Salvatore Pincherle

Lo spazio funzionale e le sue omografie

Giornale di Matematiche di BATTAGLINI, Vol. **50** (1912), p. 1–16.
Conferenza tenuta il 29 aprile 1911 nel Seminario fisico-matematico della R. Università di Roma.

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 405–421

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_405>

31 [148].

Lo spazio funzionale e le sue omografie.

(Conferenza tenuta il 29 aprile 1911 nel Seminario fisico-matematico della R. Università di Roma.)

Giornale di Matematiche di BATTAGLINI (diretto da E. PASCAL, Napoli); **50**, 1-16 (1912).

I. — Spazio ad un numero finito di dimensioni.

1. — Di tutte le corrispondenze fra due grandezze reali variabili, la più semplice, dopo l'identità, è senza dubbio la proporzionalità, che con tanta frequenza si presenta nel mondo fisico, almeno come legge di prima approssimazione.

Questa legge, rappresentata da

$$y = cx, \tag{1}$$

dà y come funzione di x,

$$y = f(x),$$

dotata della proprietà caratteristica espressa dall'equazione

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2); \tag{2}$$

dico *proprietà caratteristica* in quanto, sotto condizioni di continuità estremamente larghe, l'equazione funzionale (2), insieme ad $f(0) = 0$, porta di conseguenza che la $f(x)$ coincida con cx (1).

---

(1) Vedasi SCHIMMACK, *Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition*, Inaugural-Dissertation, Halle 1908.

L'argomento su cui oggi intendo intrattenervi, è, per così dire, lo sviluppo di un embrione rappresentato da quella corrispondenza così semplice ed elementare.

2. — Le variabili x ed y si potevano rappresentare come vettori, contati da un'origine fissa, in spazi ad una dimensione, che nulla vieta di supporre sovrapposti. Siano ora due spazi di vettori ad un numero maggiore di dimensioni; supponiamo fra i vettori dei due spazi una corrispondenza tale che ad un vettore dell'uno corrisponda un unico vettore dell'altro, e che alla somma di due vettori corrisponda la somma dei vettori corrispondenti: avremo così in questi spazi, che pure possiamo supporre sovrapposti, la generalizzazione naturale della proporzionalità.

3. — Si abbiano degli elementi, comunque definiti, per i quali sia possibile di stabilire i concetti di eguaglianza, di somma, con le loro solite proprietà formali; fra essi esiste l'elemento 0, definito come *modulo* dell'addizione.

Per simili elementi si stabilisce subito il concetto di dipendenza e di indipendenza lineare. Se in un insieme di tali elementi se ne possono trovare n, e non più, linearmente indipendenti, questo insieme sarà uno *spazio lineare* ad n dimensioni e agli elementi, per una ovvia generalizzazione che, pure essendo di natura verbale, reca aiuto all'intuizione, si darà il nome di *vettori* di questo spazio. Un'operazione univoca A, che applicata ad un elemento α qualsiasi dello spazio dia un elemento α' dello spazio medesimo,

$$A(\alpha) = \alpha',$$

e che goda delle proprietà

$$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta), \quad A(c\alpha) = cA(\alpha);$$

si dirà una *operazione distributiva* o una *omografia* di questo spazio S.

Introducendo l'omogeneità, cioè riguardando gli elementi $c\alpha$ come coincidenti fra loro qualunque sia c, una simile operazione è una omografia sullo spazio punteggiato ad $n-1$ dimensioni.

4. — I risultati dello studio di simili operazioni sono ben noti. Riassumiamoli però brevemente.

a) L'operazione A può essere degenere, cioè possono esistere in S tali elementi ω che sia $A(\omega) = 0$; questi elementi si dicono *radici* di A. Se non esistono, l'operazione inversa A^{-1} è pure una omografia; se esistono A^{-1} è impossibile o indeterminata. Cioè, l'essere A degenere porta che $A(S)$ non è tutto S, ma solo una parte S' di S; per un elemento di S', A^{-1} è indeterminata, per un elemento di S non appartenente ad S', A^{-1} non esiste. Il numero delle radici linearmente indipendenti dà il *grado* della degenerescenza.

