\Re(g') < c$: il suffit, en effet, de remarquer que

$$\frac{1}{x-g} = \frac{1}{x-g'} + \frac{g-g'}{(x-g)(x-g')},$$

pour voir que $\alpha(x)$ reprend la forme (1), sauf le changement de g en g' et de $\mu(x)$ en une fonction $\mu_1(x)$ ayant la même propriété.

21. — *Sous l'hypothèse (1), et k étant un nombre réel plus grand que c , l'intégrale*

$$(2) \quad \lambda(t) = \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \alpha(x) t^{-x} dx$$

est convergente pour toutes les valeurs de t comprises entre 0 et a , et est indépendante de k .

En effet, si l'on pose pour $\alpha(x)$ son expression (1), la seconde intégrale

$$\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \left(\frac{a}{t}\right)^x \frac{\mu(x) dx}{(x-g)^{1+\varepsilon}}$$

sera absolument convergente, puisque l'on a

$$\left| \left(\frac{a}{t}\right)^x \mu(x) \right| < m \left(\frac{a}{t}\right)^k;$$

quant à la première

$$\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \left(\frac{a}{t}\right)^x \frac{dx}{x-g},$$

sa valeur est bien connue et est égale à $2\pi i \left(\frac{a}{t}\right)^g$, puisque l'on a $a > t$. Celle-ci ne dépend donc pas de k . Il en est de même de l'in-

tégrale de

$$(3) \quad \left(\frac{a}{t}\right)^x \frac{\mu(x)}{(x-g)^{1+\varepsilon}}.$$

Pour le prouver, considérons dans le plan x le rectangle ayant pour sommet les points

$$p_1 = k' - ir, \quad p_2 = k' + ir, \quad p_3 = k + ir, \quad p_4 = k - ir, \quad (k' > k),$$

et prenons l'intégrale de la fonction (3) le long du contour de ce rectangle. En faisant $x = u + iv$, l'intégrale le long du côté $p_4 p_1$ est

$$\int_k^{k'} \left(\frac{a}{t}\right)^{u-ir} \frac{\mu(u-ir) du}{(u-g-ir)^{1+\varepsilon}};$$

or, la valeur absolue de la quantité sous le signe est ici plus petite que

$$\left(\frac{a}{t}\right)^{k'} \frac{m}{r^{1+\varepsilon}},$$

qui tend à zéro pour $r = \infty$. Il en est de même de l'intégrale prise le long du côté $p_3 p_2$. Puisque l'intégrale étendue à tout le périmètre est nulle d'après le théorème de CAUCHY, il en résulte, en passant à la limite pour $r = \infty$, que l'intégrale de (3) prise entre $k' - i\infty$ et $k' + i\infty$ ne diffère pas de celle prise entre $k - i\infty$ et $k + i\infty$. L'intégrale (2) est donc indépendante de k .

22. — Si l'on a un nombre quelconque de fonctions qui, dans le domaine commun $\Re(x) > c$, puissent être mises sous la forme

$$\alpha_r(x) = a_r^x \left(\frac{h_r}{x - g_r} + \frac{\mu_r(x)}{(x - g_r)^{1+\varepsilon_r}} \right) \quad (r = 1, 2, \dots, p),$$

où a_r , ε_r sont des constantes positives, les h_r sont des constantes quelconques et les g_r ont leur partie réelle plus petite que c , et $|\mu_r(x)| < m_r$, où m_r est fini dans tout le demi-plan $\Re(x) > c$, on démontre de même que si l'on pose

$$\alpha(x) = \sum_{r=1}^p \alpha_r(x),$$

l'intégrale

$$\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \alpha(x) t^{-x} dx \quad (k > c)$$

est convergente pour toute valeur de t comprise entre 0 et le plus petit des nombres a_r , et est indépendante de k . On peut donc dire que le théorème du n. 21 est applicable à toutes les fonctions d'un système linéaire construit avec les fonctions $\alpha_r(x)$. Aux divers nombres g_r qui figurent dans l'expression des $\alpha_r(x)$, on peut, d'après la remarque du n. 20, substituer un seul nombre g , pourvu que la partie réelle en soit plus petite que c . A l'ensemble des fonctions $\alpha_r(x)$ appartiennent, en particulier, toutes les fonctions analytique régulières dans un domaine de $x = \infty$.

23. — L'expression (2) définit une fonction $\lambda(t)$ de la variable réelle t , finie dans l'intervalle $\tau < t < a$, τ étant un nombre positif aussi petit qu'on voudra. Il est facile de s'assurer que la fonction $\lambda(t)$ est continue dans cet intervalle. En effet, $\lambda(t)$ se compose des deux intégrales

$$\lambda_1(t) = \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \left(\frac{a}{t}\right)^x \frac{dx}{x-g}, \quad \lambda_2(t) = \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \left(\frac{a}{t}\right)^x \frac{\mu(x) dx}{(x-g)^{1+\varepsilon}}.$$

La première est évidemment continue. Quant à la seconde, σ étant positif arbitraire, on peut déterminer r assez grand pour que l'on ait, pour toute valeur de $t > \tau$,

$$\left| \int_{k\pm i\infty}^{k\pm ir} \left(\frac{a}{t}\right)^x \frac{\mu(x) dx}{(x-g)^{1+\varepsilon}} \right| < \frac{\sigma}{8}.$$

La fonction $\lambda_2(t)$ se compose de la somme des intégrales prises entre $k-i\infty$ et $k-ir$, $k+ir$ et $k+i\infty$, $k-ir$ et $k+ir$; les deux premières, en valeur absolue, donnent moins que $\sigma/4$; quant à la dernière, que j'indiquerai par $\lambda_3(t)$, c'est une fonction continue de t . On peut donc déterminer un nombre δ tel que pour $t < \tau$, $t_1 < \tau$, $|t - t_1| < \delta$, on ait

$$|\lambda_3(t) - \lambda_3(t_1)| < \frac{\sigma}{2};$$

et, par suite,

$$|\lambda_2(t) - \lambda_2(t_1)| < \sigma.$$

La fonction $\lambda(t)$ est donc continue dans l'intervalle indiqué.

24. — On peut voir facilement qu'à moins d'hypothèses beaucoup plus particulières sur la façon dont la fonction $\alpha(x)$ se comporte à l'infini⁽¹⁾, l'intégrale (2), en général, n'a pas de sens pour des valeurs complexes de t . En effet, si l'on fait $t = \varrho e^{i\theta}$, le module de t^{-x} tend à l'infini d'ordre exponentiel quand la partie imaginaire de x tend à l'infini positif si θ est positif, et quand la partie imaginaire de x tend à l'infini négatif si θ est négatif.

25. — La fonction $\lambda(t)$ est continue de τ à a , si $\alpha(x)$ vérifie la condition (1); si l'on suppose, sous cette condition, que le nombre ε soit plus grand que 1, on peut aussi démontrer que $\lambda(t)$ admet, dans tout l'intervalle $\tau < t < a$, une dérivée finie. En effet, dans l'hypothèse $\varepsilon > 1$, l'intégrale

$$-\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{xt^{-x-1} \mu(x) dx}{(x-g)^{1+\varepsilon}}$$

est absolument convergente; elle représente donc, par un théorème connu⁽²⁾, la dérivée de

$$\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{t^{-x} \mu(x) dx}{(x-g)^{1+\varepsilon}}$$

par rapport à t ; d'où il suit que $\lambda(t)$ est dérivable dans l'intervalle $\tau < t < a$, τ étant positif et aussi petit qu'on voudra. De même, en supposant $\varepsilon > 2$, ou $\varepsilon > 3$, etc., la fonction $\lambda(t)$ admettra les deux premières dérivées, ou les trois premières, etc..

26. — Reprenons la fonction $\alpha(x)$ du n. 20, et appliquons la formule de CAUCHY à $a^{-x} \alpha(x)$ en intégrant le long du périmètre (p)

⁽¹⁾ Par exemple, les fonctions étudiées par M. MELLIN, *Acta Math.*, t. XXV, p. 156, et t. XXVIII, p. 37.

⁽²⁾ Voir, par exemple, GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. I, Paris 1902, (p. 415).

du rectangle

$$p_1 = k' - ir, \quad p_2 = k' + ir, \quad p_3 = k + ir, \quad p_4 = k - ir, \quad (k' > k > c),$$

z étant un point intérieur au rectangle. On aura

$$a^{-z} \alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(p)} \frac{a^{-x} \alpha(x) dx}{x - z}.$$

Mais $\frac{a^{-x} \alpha(x)}{x - z}$ est de la forme $\frac{\mu(x)}{(x - g)^2}$, où $|\mu(x)|$ reste inférieur à un nombre fini m_1 dans tout le demi-plan $\Re(x) > c$; on en déduit, comme au n. 21, que l'intégrale étendue aux côtés $p_4 p_1$ et $p_2 p_3$ du rectangle tend à zéro pour $r = \infty$. En outre, on voit facilement que l'intégrale étendue au côté $p_1 p_2$ est nulle aussi pour $r = \infty$; en effet, soit (g) le demi-cercle décrit sur $p_1 p_2$ comme diamètre du côté positif de l'axe réel; l'intégrale étendue au côté $p_1 p_2$ est égale à l'intégrale prise le long de (g) dans le sens positif; or, cette dernière est, en valeur absolue, plus petite que $\pi m_1 / r$ et tend, par conséquent, à zéro pour $r = \infty$. Il en résulte, pour $\Re(z) > k$, la formule

$$(4) \quad a^{-z} \alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{a^{-x} \alpha(x) dx}{x - z}.$$

Or on a, pour $\Re(z) > \Re(x)$,

$$\frac{a^{z-x}}{z - x} = \int_0^a t^{z-x-1} dt;$$

en substituant et en renversant l'ordre des intégrations, ce qui est permis, puisque les conditions de ce renversement⁽¹⁾ sont évidemment satisfaites, il vient

$$(5) \quad \alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^a t^{z-1} dt \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} t^{-x} \alpha(x) dx.$$

(1) Voir, par exemple, JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2^e éd., t. II, Paris 1894, (p. 72).