b) All'operazione A si può, in vari modi, fare corrispondere una matrice di numeri. In infiniti modi si possono scegliere, in S, n vettori linearmente indipendenti; ogni vettere di S si esprime linearmente mediante questi n, che costituiscono ciò che si può chiamare una *base* di S. Data una simile base

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

ogni vettore di S è espresso nella forma $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n$; le $c_1, c_2, \dots, c_n$ ne sono i *coefficienti* o le *coordinate*; la A è definita dalla matrice

$$\mathbf{a} \equiv \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}, \end{matrix} \right.$$

dove $a_{1\nu}, a_{2\nu}, \dots, a_{n\nu}$ sono i coefficienti del vettore $A(\alpha_\nu)$.

All'operazione inversa A^{-1} corrisponde la matrice reciproca di $\mathbf{a}$; al prodotto di due operazioni corrisponde il prodotto delle matrici corrispondenti.

La matrice corrispondente ad $\mathbf{a}$ muta al mutare della base scelta in S; ma se si passa da una base ad un'altra mediante la trasformazione lineare di matrice $\mathbf{M}$, nella nuova base la matrice di A sarà

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{a}\mathbf{M}.$$

La caratteristica di $\mathbf{a}$ essendo r, l'ordine di degenerescenza dell'operazione A è $n - r$.

c) Alla matrice $\mathbf{a}$ corrisponde anche la forma bilineare

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu,$$

ed inversamente, si può dire che alla forma bilineare corrisponde l'operazione A. Il calcolo delle operazioni ha dunque un riscontro nel noto calcolo delle matrici ed in quello delle forme bilineari.

b) È interessante dare una forma più perspicua all'effetto prodotto da A sugli elementi di S. Perciò conviene cercare se esistano elementi di S (e quindi spazi contenuti in S, ad una dimensione almeno) per i quali la A si riduca alla proporzionalità:

$$A(\eta) = (1/k)\eta .$$

Si trova che una simile relazione è possibile per opportuni elementi e per numeri k convenienti; questi numeri sono le radici della ben nota equazione fondamentale

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - (1/k) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - (1/k) & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - (1/k) \end{vmatrix} = 0.$$

Quando le radici di questa equazione sono distinte, la struttura dello spazio S è semplice; in esso vi sono n vettori $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, i quali determinano altrettante direzioni indipendenti su ciascuna delle quali la A è una proporzionalità, ed ogni vettore di S è somma di n di questi vettori η, uno per ciascuna direzione; quando sono multiple, la cosa è un poco più complicata, ma pure analoga; se $\overline{k}$ è radice multipla di un ordine r di multiplicità, vi sono p sistemi di elementi in numero di $q_1, q_2, \dots, q_p$, con

$$q_1 + q_2 + \dots + q_p = r,$$

per ciascuno dei quali esistono elementi $\eta_i^{(1)}, \eta_i^{(2)}, \dots, \eta_i^{(q_i)}$ tali che

$$(4) \qquad \begin{cases} A(\eta_i^{(1)}) = (1/\overline{k})\, \eta_i^{(1)} \\ A(\eta_i^{(2)}) = (1/\overline{k})\, \eta_i^{(2)} + \eta_i^{(1)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A(\eta_i^{(q_i)}) = (1/\overline{k})\, \eta_i^{(q_i)} + \eta_i^{(q_i-1)} . \end{cases}$$

Questi numeri q_i, esponenti dei così detti *divisori elementari* di WEIERSTRASS, caratterizzano l'omografia, come risulta da un noto teorema di quel Maestro sull'equivalenza dei fasci di forme bilineari $\mathcal{A} - k$, $\mathcal{B} - k$ aventi gli stessi divisori elementari.

I vettori $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ così determinati formano nello spazio S una base naturale, avente proprietà di carattere invariantivo; da ciò il nome di *numeri invarianti* che daremo alle radici della (3), e quello di *elementi invarianti* dello spazio S che daremo agli elementi η [1].

5. — Ricordando quanto sia esiguo il numero di quelle proprietà che servono, in astratto, a caratterizzare uno spazio lineare, si vede che i vettori di un tale spazio si possono realizzare nei più diversi modi. Ecco un esempio semplice ed interessante. Chiamiamo *elemento* un polinomio razionale intero in una variabile z, di grado non superiore ad $n - 1$; l'insieme di tali polinomi è precisamente uno spazio lineare ad n dimensioni, ed ogni polinomio può dirsi un vettore di questo spazio. Gli elementi dello spazio essendo ora funzioni, sarà naturale la denominazione di *spazio funzionale* che gli potremmo dare. A base di questo spazio si può scegliere, fra altri, il sistema

$$1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^{n-1}.$$

Non è il caso di trattenerci sulla interpretazione delle omografie in questo spazio; basti accennare alla derivazione come ad una omografia (od operazione lineare), degenere di ordine 1, che allo spazio dei polinomi di grado $n - 1$ fa corrispondere quello dei polinomi di grado $n - 2$.

II. — Spazi ad un numero infinito di dimensioni.

6. — Questa interpretazione di uno spazio lineare astratto ad n dimensioni suggerisce in modo assai spontaneo la estensione dal concetto di spazio lineare al caso di un numero indefinito di dimensioni. Basta lasciare indefinito il grado dei polinomi, e si avrà come tale spazio l'insieme dei polinomi di qualunque grado; e una ulteriore estensione non meno ovvia conduce alla considerazione dello spazio delle funzioni intere, o di quello delle serie di potenze. Ogni serie di potenze di raggio non nullo di convergenza può riguardarsi

---

(1) Secondo la nomenclatura dei moderni Autori tedeschi (Scuola dell'HILBERT) i numeri k sarebbero *Eigenwerthe* e le η *Eigenelemente* dello spazio. L'insieme dei numeri k sarebbe lo Spettro (Spektrum) dell'operazione A.

come vettore di uno spazio ad un numero infinito (ma *numerabile*) di dimensioni, spazio avente tutte le proprietà che definiscono uno spazio lineare; base è il sistema dei vettori semplici

$$1,\ x,\ x^2, \dots,\ x^n, \dots; \tag{5}$$

coordinate di un vettore sono i coefficienti delle serie; un noto teorema dimostra l'indipendenza lineare degli elementi della base (5). In svariatissimi modi si possono definire e caratterizzare analiticamente operazioni distributive od omografie di questo spazio: citiamo fra le più semplici la derivazione, la differenza finita, le forme lineari differenziali ed alle differenze.

7. — Qui è il caso di notare subito, fin da questo primo esempio, alcune differenze essenziali fra le omografie degeneri in uno spazio ad un numero finito e quelle in uno spazio ad un numero infinito di dimensioni.

a) Consideriamo ad esempio l'operazione D di derivazione nello spazio S delle serie di potenze. Essa è degenere, poichè $D\alpha = 0$ se α è una costante. Ma l'operazione D^{-1} ammette significato per ogni elemento di questo spazio. Consideriamo invece la operazione che consiste semplicemente nel moltiplicare per x ogni elemento di S; questa operazione non ha radici, se non lo zero, eppure produce come risultato, non tutto S, ma solo una sua parte e precisamente l'insieme delle serie di potenze divisibili per x. È in base a questa osservazione che fino dal 1897 avevo diviso le omografie degeneri di uno spazio S ad infinite dimensioni in omografie degeneri di prima classe, che hanno bensì radici, ma applicate allo spazio S lo riproducono tutto intero, e degeneri di seconda classe, che non hanno radici, ma non riproducono che una parte dello spazio [1]. L'analisi logica della prima classe di degenerescenza mostra come essa sia retta dagli stessi princìpi della *teoria delle congruenze*, di cui è una generalizzazione *in abstracto*; mentre quella della seconda classe è retta dai princìpi delle *divisibilità*, di cui costituisce l'estensione.

b) Un'altra differenza essenziale si rileva nel passaggio dal finito all'infinito del numero delle dimensioni di uno spazio, o come

---

[1] Questa mia osservazione è stata ampiamente menzionata dall'HADAMARD nel suo libro sulle serie di TAYLOR (Scientia, Paris 1901). Sotto altro aspetto, essa si ripresenta nella recente Memoria (Mathematische Annalen, Bd. 69, 1910) di HELLINGER e TOEPLITZ sulle matrici infinite (cfr. § 7).