Cette formule résout le problème d'inversion de l'intégrale définie (2) sous la forme

$$(6) \quad \alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^a \lambda(t) t^{z-1} dt,$$

et réciproquement; le théorème de M. LERCH, cité plus haut, démontre que la solution (2) de l'équation (6), lorsqu'elle existe, est unique. Quant aux conditions d'existence données aux nn. 20 et 21 pour $\alpha(x)$, ce sont des conditions suffisantes assez larges. La formule (5) a été donnée pour la première fois, à ce que je crois, en 1859 par RIEMANN⁽¹⁾ qui l'a déduite de l'intégrale de FOURIER; KRONECKER⁽²⁾ est revenu sur cette même formule, qui a été souvent rappelée depuis et qui a reçu plusieurs applications, sans que l'on ait toutefois formulé avec précision, que je sache, des conditions suffisantes de valabilité.

Voici une application qui nous servira plus tard. Faisons

$$\alpha(x) = 1/x^{n+1};$$

pour avoir la fonction $\lambda(t)$ correspondante, il suffit de remarquer que

$$(a) \quad n!/x^{n+1} = (-1)^n \int_0^1 t^{x-1} \log^n t \, dt;$$

il vient alors

$$(b) \quad \frac{(-1)^n}{n!} \log^n t = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{t^{-x} dx}{x^{n+1}} \quad (k > 0),$$

qu'il est facile de vérifier directement.

27. — Au n. 18 nous avons considérée l'opération fonctionnelle J qui fait passer de la fonction génératrice à sa déterminante; les propriétés formelles de cette opération sont résumées dans les formules de (a) à (i) de ce numéro. Nous pouvons considérer de même

⁽¹⁾ *Werke*, p. 140 de l'édition de DEDEKIND et WEBER, Leipzig 1876.

⁽²⁾ E. NETTO, *Vorlesungen über Mathematik*, t. I, Leipzig 1894, (p. 221).

l'opération inverse de J , qui fait passer de la fonction déterminante à la génératrice; nous l'indiquerons par G , et l'intégrale (2) en donnera l'expression analytique. L'opération G est évidemment distributive, et on peut l'appliquer, sous la forme (2), à toutes les fonctions de l'ensemble du n. 22 et à leurs combinaisons linéaires.

Les propriétés de G , qu'on peut déduire de celle de J données au n. 18, mais qu'on peut aussi démontrer directement en partant de l'expression (2), sont résumées dans le tableau suivant:

- (a) $G(\alpha + \beta) = G(\alpha) + G(\beta), \quad G(c \alpha) = c G(\alpha),$
 (b) $G[\alpha(x + 1)] = t G\alpha, \quad G[\alpha(x + h)] = t^h G\alpha,$
 (c) $G A \alpha = (t - 1) G\alpha, \quad G A_z \alpha = (t - z) G\alpha,$
 (d) $G D \alpha = \log t G.\alpha, \quad G D^k \alpha = \log^k t . G\alpha,$
 (e) $G[(x - 1) \alpha(x - 1)] = - D G\alpha,$
 (e') $G[(x - 1) (x - 2) \dots (x - n) \alpha(x - n)] = (-1)^n D^n G\alpha.$

28. — On peut se demander si l'opération G , qu'on a définie pour les fonctions de l'ensemble du n. 22, peut s'étendre à un domaine fonctionnel plus vaste; en sorte qu'elle maintienne ses propriétés formelles, même s'il n'est plus possible d'en donner l'expression par l'intégrale (2). Le principe de HANKEL, ou principe de permanence des lois formelles, permet ici, comme en tant d'autres domaines des Mathématiques, de répondre affirmativement. Au moyen de ce principe nous allons étendre la définition de l'opération G à tout le domaine des fonctions $\alpha(x)$ telles qu'il existe un nombre entier m pour lequel $\alpha(x)/x^m$ appartient à l'ensemble du n. 22.

Supposons d'abord que $\alpha(x)$ appartienne à cet ensemble. En combinant les formules (e) et (b) du tableau du numéro précédent, on obtient

$$(7) \quad G[\alpha(x)] = - t D G[\alpha(x)/x];$$

et en appliquant m fois de suite cette formule, et en indiquant par tD^m l'itération répétée m fois de l'opération tD , on a

$$(8) \quad G[\alpha(x)] = (-1)^m \overline{tD}^m G[\alpha(x)/x^m].$$

Dans l'hypothèse que $\alpha(x)$ appartient à l'ensemble du n. 22, les deux membres de ces égalités (7) et (8) ont un sens, et elles représentent des énoncés de théorèmes.

Supposons, au contraire, que $\alpha(x)$ n'appartienne pas à l'ensemble indiqué. En ce cas : *Si $\alpha(x)/x^m$ y appartient, et si la fonction génératrice de $\alpha(x)/x^m$ admet la $m^{\text{ième}}$ dérivée, on prendra le second membre de (8) comme définition de la fonction génératrice $G[\alpha(x)]$ de $\alpha(x)$.*

Pour justifier cette définition, il faut ici, comme dans toute application du principe de HANKEL, montrer qu'en l'admettant, les autres propriétés formelles de l'opération G sont conservées. Il suffira de donner la démonstration pour la propriété (b), dont (c) et (d) sont des conséquences; il suffira aussi de supposer $m = 1$, puisque, en répétant le raisonnement, on arrive au cas de m quelconque. Or, par la définition qu'on vient de poser, la fonction génératrice de $\alpha(x+1)$ est donnée par

$$(9) \quad G[\alpha(x+1)] = -tDG[\alpha(x+1)/x].$$

Mais

$$G\left[\frac{\alpha(x+1)}{x}\right] = G\left[\frac{\alpha(x+1)}{x+1}\right] + G\left[\frac{\alpha(x+1)}{x(x+1)}\right];$$

dans le second membre, l'opération G est appliquée à des fonctions du domaine du n. 22 et, par suite, les formules du n. 27 sont valables. Mais, en posant

$$G\left[\frac{\alpha(x)}{x}\right] = \lambda(t),$$

on a [n. 27, (b)]

$$G\left[\frac{\alpha(x+1)}{x+1}\right] = t\lambda(t),$$

et [n. 27, (e)]

$$G\left[\frac{\alpha(x+1)}{x(x+1)}\right] = -D^{-1}\lambda(t);$$

on a donc

$$G[\alpha(x+1)/x] = t\lambda(t) - D^{-1}\lambda(t),$$

et, en substituant dans (9),

$$G[\alpha(x+1)] = -t^2 D\lambda(t) = tG(\alpha),$$

ce qui démontre que la propriété (b) du n. 27 est encore applicable à l'extension de l'opération G .

29. — D'une façon analogue, on peut donner l'extension de l'opération J (n. 18). A cette effet, on part de la propriété de J donnée [n. 18, (h)], sous la condition $\varphi(a) = 0$, par

$$JD(\varphi) = -(x-1) \Theta^{-1} J(\varphi).$$

Il en résulte

$$(10) \quad J(\varphi) = -x JD^{-1}[\varphi(t)/t],$$

si l'on détermine la constante d'intégration dans $D^{-1}[\varphi(t)/t]$ en sorte que cette fonction soit nulle pour $t = a$. La relation (10), qui exprime un théorème si l'intégrale

$$\int_0^a \varphi(t) t^{x-1} dt$$

est convergente, donnera la définition de $J(\varphi)$ lorsque l'intégrale n'est pas convergente, mais que le second membre de (10) a un sens.

La relation (10) n'est que l'égalité (7) invertie. On peut justifier l'extension de l'opération J , donnée par l'égalité (10), en montrant que les propriétés formelles de J sont conservées : et il suffit de le prouver pour la propriété (b) du n. 18, ce qui n'offre aucune difficulté.

CHAPITRE III.

Cas où $\varphi(t)$ est une fonction analytique.

30. — Jusqu'ici, nous avons considéré la fonction génératrice comme une fonction, réelle ou complexe, de la variable réelle t , donnée pour les valeurs positives de t comprises entre $t = 0$ et $t = a$. Dans ce Chapitre nous supposerons que cette fonction $\varphi(t)$ soit don-

née comme branche monodrome d'une fonction analytique, dont le domaine de valabilité comprend les points $t = 0$, $t = a$ et une ligne régulière qui joint ces deux points, et nous examinerons quelques-uns des cas les plus intéressants qui peuvent se présenter dans cette hypothèse.

Nous commencerons par le cas où la fonction $\varphi(t)$ est régulière au point $t = 0$. L'étoile principale de MITTAG-LEFFLER correspondant aux constantes

$$c_0 = \varphi(0), \quad c_1 = \varphi'(0), \quad 2! c_2 = \varphi''(0), \quad 3! c_3 = \varphi'''(0), \dots$$

est alors déterminée; indiquons-la par E . Nous supposerons, une fois pour toutes, qu'une coupure τ soit faite du point $t = 0$ à un point du contour de l'étoile, de façon à empêcher la variable de tourner autour du point $t = 0$.

Il n'est plus nécessaire de supposer a réel (voir les remarques du n. 9); nous supposerons que a soit un point quelconque de E , et nous indiquerons par

$$(1) \quad \alpha(x, a) = \int_0^a \varphi(t) t^{x-1} dt$$

l'intégrale prise le long d'une ligne analytique simple l dont tous les points appartiennent à E et qui joint $t = 0$ à $t = a$ sans traverser la coupure τ . Le choix de la ligne l est alors indifférent.