si suole dire, nel passaggio dal dominio elementare (o algebrico) al dominio trascendente. Se, ad esempio, cerchiamo gli elementi invarianti per l'operazione S nello spazio delle serie di potenze, troviamo che l'equazione relativa

$$\varphi - k\,D(\varphi) = 0 \tag{6}$$

ha soluzione ($\varphi = e^{x/k}$) per ogni valore di k; in ciò scorgiamo una differenza sostanziale con il caso elementare, in cui gli elementi invarianti dell'omografia non si hanno che per valori speciali, discreti, del parametro.

8. — Lo spazio delle serie di potenze non è che un primo esempio di spazio lineare funzionale. Sono spazi lineari quello delle funzioni continue in un dato intervallo, quello delle funzioni limitate integrabili, quello delle funzioni integrabili (nel senso di LEBESGUE) insieme ai loro quadrati; sono anzi questi ultimi spazi che, in seguito alla importanza acquistata per sè e per le applicazioni alle equazioni integrali, hanno maggiore interesse perchè rappresentano il *campo di variabilità* degli elementi in cui opera il Calcolo funzionale delle operazioni e delle equazioni integrali.

9. — Per le equazioni integrali lineari che sono state maggiormente studiate e che hanno presentato fin qui il maggiore interesse, sono fondamentali le operazioni lineari che (limitandoci al caso più semplice di una sola variabile d'integrazione) si possono scrivere (*operazioni integrali*):

$$A(f) = \int K(x, y)\, f(y)\, dy. \tag{7}$$

Queste operazioni distributive sono quelle omografie che entrano in gioco nel ricordato Calcolo funzionale, e la classica equazione di FREDHOLM

$$\varphi(x) - k \int K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x),$$

dove f è una funzione data e φ una funzione incognita, non è altro che la ricerca dell'inversa del fascio di omografie

$$1 - kA.$$

10. — Come digressione, accenniamo all'interesse che presenta la domanda seguente:

Quali operazioni distributive in uno spazio funzionale possono rappresentarsi mediante *operazioni integrali?* Aggiungendo alle proprietà caratteristiche di un'operazione distributiva anche la continuità — opportunamente definita —, con che all'operazione distributiva si dà (con l'HADAMARD) (1) il nome di operazione lineare, il FRÉCHET (2) ha mostrato che un'operazione distributiva che a una funzione continua soddisfacente alle condizioni di DIRICHLET fa corrispondere una *costante* può effettivamente porsi sotto forma di operazione integrale; ma con ciò non è trattato che un caso particolare. Del resto, quando anche la rappresentazione di un'operazione lineare in forma di operazione integrale fosse possibile, non è a dire che essa sia sempre vantaggiosa, la forma analitica dell'operazione potendo a volte mascherare, anzichè manifestare, le sue proprietà di struttura. Valga l'esempio di quelle operazioni distributive che sono le espressioni differenziali lineari, o alle differenze finite, nel campo complesso.

III. — La risolvente.

11. — Considerando in astratto un'operazione A in uno spazio ad infinite dimensioni, i cui elementi o vettori possono essere rappresentati da funzioni di una o più variabili e che perciò diremo *spazio funzionale*, si vede che la risoluzione delle equazioni *vettoriali* (o equazioni *funzionali*), nell'elemento incognito φ,

$$a_0 \varphi + a_1 A(\varphi) + \dots + a_m A^m(\varphi) = \begin{cases} \alpha \\ 0, \end{cases} \tag{8}$$

e in particolare quella dell'equazione più semplice

$$\varphi - k A(\varphi) = \alpha, \tag{9}$$

dipende essenzialmente da una seconda operazione, strettamente legata alla prima, e che si dice *operazione risolvente* di A. Questa, per valori reali o complessi della variabile k (parametro) di modulo

(1) Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, février 1905.
(2) Transactions of the American Math. Society, 1904.

abbastanza piccolo, è rappresentata in generale dallo sviluppo in serie

$$A + kA^2 + k^2A^3 + \dots, \tag{10}$$

e, per il noto principio della continuazione analitica, viene ad essere un'espressione $R(\alpha; k)$ che, rispetto agli elementi α dello spazio su cui si opera, è operazione lineare al pari di A, e rispetto al parametro k è funzione analitica, dotata di queste o di quelle singolarità. Orbene, la natura delle singolarità di R è caratteristica per l'operazione A, e per la sua struttura, cioè per il suo modo di agire sullo spazio S: come nel caso elementare (§ 4) le radici della equazione fondamentale erano quelle che permettevano la decomposizione di S in n spazi ad una dimensione per ciascuno dei quali la A era una proporzionalità, così nel caso generale la conoscenza della natura analitica di R permette di indicare in quale modo gli elementi di S si ripartiscono a seconda dell'effetto che produce su di essi l'operazione A.

Le ipotesi che si possono fare sulle singolarità di R (*spettro* di A) sono naturalmente assai varie: conviene citare fra i più semplici tre casi, che si sono presentati nella teoria delle equazioni integrali:

a) La R sia funzione trascendente intera di k. In questo caso, l'equazione (9) ammette una soluzione ed una sola per ogni valore di k, senza eccezioni; l'equazione

$$\varphi - k\,A(\varphi) = 0 \tag{11}$$

non ammette invece soluzione. In questo caso, l'operazione A potrà chiamarsi del tipo di VOLTERRA, perchè presentatasi a questo nostro Autore nello studio delle equazioni relative ad operazioni integrali fra limiti variabili, come

$$\int_a^x K(x, y)\,\varphi(y)\,dy. \tag{12}$$

Le operazioni del tipo di VOLTERRA si possono assoggettare ad un calcolo le cui regole, nel caso di operazioni permutabili, sono quelle stesse del calcolo ordinario delle funzioni e permettono di ottenere con grande facilità la risoluzione di complicate equazioni funzionali.

b) La R sia funzione meromorfa di k. Questo caso si può riguardare come l'estensione normale del caso elementare, e le operazioni che dànno luogo ad esso si possono dire del tipo di FREDHOLM, poichè è questo il caso che si presenta per l'equazione integrale, considerata da quell'Autore, in cui il nucleo è funzione finita (o infinita per $x = y$ di ordine algebricamente minore di uno) in tutto l'intervallo d'integrazione; è noto come in questo caso sia risolubile l'equazione (9) per i valori di k non singolari per R, e quali siano le condizioni di risolubilità dell'equazione stessa per quei valori. In quanto alla struttura dello spazio S al quale è applicata una operazione A di questo tipo, ecco la particolarità che viene riscontrata: la A scompone lo spazio S stesso in un'infinità numerabile di spazi (generalmente ad una dimensione) su ciascuno dei quali l'operazione stessa è una proporzionalità, più uno spazio su cui l'operazione medesima si comporta come un'operazione del tipo di VOLTERRA.

c) La R sia funzione di k avente una linea singolare. In questo caso, in cui le relative operazioni possono dirsi del tipo di HILBERT, si trova che l'equazione (9) è risolubile per i valori di k non appartenenti ai punti della linea; per questi invece è risolubile l'equazione (11); gli elementi dati da $A(\alpha)$ ammettono una rappresentazione in forma d'integrale definito il cui nucleo è una funzione di k soddisfacente alla (11). Nella nomenclatura di HILBERT la A si direbbe avere uno *spettro* continuo.

IV. — **Funzioni ortogonali, funzioni associate.**

12. — Diremo che uno spazio funzionale ammette *una base* quando in tale spazio esiste un sistema numerabile di elementi

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots \tag{13}$$

tale che ogni elemento dello spazio sia rappresentabile mediante una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \alpha_n \tag{14}$$

uniformemente convergente. Lo spazio funzionale delle serie di potenze ammette come base il sistema (5). Può accadere che un'operazione lineare applicata ad uno spazio S generi una porzione S_1 di questo spazio avente una base: questo è il caso delle operazioni integrali *a nucleo simmetrico*; la ormai celebre dissertazione inaugurale di E. SCHMIDT [1] dimostra che se A è una tale operazione, ed α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ è il sistema completo delle sue funzioni invarianti (*Eigenfunktionen*), lo spazio $A(S) = S_1$ ammette come base la successione α_i, essendo qui S lo *spazio delle funzioni continue nell'intervallo d'integrazione* (od anche uno spazio più generale). In altre parole, se φ è una funzione continua, $A(\varphi)$ è sviluppabile in serie uniformemente convergente di tali funzioni.