Les propositions du Chapitre I permettent immédiatement de conclure que :

L'expression (1) est une fonction analytique de x et de a , régulière pour toutes les valeurs de x telles que $\Re(x) > 0$ et pour toutes les valeurs de a intérieures à l'étoile E .

31. — Mais on voit facilement que $\alpha(x, a)$, comme fonction de x , existe dans un domaine plus étendu; précisément,

$\alpha(x, a)$ est une fonction méromorphe de x , ayant des pôles du premier ordre aux points $x = 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$; son résidu au point $x = -n$ est égal à c_n .

En effet, supposons d'abord que a soit intérieur au cercle (r) de convergence de la série

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

dont r soit le rayon. Dans ce cas, on peut intégrer terme à terme et l'on a

$$(2) \quad \alpha(x, a) = a^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n a^n}{x + n},$$

ce qui démontre l'énoncé.

Supposons ensuite que a ne soit pas intérieur au cercle (r). Qu'on prenne alors sur la ligne d'intégration l un point b tel que $|b| < r$; on aura

$$\alpha(x, a) = \int_0^b \varphi(t) t^{x-1} dt + \int_b^a \varphi(t) t^{x-1} dt.$$

La première intégrale est la fonction $\alpha(x, b)$; elle se trouve dans le cas précédent; quant à la seconde, c'est une fonction entière en x . La fonction $\alpha(x, a)$ est donc une fonction méromorphe comme l'indique l'énoncé.

32. — La formule (2) représente $\alpha(x, a)$ pour les valeurs de a telles que $|a| < r$. Mais on peut obtenir facilement, pour la fonction $\alpha(x, a)$, des expressions valables pour tout le plan x et pour toute l'étoile E du plan a .

On peut y arriver d'abord en prenant le développement de $\varphi(t)$ en une série de polynômes, formé au moyen des coefficients $c_0, c_1, c_2, \dots$, par la méthode de M. MITTAG-LEFFLER⁽¹⁾. Ce développement sera de la forme

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_0 h_{n,0} + c_1 h_{n,1} t + \dots + c_{p_n} h_{n,p_n} t^{p_n}),$$

où les $h_{n,\nu}$ sont des nombres fixes, et convergera uniformément à l'intérieur de l'étoile. En substituant dans (1), on pourra intégrer terme à terme, et l'on aura pour $\alpha(x, a)$ l'expression demandée

$$(3) \quad \alpha(x, a) = a^x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c_0 h_{n,0}}{x} + \frac{c_1 h_{n,1} a}{x+1} + \dots + \frac{c_{p_n} h_{n,p_n} a^{p_n}}{x+p_n} \right),$$

convergente pour toutes les valeurs de x , excepté les pôles, et pour

⁽¹⁾ Sur la représentation d'une branche uniforme de fonction monogène (Acta Math., t. XXIII à XXVI, 1899-1902).

toutes les valeurs de a intérieures à E . Les méthodes de M. MITTAG-LEFFLER permettent de former, de diverses façons, des expressions analogues, valables dans des étoiles E_s intérieures à E .

Une deuxième méthode, fondée sur le théorème classique de M. MITTAG-LEFFLER ⁽¹⁾ sur les fonctions méromorphes, permet de construire une expression tout à fait différente pour $\alpha(x, a)$. Si l'on pose

$$\frac{1}{x+n} = \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} + \frac{x^2}{n^3} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n^n (x+n)},$$

la fonction méromorphe

$$\frac{c_0}{x} + a^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n a^n x^n}{n^n (x+n)}$$

ne peut différer de $\alpha(x, a)$ pour toutes les valeurs de x et pour tout point a de l'étoile E , que par une fonction $\gamma(x, a)$ entière en x et régulière dans l'étoile. On a donc dans ces domaines

$$(4) \quad \alpha(x, a) = \frac{c_0}{x} + a^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n a^n x^n}{n^n (x+n)} + \gamma(x, a).$$

La comparaison des expressions (1) et (4) permet de déterminer sans difficulté la forme de la fonction $\gamma(x, a)$ ⁽²⁾.

33. — L'expression (2) a été démontrée pour $|a| < r$. Toutefois, elle vaut encore pour $|a| = r$, si la caractéristique du système $c_0, c_1, c_2, \dots$, c'est-à-dire la plus grande des limites ⁽³⁾ du rapport

$$\frac{\log |c_n| r^n}{\log n},$$

est plus petite que -1 . Mais, pourvu que cette caractéristique ait une valeur finie k , on peut facilement représenter $\alpha(x, a)$ par une série valable dans tout le plan et différente de celles qu'on a indi-

⁽¹⁾ Donné pour la première fois dans les « Stockholm Ofv., t. XXXIV, 1877 ».

⁽²⁾ Voir cette détermination dans ma Note: *Sopra alcune funzioni meromorfe* (Rendiconti delle R. Accademia dei Lincei, novembre 1903).

⁽³⁾ Suivant l'expression de CAUCHY. Voir à ce sujet: BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*, Paris 1902, (p. 10).

quées au numéro précédent. Rappelons, en effet, que si l'on applique à la série $\varphi(t)$ l'opération $t^{-m}D^{-m}$, où D^{-1} est l'intégration prise entre $t = 0$ et $t = a$, on aura

$$t^{-m}D^{-m}\varphi(t) = \varphi_m(t),$$

où $\varphi_m(t)$ est une série de puissances dont la caractéristique est $k - m$ ⁽¹⁾. Si donc m est le premier nombre entier supérieur à $k + 1$ ($k \geq 1$), la série $\varphi_m(t)$ sera absolument convergente même pour $|t| = r$. En intégrant par parties m fois de suite dans la formule (1), on obtient

$$\begin{aligned} \alpha(x, a) = & a^x [\varphi_1(a) - (x-1)\varphi_2(a) + (x-1)(x-2)\varphi_3(a) - \dots + \\ & + (-1)^m (x-1) \dots (x-m+1) \varphi_m(a)] + \\ & + (-1)^m (x-1) \dots (x-m) \int_0^a \varphi_m(t) t^{x-1} dt. \end{aligned}$$

Puisque a est intérieur à l'étoile, $\varphi_1(a), \varphi_2(a), \dots$ sont finis et déterminés; la série sous le signe est convergente même pour $t = a$, et par conséquent, par un théorème connu de HEINE, elle est uniformément convergente entre 0 et a . On peut donc intégrer terme à terme et l'on obtient ainsi

$$\begin{aligned} (5) \quad \alpha(x, a) = & a^x \varrho(x) + \\ & + (-1)^m a^x (x-1) \dots (x-m) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n a^n}{(n+1) \dots (n+m)(x+n)}, \end{aligned}$$

où $\varrho(x)$ est un polynome entier du degré $m - 1$.

On peut faire, sur cette formule (5), deux remarques intéressantes. D'abord, c'est la même formule à laquelle conduit l'application du théorème classique de MITTAG-LEFFLER, si l'on remarque que $\sum_n \left| \frac{c_n a^n}{n^n} \right|$ est convergente; l'intégration par parties conduit donc au résultat de M. MITTAG-LEFFLER, comme je l'ai déjà remarqué il

⁽¹⁾ Voir HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, Ch. V, Paris 1901.

y a longtemps ⁽¹⁾. Ensuite, la méthode employée ici ramène, au fond, à la définition de la fonction déterminante comme on l'a étendue au n. 29 au moyen de la formule (10) du Chapitre II.

34. — Jusqu'ici nous avons supposé l'extrémité supérieure de la ligne d'intégration située à l'intérieur de l'étoile E . Nous allons maintenant nous occuper du cas où ce point se trouve à la limite de l'étoile, et nous l'indiquerons par s . Il est évident qu'à présent le choix de la ligne d'intégration l n'est plus arbitraire, au moins dans le voisinage du point s ; nous supposons naturellement tous les points de l , sauf s , à l'intérieur de E , et nous supposons aussi fixée la direction suivant laquelle cette ligne l aboutit au point s .

a) Supposons d'abord que l'intégrale

$$(6) \quad \int_0^s \varphi(t) t^{x-1} dt$$

prise suivant la ligne ainsi fixée, ait un sens. Soit c un point de cette ligne entre 0 et s ; l'intégrale

$$\int_0^c \varphi(t) t^{x-1} dt$$

sera une des fonctions méromorphes étudiées aux numéros précédents; l'intégrale

$$\int_c^s \varphi(t) t^{x-1} dt$$

est une fonction entière, qu'on peut développer en série

$$\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} \int_c^s \varphi(t) \log^n t \cdot \frac{dt}{t};$$

la fonction déterminante $\alpha(x, a)$ tend donc vers une fonction limite déterminée lorsque a tend à s suivant la ligne l .

(1) Voir « Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, Vol. IV, 1888, p. 100 ».

b) Si l'intégrale (6) n'a pas de sens, on peut cependant, dans certains cas, obtenir quelque résultat sur la singularité de $\alpha(x, a)$ au point $a = s$. Supposons, par exemple, que pour $t = s$ en suivant la ligne l , $\varphi(t)(t - s)^k$ tende à une limite finie, k étant réel et positif. On a alors, pour m entier et plus grand que $k - 1$ [n. 18, formule (d)],

$$\Delta_a^m \alpha(x, a) = \int_0^a \varphi(t) (t - a)^m t^{x-1} dt;$$

ici, le second membre a une limite déterminée lorsque a tend à s en suivant la ligne l . La fonction $\alpha(x, a)$, pour $a = s$, est alors donnée comme l'intégrale finie d'ordre m d'une fonction connue, et l'on peut l'obtenir par les méthodes ordinaires de l'intégration finie.

c) Si, l'intégrale (6) n'ayant pas de sens, l'intégrale

$$\int_0^s \varphi_m(t) t^{x-1} dt$$

en a un, si $\varphi_m(t)$ est, comme au n. 33, la fonction $t^{-m} D^{-m} \varphi(t)$, on obtiendra, comme à ce même numéro,

$$\begin{aligned} (7) \quad & \lim_{a \rightarrow s} \{ \alpha(x, a) - a^x [\varphi_1(a) - (x-1) \varphi_2(a) + \dots + \\ & + (-1)^{m-1} (x-1) \dots (x-m+1) \varphi_m(a)] \} = \\ & = (-1)^m (x-1) \dots (x-m) \int_0^s \varphi_m(t) t^{x-1} dt. \end{aligned}$$

Prenons l'opération Δ_a^m sur les deux membres, en remarquant que

$$\Delta_a^m a^x \varrho(x) = 0$$

si $\varrho(x)$ est un polynome de degré $m-1$; on obtient, comme au cas précédent, la limite de $\Delta_a^m \alpha(x, a)$ égale, pour $a = s$, à une fonction connue, d'où l'on déduit $\alpha(x, s)$ au moyen de l'intégration finie.

35. — La fonction déterminante de $(1-t)^{-1}$, c'est-à-dire

$$(a) \quad \alpha(x, a) = \int_0^a \frac{t^{x-1} dt}{1-t},$$

nous donne un exemple élémentaire. C'est une fonction méromorphe de x pour toute valeur de a , excepté $a = 1$.

Pour $|a| < 1$, elle est représentée par la série

$$(b) \quad \alpha(x, a) = a^x \sum_0^{\infty} \frac{a^n}{x+n};$$

pour $|a| = 1$, sauf $a = 1$, elle est donnée par la série (1) où $m = 1$,

$$(c) \quad \alpha(x, a) = -a^{x-1} \left[\log(a-1) + a \cdot (x-1) \sum_0^{\infty} \frac{a^n}{(n+1)(x+n)} \right].$$

Pour $a = 1$ on peut appliquer la méthode du n. 34, c), et l'on obtient

$$(d) \quad \lim_{a \rightarrow 1} [\alpha(x, a) + \log(a-1)] = (1-x) \sum_0^{\infty} \frac{1}{(n+1)(x+n)};$$

la direction suivant laquelle a tend à 1 est ici indifférente. Tandis que $\alpha(x, a)$ a pour $a = 1$ une singularité logarithmique, $\Delta\alpha(x, a)$ tend, pour $a = 1$, à la valeur déterminée $1/x$; la formule (d) fournit donc une intégrale finie de $1/x$. En effet, la série du second membre ne diffère que par la constante de MASCHERONI de l'intégrale bien connue

$$\psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$$

de $1/x$, étudiée par GAUSS.

Enfin, pour $|a| > 1$ la série (4) du n. 32 sert à donner une représentation de $\alpha(x, a)$; mais on peut l'obtenir d'une façon plus simple, comme on verra au n. 37.

36. — Jusqu'ici s était un nombre fini. Supposons maintenant $s = \infty$.

a) Soit d'abord $\varphi(t)$ une fonction de la variable réelle t , finie et continue pour $\varepsilon < t < \varepsilon_1$, où $\varepsilon, \varepsilon_1$ sont deux nombres positifs arbitraires, et telle que l'intégrale

$$(8) \quad \int_0^{\infty} \varphi(t) t^{x-1} dt$$

soit convergente pour deux valeurs x_1 et x_2 de x , telles que $\Re(x_2)$

soit plus grand que $\Re(x_1)$. L'intégrale (8) peut se mettre sous la forme

$$(8') \quad \int_0^a \varphi(t) t^{x-1} dt + \int_0^{1/a} \varphi(1/t) t^{-x-1} dt,$$

où a est un nombre positif arbitraire; il en résulte, en appliquant le théorème fondamental des nn. 1 et 6, que l'intégrale (8) est uniformément convergente dans la bande

$$(9) \quad \Re(x_2) > \Re(x) > \Re(x_1),$$

les limites exclues, et qu'elle y représente une branche monodrome de fonction analytique.

b) Ici trouvent place des généralisations analogues à celles qu'on a énoncées au n. 9; nous n'insistons pas là-dessus.

c) Reprenons maintenant la fonction analytique $\varphi(t)$ du n. 30, et supposons qu'on puisse tracer une demi-droite d'argument θ de 0 à ∞ , dont tous les points à distance finie soient intérieurs à l'étoile E . L'intégrale (8) définira alors la fonction déterminante $\alpha(x, \infty e^{i\theta})$ dans la bande (9); mais, si l'on remarque que la première intégrale de (8') est la fonction $\alpha(x, a)$, méromorphe avec les pôles 0, -1 , $-2, \dots$, on en conclut que la fonction $\alpha(x, \infty e^{i\theta})$ est définie dans tout le demi-plan $\Re(x) < \Re(x_2)$, où elle admet des pôles du premier ordre dans les points d'indice nul ou entier négatif.

d) Il serait facile ici de multiplier des exemples où l'on déduirait les propriétés à l'infini de la fonction déterminante de celles de la fonction génératrice. Nous ne nous y arrêterons pas, et nous nous bornerons à indiquer un cas particulier: celui où, pour $|t| > r'$, on a

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n t^{\sigma-n}.$$

En faisant $|a| > r'$ dans la formule (8'), on peut intégrer terme à terme dans la seconde intégrale, qui donne

$$a^{x+\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c'_n a^{-n}}{n - \sigma - x}.$$

La fonction déterminante $\alpha(x, \infty e^{i\theta})$ est dans ce cas une fonction méromorphe ayant les pôles du premier ordre aux points

$$0, \quad -1, \quad -2, \quad -3, \quad \dots, \quad \text{et} \quad -\sigma, \quad 1-\sigma, \quad 2-\sigma, \quad \dots,$$

avec les résidus respectifs

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad \dots, \quad \text{et} \quad -c'_0, \quad -c'_1, \quad -c'_2, \quad \dots$$

37. — Reprenons l'exemple du n. 35, en supposant que l'on intègre le long d'une demi-droite qui va de 0 à l' ∞ avec un argument différent d'un multiple de 2π . Une application fort simple du théorème de CAUCHY et la formule bien connue

$$\int_0^{\infty} \frac{r^{x-1} dr}{1+r} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

permettent d'écrire la formule (8') sous la forme

$$\alpha(x, a) - \alpha\left(-x+1, \frac{1}{a}\right) = \pi i + \pi \cot(\pi x).$$

Cette relation permet de déduire de la série (b) du n. 35 l'expression de $\alpha(x, a)$ pour $|a| > 1$, valable pour toutes les valeurs de x , sans recourir à la méthode du n. 32; cette expression est

$$(e) \quad \alpha(x, a) = \pi i + \pi \cot(\pi x) - a^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}(n-x+1)}.$$

38. — Nous avons ainsi étudié (nn. 30-36) le cas où $t=0$ est un point régulier de la fonction génératrice $\varphi(t)$. On étend facilement les résultats obtenus au cas où $t=0$ est un point singulier de $\varphi(t)$, pour lequel $\varphi(t)$ admet, pour $|t| < r$, le développement

$$\varphi(t) = t^e \sum_0^{\infty} c_n t^n;$$

on démontre alors, d'abord pour $|a| < r$, puis comme aux nn. 32 et suivants pour toute l'étoile correspondante à $\varphi(t)t^{-e}$, que la fonction déterminante est une fonction méromorphe de x , dont les pôles sont du premier ordre, dans les points $x = -e - n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). On démontre la réciproque de ce théorème au moyen du théorème d'inversion donné au n. 26.

Si, pour $|t| < r$, la fonction génératrice admet le développement

$$\varphi(t) = t^e \log^k t \cdot \sum_0^{\infty} c_n t^n,$$

on trouve (voir n. 11) sans peine d'abord pour $|a| < r$, puis dans toute l'étoile correspondante à $\frac{\varphi(t)}{t^e \log^k t}$ et où l'on a fait la coupure τ (n. 30), que la fonction déterminante ne diffère que par une fonction entière additive d'une fonction de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n \log x}{(x + n + \varrho)^{k+1}}$$

si k est entier négatif, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(x + n + \varrho)^{k+1}}$$

pour toute autre valeur de k . Le théorème d'inversion permet aussi de démontrer la réciproque.

39. — La fonction génératrice $\varphi(t)$ étant encore régulière au point $t = 0$, soit a un point tel que $t = 0$ tombe à l'intérieur du cercle de convergence du développement de $\varphi(t)$ en série de puissances de $t - a$. Formons la fonction déterminante $\alpha(x, a)$ de $\varphi(t)$ en suivant le segment rectiligne entre 0 et a ; en notant que

$$\int_0^a (t - a)^n t^{x-1} dt = \frac{(-1)^n 1 \cdot 2 \dots n a^{x+n}}{x(x+1) \dots (x+n)},$$

qu'on vérifie facilement, par exemple en se servant de la formule (d) du n. 18, on obtient

$$(10) \quad \alpha(x, a) = a^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{(n)}(a) a^n}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

Puisque, par hypothèse, le rayon de la série de puissances de $t - a$ est supérieur à $|a|$, la série

$$\sum \frac{\varphi^{(n)}(a) a^n}{n!}$$

est absolument convergente. Il s'ensuit que le développement du second membre de (10), en excluant les points 0, -1 , -2 , ... par des aires aussi petites qu'on voudra, converge uniformément dans

toute portion finie du plan, et représente la fonction méromorphe du premier membre. On en conclut que :

Si $\varphi(t)$ est régulière dans un cercle de centre a et de rayon plus grand que $|a|$, sa fonction déterminante est représentée dans tout le plan par la série de factorielles (10)⁽¹⁾.