13. — Mi propongo di accennare ad un caso analogo interessante, in cui si giunge a risultati analoghi; ma prima occorre premettere alcune nozioni sulle matrici infinite limitate.

Data una matrice infinita

$$\mathbf{a} \equiv (a_{m,n}) \qquad (m = 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots),$$

essa dà luogo alla forma bilineare infinita, la cui scrittura ha per ora un senso soltanto formale,

$$L = \sum_m \sum_n a_{mn} x_m y_n . \tag{15}$$

Se esiste un numero positivo M tale che, per tutti i valori delle x_i e delle y_i soddisfacenti alle condizioni

$$\Sigma x_i^2 \leq r^2, \qquad \Sigma y_i^2 \leq s^2, \tag{16}$$

sia

$$\left| \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{n=1}^{\mu} a_{mn} x_m y_n \right| < Mrs, \tag{17}$$

la forma bilineare e la matrice corrispondente si dicono, secondo HILBERT, *beschränkt* (limitate). Ora per le matrici limitate valgono le seguenti proprietà notevoli, pure dovute ad HILBERT.

a) Le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2$ ed $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}^2$ sono convergenti, e la loro somma è inferiore ad M^2.

b) La serie (per linee)

$$\sum_{m=1}^{\infty} x_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} y_n \right) \tag{18}$$

---

[1] Inaugural-Dissertation, Göttingen 1905, (§ 9).

è convergente, come pure la serie (per colonne)

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} x_m \right) \tag{19}$$

e la serie (per sezioni)

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{m=1}^{\nu} \sum_{n=1}^{\nu} a_{mn}\, x_m\, y_n\,, \tag{20}$$

e le loro somme sono eguali. Con ciò la forma bilineare L acquista un significato, è cioè il valore comune alle serie (18), (19) e (20).

c) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\, x_m \right)^2 \tag{21}$$

è convergente, per $\Sigma\, x_m^2 \leq r^2$.

d) Se due matrici sono limitate, è limitato il loro prodotto.

e) Il prodotto delle matrici limitate soddisfa alla legge associativa.

A queste proposizioni dell'HILBERT è da aggiungere, come assai notevole, le seguente dovuta ad HELLINGER e TOEPLITZ [1]:

f) Se la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} x_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\, y_n \right) \tag{18}$$

è convergente per tutti i valori delle x e delle y tali che sia

$$\Sigma\, x_m^2 \leq 1\,, \qquad \Sigma\, y_n^2 \leq 1\,,$$

la matrice (a_{mn}) è limitata.

14. — Vengo ora al caso dell'operazione integrale al quale accennavo prima. Sia

$$\alpha_1(x),\quad \alpha_2(x),\quad \dots,\ \alpha_n(x),\quad \dots \tag{22}$$

---

[1] Mathematische Annalen, Bd. 69, 1910, p. 321.

un sistema di funzioni tali che la serie

$$\Sigma\, \alpha_n^2(x) \tag{23}$$

sia convergente uniformemente nell'intervallo 0 ... 1. Le serie (uniformemente convergenti)

$$\Sigma\, c_n\, \alpha_n(x) \tag{24}$$

tali che $\Sigma\, c_n^2$ converga costituiscono uno spazio che diremo spazio S_α. Sia un secondo sistema

$$\beta_1(x),\quad \beta_2(x),\quad \ldots,\quad \beta_n(x),\quad \ldots \tag{25}$$

il quale definisca un analogo spazio S_β. La funzione

$$K(x, y) = \Sigma\, \alpha_n(x)\, \beta_n(y) \tag{26}$$

è uniformemente convergente nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Essa, assunta come nucleo, definisce due operazioni integrali fra loro aggiunte: la A definita da

$$A(f) = \int_0^1 K(x, y)\, f(y)\, \mathrm{d}y, \tag{27}$$

la quale, applicata ad una funzione integrabile limitata qualunque f, genera un elemento di S_α; e la $\overline{A}$, definita da

$$\overline{A}(f) = \int_0^1 K(x, y)\, f(x)\, \mathrm{d}x, \tag{28}$$

che genera un elemento di S_β.