40. — Supposons maintenant que la fonction analytique $\varphi(t)$ ne soit plus régulière au point $t = 0$: si l'on précise convenablement la singularité de la fonction en ce point, il est encore possible d'avoir un développement de la forme (10) pour la fonction déterminante. Il suffit, pour cela, qu'il existe au moins un point a tel que $\varphi(t)$ soit régulière dans le cercle (a) de centre $t = a$ et de rayon $|a|$, et qu'elle soit d'ordre fini g ⁽²⁾ sur la circonférence de ce cercle. Nous exprimerons cette propriété en disant que $t = 0$ est un *point singulier d'ordre fini*. L'ordre g peut être égal à $-\infty$.

Il est clair d'abord que, s'il existe un point a doué de la propriété indiquée, il en existe une infinité. Ainsi, tout point b situé sur le rayon $0a$. Il résulte des propositions de M. HADAMARD, à l'endroit cité, que pour un tel point b la fonction $\varphi(t)$ est, sur la circonférence (b) de centre $t = b$ et de rayon $|b|$, d'un ordre fini g' égal ou inférieur à g . Ensuite, par le théorème sur la convergence des séries de factorielles⁽³⁾, il résulte que la série

$$\alpha^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{(n)}(a) a^n}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

est absolument et uniformément convergente pour $\Re(x) > g$, sauf les points d'indice nul et entier négatif, et représente dans ce domaine la fonction déterminante $\alpha(x, a)$ ⁽⁴⁾. Sous la condition que $t = 0$ soit

⁽¹⁾ Je crois avoir signalé le premier la double forme (2) et (10) d'une fonction méromorphe et la relation entre leurs coefficients (Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, novembre 1888; Jornal de Sciencias mathematicas astronomicas de M. GOMES TEIXEIRA, p. 129). M. N. NIELSEN a retrouvé cette relation et en a déduit des conséquences intéressantes dans son important Mémoire *Sur les séries de factorielles*, n. 12 (Ann. de l'École Normale, 3^e série, t. XIX, 1902).

⁽²⁾ Selon la définition de M. HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor* (J. de Math., 4^e série, t. III, 1892) et *La série de Taylor et son prolongement analytique*, Chap. V, Paris 1901.

⁽³⁾ Voir le Mémoire cité de M. NIELSEN et ma Note dans les « Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 16 février 1902 ».

⁽⁴⁾ Pour le développement de ce numéro voir ma Note dans les « Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 8 novembre 1903 ».

un point d'ordre fini ou $-\infty$, la fonction déterminante admet donc un développement en série de factorielles pour une infinité de valeurs de a . On sait d'ailleurs que ce développement est unique.

41. — La condition précédente est aussi nécessaire. Si, en effet, une série

$$(10') \quad a^x \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n \frac{1.2.3 \dots n}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

est convergente pour une valeur x_0 de x , elle est convergente uniformément et absolument pour $\Re(x) > \Re(x_0) + 1$, et la *caractéristique* k ⁽¹⁾ du système $c_n a^n$ est au plus égale à $\Re(x_0)$ ⁽²⁾. Construisons alors, au moyen du théorème d'inversion (n. 26), la fonction génératrice $\varphi(t)$ de la série précédente; ce sera une série de puissances de $t - a$ convergente dans le cercle (a) et, d'après la valeur de la caractéristique, il résulte des théorèmes de M. HADAMARD ⁽³⁾ que l'ordre de $\varphi(t)$ sera fini sur la circonférence de centre a et de rayon $|a|$. Le point $t = 0$ sera donc d'ordre fini.

42. — On peut donc conclure, de ce qui précède, que la *condition nécessaire et suffisante afin qu'une fonction $\alpha(x)$ soit développable en série de factorielles est que le point $t = 0$ soit un point d'ordre fini pour sa fonction génératrice* ⁽⁴⁾.

43. — Soit encore $\varphi(t)$ une fonction analytique dont nous considérons une branche uniforme et régulière dans une aire E ; supposons que le point $t = 0$ se trouve sur le contour de cette aire. Fixons un point intérieur à l'aire; pour simplifier, supposons que ce soit le point $t = 1$. La coupure τ (n. 30) est faite de 0 à l'infini le long de l'axe réel négatif.

Dans un domaine du point $t = 1$, la fonction $\varphi(t)$ admettra un développement en série de puissances de $t - 1$:

$$(11) \quad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n (t - 1)^n.$$

(1) Comme on l'a défini au n. 33 ci-dessus.

(2) Voir ma Note citée des «Rendiconti dei Lincei, 16 febbraio 1902».

(3) Loc. cit., par exemple, *La série de Taylor*, p. 15.

(4) Ce théorème a été donné, sous une forme moins simple, dans le Mémoire cité de M. NIELSEN. J'en ai modifié l'énoncé, sous la forme actuelle, dans ma Note des «Rendiconti dei Lincei, 8 novembre 1903».

Il sera toujours possible de transformer cette expression en une série ordonnée suivant les puissances de $\log t$ ⁽¹⁾: nous indiquerons cette série par

$$(12) \quad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\log^n t}{n!} \quad (2).$$

Si la série

$$\mathcal{P}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^n}{n!}$$

(1) Le plan t étant coupé suivant la ligne τ , le logarithme de t est parfaitement déterminé si l'on fixe que sa valeur soit nulle pour $t = 1$.

(2) La transformation des séries (11) et (12) l'une dans l'autre s'opère facilement comme il suit. Posons ($n = 1, 2, 3, \dots$):

$$(a) \quad x^n = q_{n,1}x + q_{n,2}x(x+1) + \dots + q_{n,n}x(x+1)\dots(x+n-1) \quad (q_{n,n} = 1),$$

$$(b) \quad x(x+1)\dots(x+n-1) = p_{n,1}x + p_{n,2}x^2 + \dots + p_{n,n}x^n \quad (p_{n,n} = 1).$$

Les coefficients $q_{n,i}$ s'obtiennent facilement de proche en proche en faisant

$$x = -1, -2, \dots, -n+1;$$

les coefficients $p_{n,i}$ sont connus sous le nom de *coefficients de factorielles*; SCHLÄFLI (Crelle, t. 43) et SCHLÖMILCH (Ibid., t. 44) en ont fait une étude détaillée. Si dans l'identité

$$t^{-x} = 1 + \sum_1 \frac{(-1)^n}{n!} x(x+1)\dots(x+n-1)(t-1)^n = 1 + \sum_1 (-1)^n \frac{x^n \log^n t}{n!}$$

on substitue pour x^n son expression (a), ou pour $x(x+1)\dots(x+n-1)$ l'expression (b), on obtient le développement de $(t-1)^n$ en fonction de $\log t$, ou celui de $\log^n t$ en série de puissances de $t-1$. Ce dernier développement s'obtient immédiatement sous la forme

$$(c) \quad \frac{\log^n t}{n!} = \frac{p_{n,n}}{n!} (t-1)^n - \frac{p_{n+1,n}}{(n+1)!} (t-1)^{n+1} + \frac{p_{n+2,n}}{(n+2)!} (t-1)^{n+2} - \dots$$

Si donc la fonction $\varphi(t)$ est donnée, dans un domaine du point $t=1$, par son développement en série de puissances de $\log t$ de la forme (12), les coefficients c_n seront liés aux coefficients k_n du développement de $\varphi(t)$ en série de puissances de $t-1$, par les relations

$$(d) \quad n! k_n = p_{n,n} c_n - p_{n,n-1} c_{n-1} + p_{n,n-2} c_{n-2} - \dots + (-1)^n p_{n,1} c_1, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

admet r comme rayon de convergence, le champ de convergence de la série (12) est limité par la courbe $|\log t| = r$, dont il est facile de reconnaître la forme : cette courbe renferme une aire simplement connexe pour $r < \pi$, doublement connexe pour $r \geq \pi$; le point $t = 1$ étant toujours intérieur à l'aire. Pour $r = \infty$ l'aire de convergence de (12) est formée par tout le plan t , sauf la coupure τ .

44. — Supposons d'abord que $\mathcal{P}(z)$ soit une fonction entière; soit en outre, m et ϱ étant deux nombres positifs,

$$(13) \quad |c_n| < m \varrho^n.$$

La fonction génératrice $\varphi(t)$ est alors dans tout le plan t , sauf la coupure, une branche uniforme et régulière de fonction analytique, définie par la série (12); en outre son ordre, comme on l'a défini au n. 2, est au plus égal à ϱ ; c'est-à-dire l'intégrale

$$(8) \quad \alpha(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt$$

est certainement convergente pour $\Re(x) > \varrho$; en effet, il suit de (13) que l'on a $|\varphi(t)| < mt^{-\varepsilon}$ pour les valeurs de t comprises entre 0 et 1.

Cela posé, substituons dans (8) à $\varphi(t)$ son développement (12); puisque la série qu'on obtient en intégrant terme à terme de ε à 1 est convergente, et tend pour $\varepsilon = 0$ à celle, également convergente, qu'on en déduit en faisant $\varepsilon = 0$, il résulte d'un théorème connu⁽¹⁾ que l'intégration terme à terme est valable entre 0 et 1; on a ainsi, pour $\Re(x) > \varrho$,

$$(14) \quad \alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n}{x^{n+1}};$$

la fonction déterminante (8) est ainsi définie non seulement pour $\Re(x) > \varrho$, mais pour tout le domaine $|x| \geq \varrho$ de $x = \infty$. Il résulte immédiatement de ce qui précède que, si ϱ_1 est le rayon de convergence de la série (14) et c est l'ordre de $\varphi(t)$, on a $c \leq \varrho_1$.

(1) Voir, par exemple, DINI, *Calcolo integrale (lezioni litogr.)*, Pisa 1878, (p. 90).

45. — La théorie des séries de puissances sommables, que M. BOREL a introduite dans l'Analyse ⁽¹⁾, se présente ici de la façon la plus spontanée; de sorte qu'on peut la regarder comme un annexe naturel de la théorie des fonctions génératrices. Notre série (14) est divergente pour $|x| < \varrho_1$, mais dans le segment de cercle défini par

$$(15) \quad \Re(x) > c, \quad |x| < \varrho_1,$$

elle est *sommable*, et l'expression (8) de la fonction $\alpha(x)$ en est la *somme généralisée*.

Il est aisé de voir que l'ordre c de $\varphi(t)$ est déterminé par celui des points singuliers de la fonction $\alpha(x)$ dont la partie réelle est la plus grande. En effet, soit s ce point; pour $k > \Re(s)$ l'intégrale

$$\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \alpha(x) t^{-x} dx$$

se trouve dans les conditions du n. 20; puisqu'elle est indépendante de k , on peut supposer $k > \varrho_1$ et par conséquent substituer à $\alpha(x)$ son développement (14) et intégrer terme à terme. On retrouve [n. 26, formule (b)] la fonction $\varphi(t)$, et d'après le théorème d'inversion (n. 26) son ordre ne peut être que $\Re(s)$ ⁽²⁾.

Il suffit maintenant du changement de variable $x = x'e^{i\theta}$ pour déduire du segment (15), où la série (14) est sommable, d'autres segments analogues, et pour obtenir, de leur ensemble, le polygone de sommabilité tel que l'a défini M. BOREL ⁽³⁾.

46. — A toute fonction analytique $\alpha(x)$ régulière dans un domaine $|x| > \varrho$ de $x = \infty$, on peut appliquer le théorème du n. 26; une telle fonction $\alpha(x)$ est donc fonction déterminante d'une génératrice $\varphi(t)$ ayant une branche uniforme et régulière dans tout le plan t , sauf la coupure, et représentée par une série (12) dont les coefficients vérifient la condition (13).

⁽¹⁾ *Mémoire sur les séries divergentes* (Annales de l'École Normale, s. III, t. XVI, 1899). *Leçons sur les séries divergentes*, Paris 1901, Ch. III et IV. Notre notation se reconduit à celle de M. BOREL par un changement de variable immédiat.

⁽²⁾ Voir ma Note: *Sui limiti della convergenza di alcune espressioni analitiche* (Rendiconti dell'Accad. di Bologna, décembre 1903).

⁽³⁾ *Leçons sur les séries divergentes*, p. 122 et suiv..

47. — Sous la condition du n. 44, l'ordre de la série (11) au point $t = 0$, au sens de M. HADAMARD (n. 40), est fini. En effet, le coefficient k_n de cette série est lié aux coefficients de (12) par la relation (d) de la note à la page 248; il en résulte, par l'inégalité (13) et puisque les nombres $p_{n,i}$ sont positifs,

$$|k_n| < \frac{m}{n!} (p_{n,n} \varrho^n + p_{n,n-1} \varrho^{n-1} + \dots + p_{n,1} \varrho),$$

c'est-à-dire

$$|k_n| < m \frac{\varrho(\varrho + 1) \dots (\varrho + n - 1)}{n!}.$$

Dans ce sens, comme dans celui du n. 2, l'ordre est donc au plus égal à ϱ . Il en résulte que, pour $\Re(x) > \varrho$, on peut substituer dans (8) à $\varphi(t)$ son développement (11) et intégrer terme à terme; on obtient ainsi (n. 39) pour $\alpha(x)$ le développement en séries de factorielles

$$(16) \quad \alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k_n n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

convergent au moins pour $\Re(x) > \varrho$. Toute fonction analytique régulière dans un domaine de $x = \infty$ est donc développable en séries de factorielles ⁽¹⁾. En outre, on voit que la transformation formelle de la série (14) en la série (16) ne diffère pas de celle de la série (12) en (11); on peut dire que l'une de ces opérations est la transformée de l'autre par l'opération G ⁽²⁾. Le passage de (14) à (16) est indiqué par MM. JENSEN et NIELSEN sous le nom de *méthode de Stirling* ⁽³⁾.

48. — Passons maintenant au cas où la série $\mathcal{P}(z)$ ne vérifie plus les conditions du n. 44; supposons simplement que cette série converge dans un domaine de $z = 0$, en sorte que $\varphi(t)$ est régulière dans un domaine de $t = 1$. Admettons cependant que cette fonction ait un prolongement sur le segment $1 \dots 0$, jusqu'au point $t = 0$, et que son ordre (n. 2) au point $t = 0$ ait une valeur finie c . En ce cas, l'intégrale (8) représente une fonction analytique régulière pour

(1) Ce théorème a été donné par M. FROBENIUS (Journal de Crelle, t. 73, 1871).

(2) Si le passage de (12) à (11) s'indique par P , et celui de (14) à (16) par Q , on a $Q = G^{-1} P G$.

(3) Voir l'intéressant Mémoire déjà cité de M. NIELSEN, où l'on trouvera aussi des renseignements bibliographiques.

$\Re(x) > c$; les théorèmes du Chapitre I permettent de déduire certaines de ses propriétés de celles, supposées connues, de la fonction génératrice. L'intégration terme à terme appliquée formellement en substituant à $\varphi(t)$ son développement (12), donne une série (14) divergente pour toute valeur finie de x ; mais cette série est sommable pour $\Re(x) > c$, et l'intégrale (8) en donne la somme généralisée ⁽¹⁾.

La méthode de STIRLING (n. 47) appliquée à la série divergente (14) peut donner lieu à une série de factorielles (16) convergente ⁽²⁾ et qui, pour $\Re(x) > c$, représente la somme généralisée de (14). Pour qu'il en soit ainsi, *il faut et il suffit, d'après le n. 42, que la série (11) converge dans le cercle de rayon 1 et que le point $t = 0$ soit un point singulier essentiel d'ordre fini*. On peut remarquer en outre que *si la méthode de Stirling appliquée à une série de puissances de $1/x$ toujours divergente, donne lieu à une série de factorielles ayant un demi-plan de convergence, la série de puissances est sommable dans ce demi-plan*.

CHAPITRE IV.

La fonction coefficiente.

49. — Reprenons une branche uniforme $\varphi(t)$ de fonction analytique régulière au point $t = 0$, et soit, comme au n. 30, E son étoile principale. A cette fonction correspond la fonction déterminante $J\varphi = \alpha(x, a)$ définie pour tout point a de l'étoile dans laquelle on a fait la coupure τ , et méromorphe par rapport à x (nn. 30, 31), avec les pôles $0, 1, 2, \dots$. La fonction $\omega(x, a)$, définie par

$$(1) \quad 2\pi i \omega(x, a) = (e^{2\pi i a} - 1) \alpha(x, a)$$

est donc entière. Cette fonction se présente de la façon suivante : faisons dans le plan t la coupure τ suivant le rayon $0a$; puis décrivons un cercle (ε) de centre $t = 0$ et de rayon ε aussi petit qu'on voudra, et soit e le point d'intersection de $0a$ avec la circonférence; considérons ensuite la ligne (l) formée :

⁽¹⁾ Voir le Chap. III, § III du Mémoire cité de M. BOREL sur les séries divergentes.

⁽²⁾ Voir le § 16 du Mémoire cité de M. NIELSEN.

- a) du segment ae , parcouru sur le bord supérieur de la coupure;
 b) de la circonférence (ε) parcourue dans le sens positif;
 c) du segment ea parcouru sur le bord inférieur de la coupure;
 d) d'une ligne (a) qui part de a sur le bord inférieur de la coupure et y revient sur le bord supérieur, après un tour autour de (ε) , et toute intérieure à E .

Il est clair que

$$(2) \quad \int_{(l)} \varphi(t) t^{x-1} dt = 0.$$

Mais pour $\Re(x) > 0$ et pour ε tendant à zéro, l'intégrale prise le long de (ε) a zéro pour limite; on a donc, en décomposant l'intégrale (2) dans ses diverses parties,

$$\int_{(a)} \varphi(t) t^{x-1} dt = (e^{2\pi i x} - 1) \int_0^a \varphi(t) t^{x-1} dt.$$

Le premier membre de cette égalité est une fonction entière en x , le second membre a un sens pour $\Re(x) > 0$; mais comme il définit une fonction méromorphe, cette égalité s'étend à tout le plan, et la fonction $\omega(x, a)$ est par conséquent définie aussi par

$$(3) \quad \omega(x, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(a)} \varphi(t) t^{x-1} dt.$$

50. — La formule (3) nous donne un résultat indépendant de la ligne (a) : elle définit donc une fonction entière de x , déterminée pour tout point a de l'étoile E . Cette fonction entière jouit des propriétés suivantes :

- a) Elle s'annule pour $x = 1, 2, 3, \dots$.
 b) Elle prend, pour $x = 0, -1, -2, \dots$, les valeurs $\varphi(0), \varphi'(0), \frac{\varphi''(0)}{1 \cdot 2}, \dots$.
 c) On a

$$\omega(x, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!},$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(a)} \varphi(t) \log^n t \cdot \frac{dt}{t};$$

il en résulte l'existence de deux nombres positif m , ϱ , tels que

$$|a_n| < m\varrho^n;$$

par conséquent, pour la fonction $\omega(x, a)$ la quantité qu'on indique par $M(r)$ dans la théorie des fonctions entières satisfait à

$$(4) \quad M(r) < me^{er};$$

la fonction ω est donc de l'ordre (apparent) 1 ⁽¹⁾.