In base alle ipotesi fatte, la matrice

$$\mathbf{a} \equiv (a_{mn}),$$

dove è

$$a_{mn} = \int_0^1 \alpha_n(x)\, \beta_m(x)\, \mathrm{d}x, \tag{29}$$

si dimostra *limitata.* La teoria delle equazioni lineari ad infinite incognite secondo SCHMIDT [1] è applicabile al sistema

$$(30) \qquad \left\{ a_{m1} z_1 + a_{m2} z_2 + \dots + a_{mn} z_n + \dots = h_m \right.$$

e dà una soluzione tale che Σz_n^2 sia convergente; ne viene che si possono determinare gli elementi a'_{mn} (tali che le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a'^2_{mn}$ siano convergenti) della matrice reciproca a destra di $\mathbf{a}$, cioè di una matrice $\mathbf{a}'$ tale che sia

$$(31) \qquad \mathbf{a}\mathbf{a}' = 1.$$

Se ora aggiungiamo opportune ipotesi sopra questa matrice $\mathbf{a}'$, si hanno i seguenti risultati:

a) Non esistono sviluppi dello zero in S_α, cioè per serie uniformemente convergenti di funzioni α non può essere identicamente

$$\Sigma c_n \alpha_n = 0$$

senza che sia $c_1 = 0$, $c_2 = 0, \dots$.

b) L'omografia A è univocamente invertibile nello spazio S_α, cioè, dato un elemento f di S_α, esiste un elemento φ ed uno solo in S_α tale che sia

$$(32) \qquad A(\varphi) = f;$$

così, sotto analoghe ipotesi, per l'omografia $\overline{A}$ in S_β.

c) Lo spazio S delle funzioni limitate integrabili è proiettato da A in S_α, da $\overline{A}$ in S_β.

d) Per ogni elemento u di S, esiste in S_α un elemento congruo rispetto ad A, cioè un φ tale che

$$(33) \qquad A(u - \varphi) = 0,$$

ed uno solo. Infatti è $A(u) = f$, dove f è elemento di S_α, e vi è un solo elemento φ di S_α tale che $A(\varphi) = f$.

---

(1) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XXV, 1908.

e) Se si pone

(34) $$\theta_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} a'_{n\nu} \beta_\nu ,$$

onde

(35) $$\beta_m = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m\nu} \theta_\nu ,$$

le funzioni θ_n, che soddisfano alla condizione che $\Sigma\, \theta_n^2$ sia uniformemente convergente, verificano le proprietà:

(36) $$\int_0^1 \alpha_m(x)\, \theta_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{per } m \neq n, \\ q_n & \text{per } m = n. \end{cases}$$

In base a questa proprietà le $\alpha_m(x)$ e $\theta_n(y)$ si diranno *funzioni associate*. La proprietà di essere associati, per due sistemi di funzioni, si presenta come un'ovvia generalizzazione dell'ortogonalità.

f) Il nucleo $K(x, y)$, sostituendo le (35), prende la forma

(37) $$K(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\, \alpha_m(x)\, \theta_n(y),$$

e qui, per essere la matrice (a_{mn}) limitata, la serie del secondo membro converge alla medesima somma, sia che si faccia la sommazione per linee, per colonne o per sezioni [§ **13**, b)].

15. — Dato un elemento $u(x)$ nello spazio S (delle funzioni limitate ed integrabili nell'intervallo 0 ... 1), gli si possono fare corrispondere le due successioni di numeri u_n, u'_n dati da