51. — Nous appellerons $\varphi(t)$ *fonction génératrice* de $\omega(x, a)$, comme de $\alpha(x, a)$; et nous donnerons à $\omega(x, a)$ le nom de *fonction coefficiente* de $\varphi(t)$, à cause de la propriété b) du numéro précédent. En indiquant par $J_1\varphi$ l'opération fonctionnelle, évidemment distributive, qui appliquée à $\varphi(t)$ donne comme résultat $\omega(x, a)$, cette opération jouit des mêmes propriétés qu'on a trouvées au n. 18 pour $J\varphi$. Ainsi on pourra écrire

$$(a) \quad J_1[\varphi(t) t] = \Theta J_1\varphi,$$

$$(b) \quad J_1[\varphi(t) (t - z)^n] = A_z^n J_1\varphi$$

et, si $\varphi(a) = 0$,

$$(c) \quad J_1[\varphi'(t)] = -(x - 1) \Theta^{-1} J_1\varphi.$$

52. — On peut se demander si $\omega(x, \infty)$ a un sens. Voici d'abord un cas particulier intéressant où il en est ainsi. Supposons que $\varphi(t)$ soit une branche uniforme de fonction analytique, régulière non seulement pour $t = 0$, mais encore pour $t = \infty$ et nulle en ce point. Les singularités de $\varphi(t)$ sont alors toutes comprises dans une aire A qu'on peut renfermer dans un contour (c) de longueur finie, qui laisse le point $t = 0$ à l'extérieur. Considérons alors une ligne (l) renfermant A et formée :

a) D'une circonférence (r) de centre $t = 0$ et de rayon r aussi grand qu'on voudra, parcourue dans le sens positif;

b) D'une circonférence (ε) de centre $t = 0$ et de rayon ε aussi petit qu'on voudra, parcourue dans le sens négatif;

(1) Voir BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, Paris 1900, (p. 74).

c) Du bord inférieur d'une coupure (rectiligne ou non) qui ne traverse pas l'aire A et qui joint un point de la circonférence (r) à un point de la circonférence (ε) , parcouru de (r) à (ε) ;

d) Du bord supérieur de la même coupure, parcouru de (ε) à (r) .

En remarquant que pour $0 < \Re(x) < 1$, les intégrales de $\varphi(t) t^{x-1}$, prises le long des circonférences (ε) et (r) , ont pour limite zéro pour $\varepsilon = 0$ et $r = \infty$, on aura

$$(5) \quad \int_{(c)} \varphi(t) t^{x-1} dt = (e^{2\pi i x} - 1) \int_0^\infty \varphi(t) t^{x-1} dt.$$

On a ainsi défini la fonction $\omega(x, \infty)$; c'est une fonction entière,

$$(6) \quad \omega(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \varphi(t) t^{x-1} dt,$$

que nous appellerons encore *fonction coefficiente* de la fonction génératrice $\varphi(t)$; elle jouit des propriétés suivantes :

a) Elle ne dépend pas de la ligne (c) , pourvu que cette ligne renferme l'aire A et laisse $t = 0$ à l'extérieur.

b) Son ordre (apparent) est égal à 1.

c) Elle donne pour $x = n$, entier positif, le coefficient de t^{-n} dans le développement de $\varphi(t)$ en série de puissances entières négatives de t , et pour $x = -n$, entier négatif, le coefficient de t^n dans le développement de $\varphi(t)$ en série de puissances entières positives de t .

d) L'opération fonctionnelle $J_2\varphi$ qui appliquée à $\varphi(t)$ donne sa fonction coefficiente $\omega(x, \infty)$, admet toutes les propriétés de (a) à (g) de l'opération J (n. 18), et en plus, sans restrictions, la propriété (h).

53. — Si la ligne (c) peut se réduire à un cercle, dont c soit le centre et $r < |c|$ le rayon, sur toute la circonférence (c) on aura :

$$t^{x-1} = c^{x-1} \left[1 + (x-1) \frac{t-c}{c} + \binom{x-1}{2} \frac{(t-c)^2}{c^2} + \dots \right],$$

et, par suite, en substituant dans (6),

$$(7) \quad \omega(x) = c^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{c^{n+1}} \binom{x-1}{n},$$

où l'on a posé

$$g_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \varphi(t) (t - c)^n dt.$$

Le développement (7) est convergent dans tout le plan, et par suite la fonction $\omega(x)$ est représentée par une série de factorielles $\binom{x-1}{n}$ pour toute valeur de x .

Les coefficients g_n de cette série, si l'on pose, dans le domaine de $t = \infty$,

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{t^{n+1}},$$

sont liés à $k_0, k_1, \dots, k_n, \dots$ par les relations

$$(8) \quad g_n = k_n - nck_{n-1} + \binom{n}{2} c^2 k_{n-2} - \dots + (-1)^n c^n k_0 = \Delta_c^n k_0,$$

d'où, inversement,

$$(9) \quad k_n = g_n + ncg_{n-1} + \binom{n}{2} c^2 g_{n-2} + \dots + c^n g_0.$$

Ces relations sont précisément celles qui déterminent les coefficients g_n du développement de $\omega(x)$ en série de factorielles $\binom{x-1}{n}$, lorsqu'on connaît les valeurs $k_0, k_1, \dots$ de $\omega(x)$ pour $x = 1, 2, \dots$, d'après la formule d'interpolation de NEWTON étendue à l'infini ⁽¹⁾.

54. — On peut maintenant chercher si des développements de la forme (7) se présentent dans des cas plus généraux que celui que nous venons de traiter. La réponse est non seulement affirmative, mais il est facile de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour le développement d'une fonction en une série de cette forme.

Soit $\varphi(t)$ une branche uniforme de fonction analytique régulière et nulle pour $t = \infty$, et supposons que l'on puisse renfermer tous ses points singuliers dans un cercle (a) de centre a et de rayon $|a|$. Le point $t = 0$ sera singulier pour $\varphi(t)$, sans quoi il serait facile

(1) Voir BENDIXSON, Acta Math., t. IX, p. 1.

de reconduire la question au cas du numéro précédent; on peut aussi supposer sans restriction que $t = 0$ soit le seul point singulier de $\varphi(t)$ sur la circonférence (a) : il suffit pour cela d'un déplacement du point a . Supposons enfin que l'ordre g du point $t = 0$ au sens de M. HADAMARD (voir n. 40) soit fini, ou infini négatif.

Soit d'abord $g < 0$. Du développement

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{t^{n+1}}$$

de $\varphi(t)$ dans le domaine de $t = \infty$ on déduit

$$(10) \quad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{(t-a)^{n+1}};$$

les coefficients g_n et k_n étant liés par les relations (8) et (9).

Mais, par l'hypothèse $g < 0$, la série (10) est absolument convergente sur la circonférence (a) ; l'intégrale

$$(11) \quad \sigma(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(a)} \varphi(t) t^{x-1} dt$$

a donc un sens pour $\Re(x) > 0$, et puisque l'on a sur la circonférence (a) , et pour $\Re(x) > 1$, que le développement du binôme

$$t^{x-1} = a^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x-1}{n} \frac{(t-a)^n}{a^{n+1}}$$

est absolument convergent, et uniformément par rapport à t , on peut substituer dans (11) et intégrer terme à terme. Il vient ainsi

$$(12) \quad \sigma(x) = a^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{a^{n+1}} \binom{x-1}{n}.$$

Ce développement, d'après les propriétés connues des séries de factorielles, est absolument convergent pour $\Re(x) > g$.

55. — Examinons de plus près le résultat que nous venons d'obtenir. Étant donnée la fonction $\varphi(t)$ régulière hors de la circonférence (a) sur laquelle le point $t = 0$ est singulier d'ordre g négatif, il existe une fonction $\sigma(x)$, représentée par l'intégrale (11) pour

$\mathfrak{A}(x) > 0$, mais régulière dans tout le champ $\mathfrak{A}(x) > g$ et développable, dans ce champ, en série de factorielles $\left(x \atop n\right)$; l'opération $J_3\varphi$, qui appliquée à φ donne $\sigma(x)$, jouit des propriétés données au n. 18 pour l'opération J ; enfin les valeurs de $\sigma(x)$ pour $x = 1, 2, 3, \dots$ sont les coefficients $k_0, k_1, k_2, \dots$ du développement de $\varphi(t)$ en série de puissances négatives de t . Ces propriétés montrent la parfaite analogie entre $\sigma(x)$ et la fonction $\omega(x)$ du n. 53: on peut donc conserver à $\sigma(x)$ le nom de *fonction coefficiente*.

Cela posé, supposons maintenant $g \geq 0$: alors, même si l'intégrale (11) n'a plus de sens, on peut encore définir une fonction $J_3\varphi = \sigma(x)$ qui conserve les propriétés précédentes. Soit, pour fixer les idées, $0 \leq g < 1$. La fonction

$$(13) \quad -D^{-1} \frac{\varphi(t)}{t-a} = \varphi_1(t),$$

où l'on suppose nulle la constante d'intégration, est d'ordre négatif $g-1$; elle admet donc, par le cas précédent, la fonction coefficiente $J_3\varphi_1 = \sigma_1(x)$, qui, pour $\mathfrak{A}(x) > g-1$, admet le développement

$$\sigma_1(x) = a^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{(n+1)a^{n+1}} \left(x-1 \atop n\right).$$

Or, des propriétés formelles de J_3 et de la relation (13) entre φ et φ_1 , il résulte

$$(14) \quad J_3\varphi = x\sigma_1(x) - a \cdot (x-1)\sigma_1(x-1).$$

En vertu du principe de permanence, ce sera là la définition de $J_3\varphi = \sigma$, et il en résulte pour cette fonction précisément le développement (12), comme le montre le calcul facile du second membre de (14); ce développement est convergent pour $\mathfrak{A}(x) > g$. La fonction $\varphi(t)$ admet donc une fonction coefficiente avec toutes les propriétés du cas précédent.

De même, si $1 \leq g < 2$, on formera l'expression (13) qui aura la caractéristique comprise entre 0 et 1, et l'on tirera la même conclusion; et ainsi de suite. Notre conclusion est donc générale: *Toute fonction $\varphi(t)$, régulière hors d'une circonférence de centre a et de rayon $|a|$ sur laquelle $t=0$ est point singulier d'ordre fini ou infini négatif g , admet une fonction coefficiente régulière dans un demi-*

plan $\Re(x) > g$ et développable dans ce demi-plan en séries de factorielles $\binom{x-1}{n}^{(1)}$.

56. — Réciproquement, soit une série de factorielles :

$$\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x-1}{n},$$

convergente pour une valeur $x = h$; on sait qu'elle sera alors convergente absolument pour toutes les valeurs de x dont la partie réelle est plus grand que $\Re(h) + 1$. La caractéristique k des nombres $c_0, c_1, c_2, \dots$ est alors finie et au plus égale à $\Re(h)$. Formons maintenant

$$\sigma(n) = c_0 + (n-1)c_1 + \binom{n-1}{2}c_2 + \dots + c_{n-1}$$

[si le nombre k est compris entre les entiers $m-1$ et $m^{(2)}$, les valeurs $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(m)$ étant arbitraires à cause de l'existence des développements du zéro]; et construisons la fonction génératrice de $\sigma(x)$:

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{t^n}.$$

Puisque, d'après les relations (8) et (9), le développement de $\varphi(t)$ en série de puissances de $(t-1)^{-1}$ est

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(t-1)^{n+1}},$$

il résulte des propriétés des c_n que les singularités de $\varphi(t)$ sont toutes comprises à l'intérieur du cercle de centre $t=1$ et de rayon 1, et que sur la circonférence, et en particulier au point $t=0$, son ordre est fini. Nous avons ainsi obtenu le théorème :

(1) On sait d'ailleurs (voir, par exemple, FROBENIUS, Crelle, t. 73, ou ma Note des « Rend. dell'Accad. dei Lincei, 18 maggio 1903, n. 3 ») que ce développement n'est pas unique, car on a des développements du zéro convergents pour $\Re(x) > 1$, $\Re(x) > 2$, etc..

(2) Précisément, $m-1 \leq k < m$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction, donnée pour $\Re(x) > g$, soit développable en une série de factorielles $\binom{x-1}{n}$, est qu'elle soit la fonction coefficiente d'une branche de fonction analytique dont toutes les singularités peuvent être renfermées dans un cercle qui laisse le point $t=0$ à l'extérieur ou sur la circonférence, pourvu que, dans ce dernier cas, l'ordre du point $t=0$ ne soit pas égal à $+\infty$.

57. — Supposons que la fonction $\varphi(t)$ soit singulière seulement en un point a . La fonction coefficiente $\omega(x)$ est donnée par l'intégrale (6), où le chemin (c) d'intégration est maintenant un cercle de centre a et de rayon aussi petit que l'on veut.

En posant $t = a + \varrho e^{i\theta}$, il vient

$$\omega(x) = a^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n x^n}{n!},$$

avec

$$q_n = \frac{\varrho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a + \varrho e^{i\theta}) \log^n \left(1 + \frac{\varrho}{a} e^{i\theta} \right) \cdot \frac{d\theta}{1 + (\varrho/a) e^{i\theta}}.$$

Ici, comme on le voit facilement, on peut prendre ϱ fini, mais assez petit pour que l'on ait

$$|q_n| < m\varepsilon^n,$$

m étant un nombre positif fini et ε positif et aussi petit que l'on veut. On aura donc

$$\omega(x) = a^x G(x),$$

où $G(x)$ est une fonction entière telle que

$$(15) \quad M(r) < e^{\varepsilon r},$$

ε étant aussi petit que l'on veut. Ainsi, toute fonction $\varphi(t)$ ayant le seul point singulier $t = a$, a sa fonction coefficiente de la forme $a^x G(x)$, où $G(x)$ est une fonction entière ayant la propriété (15).

De même, toute fonction uniforme $\varphi(t)$ ayant les seuls points singuliers essentiels $t = a_1, a_2, \dots, a_p$ a sa fonction coefficiente de la forme

$$\sum_{i=1}^p a_i^x G_i(x),$$

où les fonctions entières $G_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, p$) vérifient la propriété (15) ⁽¹⁾.

58. — Revenons à la relation (1) entre la fonction coefficiente et la fonction déterminante. Si l'on rappelle l'expression (2) du n. 21 de la fonction génératrice par sa déterminante, on y reconnaît formellement que si l'on forme la différence des valeurs de la fonction génératrice lorsque la variable a tourné dans le sens positif autour de l'origine, la fonction déterminante est multipliée par $e^{2\pi i x} - 1$. Ce n'est là cependant qu'une prévision : mais il est facile d'en tirer des théorèmes rigoureux.

Soit, comme au n. 49, la fonction génératrice $\varphi(t)$ régulière pour $t = 0$; les valeurs de sa fonction coefficiente $\omega(x, a)$ pour $x = 0, -1, -2, -3, \dots$ nous donnent les coefficients du développement de $\varphi(t)$ en série de puissances entières et positives de t . Supposons maintenant que $\omega(x, a)$ soit fonction déterminante d'une certaine fonction $\psi(u)$, en sorte que l'on puisse écrire

$$(16) \quad \omega(x, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^\infty \psi(u) u^{x-1} du$$

pour les valeurs de x telles que $\Re(x) < g$, g étant un nombre réel convenable. Soit m le premier nombre de la suite $0, -1, -2, -3, \dots$ inférieur à g : de

$$\varphi(t) = \sum_0^\infty \omega(-n) t^n$$

on déduit, $p(t)$ étant un polynome entier,

$$\varphi(t) = p(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_a^\infty \psi(u) \sum_{n=m}^\infty \frac{t^n}{u^{n+1}} du.$$

⁽¹⁾ En donnant à x des valeurs entières, les théorèmes que nous venons d'énoncer nous ramènent à ceux qu'à donné récemment M. FABER (Math. Annalen, t. LVII, pp. 378 et 381). Les réciproques de ces théorèmes sont connues ; elles ont été données en 1900 par M. LE ROY (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, s. II, t. II, p. 348).

La fonction $\varphi(t)$ est donc représentée, à moins d'un polynome, par

$$(17) \quad \frac{t^m}{2\pi i} \int_a^\infty \frac{\psi(u) du}{u^m (u - t)},$$

ce qui démontre que :

a) La fonction $\varphi(t)$ est une branche de fonction analytique régulière dans tout le plan, sauf une coupure faite de a à l'infini le long du chemin d'intégration de (16).

b) La discontinuité de $\varphi(t)$ en franchissant cette coupure est donnée par $\psi(t)/t^m$ ⁽¹⁾.

S'il est permis, dans (16), de varier le chemin d'intégration entre a et ∞ , ces seuls points a et ∞ seront singuliers pour la branche $\varphi(t)$ considérée; sinon, $\varphi(t)$ sera uniforme et le chemin d'intégration entre a et l'infini sera pour cette fonction une ligne singulière.

59. — En particulier, nous avons vu au n. 46 que toute fonction régulière pour $x = \infty$,

$$\omega(x) = \sum_0^\infty \frac{c_n}{x^{n+1}},$$

est fonction déterminante, et que sa génératrice est une fonction entière de $\log u$:

$$\psi(u) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n c_n}{n!} \log^n u,$$

singulière par conséquent pour $u = 0$ et $u = \infty$. Il en résulte que si dans la série

$$\varphi(t) = \sum_0^\infty k_n t^n$$

les coefficients k_n sont, à partir de l'indice m , les valeurs d'une fonction régulière dans le domaine de $n = \infty$, on pourra écrire (en changeant x en $-x$ dans les formules des nn. 43 et suivants) :

$$(18) \quad 2\pi i \omega(x, 1) = \int_1^\infty \psi(u) u^{x-1} du \quad [\Re(x) < -m],$$

(1) C'est une conséquence d'un théorème connu d'HERMITE : *Sur quelques points de la théorie des fonctions* (Crelle, t. 91, 1881). Pour le cas particulier actuel, voir aussi LE ROY, Mémoire cité, p. 330.

et par conséquent $\varphi(t)$, d'après le numéro précédent, sera une *branche de fonction analytique régulière dans tout le plan, sauf la coupure de 1 à ∞* ⁽¹⁾. Cette coupure n'est pas essentielle, puisque dans la formule (18) $\psi(u)$ est fonction analytique de u , régulière sauf aux points $t=0$ et $t=\infty$. En outre, pour les autres branches de $\varphi(t)$, que l'on obtient en franchissant la coupure, le point $t=0$ est évidemment singulier, puisqu'il l'est pour $\psi(t)$.

⁽¹⁾ Ce théorème a été donné presque en même temps par M. LEAU (Journ. de Math., s. V, t. V) et par M. LE ROY (Mémoire cité). Les théorèmes plus généraux de M. LE ROY, donnés aux nn. 31 et suivants de son travail, peuvent tous être obtenus d'une façon analogue; ils exigent tous, en effet, que la fonction coefficiente de $\varphi(t)$ soit une fonction déterminante.