(38) $$q_n\, u_n = \int_0^1 u(x)\, \theta_n(x)\, dx,$$

(39) $$q_n\, u'_n = \int_0^1 u(x)\, \alpha_n(x)\, dx.$$

Queste successioni godono di proprietà analoghe a quelle dei coefficienti di FOURIER-HILBERT di una funzione $u(x)$, e perciò si possono chiamare rispettivamente *primi e secondi coefficienti generalizzati di* ***F o u r i e r - H i l b e r t***. Così:

a) Se $\varphi(x)$ è un elemento di S_α,

$$\varphi(x) = \Sigma\, c_n\, \alpha_n(x), \tag{40}$$

c_n è il primo sistema di coefficienti generalizzati di $\varphi(x)$:

$$q_n\, c_n = \int_0^1 \varphi(x)\, \beta_n(x)\, \mathrm{d}x\,; \tag{41}$$

così se $\psi(x)$ è un elemento di S_β,

$$\psi(x) = \Sigma\, d_n\, \beta_n(x),$$

le d_n sono i secondi coefficienti generalizzati di $\psi(x)$.

b) Se $\varphi(x)$, $\psi(x)$ appartengono rispettivamente ad S_α, S_β e c_n, d'_n sono rispettivamente i primi coefficienti generalizzati di $\varphi(x)$ ed i secondi di $\psi(x)$, è

$$\int_0^1 \varphi(x)\, \psi(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, d'_n\, q_n. \tag{42}$$

c) Se $u(x)$ è un elemento di S, e c_n, c'_n sono rispettivamente i primi e secondi coefficienti generalizzati, $\Sigma\, c_n \alpha_n(x)$ è l'elemento di S_α congruo ad $u(x)$, e $\Sigma\, c'_n\, \theta_n(x)$ l'elemento di S_β congruo ad $u(x)$.

d) Qualora sia impossibile la risoluzione dell'equazione

$$A(u) = 0 \tag{43}$$

in S, il sistema α_n si dice chiuso, ed è allora una base di S. In tal caso è anche impossibile la risoluzione, mediante una funzione di S, del sistema

$$\int_0^1 u(x)\, \beta_n(x)\, dx = 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{44}$$

In questo caso, per ogni elemento $u(x)$ di S è

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} \int_0^1 u(t)\, \beta_n(t)\, \mathrm{d}t \cdot \alpha_n(x). \tag{45}$$

V. — **Conclusione.**

16. — Concludendo, vediamo, da quanto precede, come considerazioni di natura che si potrebbe dire *geometrica* permettano di orientarsi in ricerche che sembrano di natura così strettamente aritmetica, e di delinearvi i problemi che vi si presentano in modo assai perspicuo. Ed è così che la risoluzione dell'equazione di FREDHOLM

$$\varphi - k\,A(\varphi) = \alpha$$

è, come si è detto, la ricerca dell'operazione inversa di un fascio di omografie; che la ricerca dello sviluppo di una funzione data $u(x)$ in serie procedenti per funzioni di un sistema prestabilito equivale al decidere se quella funzione sia elemento di un certo spazio, oppure no; che il riconoscere se codesto spazio sia generato da uno spazio più generale mediante una data operazione lineare equivale alla ricerca delle $A^{-1}(u)$, cioè alla risoluzione di un'equazione integrale *di prima specie.* Questi problemi si presentano quindi come generalizzazione di quelli delle omografie degli spazi ad un numero finito di dimensioni: è stato però essenziale osservare che nel passaggio da un numero finito ad un numero infinito di dimensioni, mentre certi fatti si conservano, altri si presentano essenzialmente nuovi, come la distinzione delle due classi di omografie e le possibilità di operazioni a spettro continuo. Infine, la conservazione dell'analogia fra gli spazi ordinari ed i funzionali fa cercare, anche per questi, l'esistenza di una base: base che in molti casi si presenta, se non nello spazio S generale almeno nello spazio S' trasformato di uno spazio funzionale generale mediante un'operazione A (operazione integrale a nucleo simmetrico, operazione definita nell'art. IV di questa Conferenza) ed è base dello spazio primitivo se codesta base di S' è chiusa. E a questo punto, non pare fuor di luogo il ricordare qui che nè le funzioni trigonometriche, nè le funzioni sferiche ed analoghi sistemi ortogonali possono formare una base per lo spazio delle funzioni continue di una variabile data in un intervallo: una condizione, verificata da questi classici sistemi, permette di costruire funzioni continue i cui relativi sviluppi non convergono. È al sig. HAAR [1] che si deve l'enunciato di questa condizione e la costruzione di basi ortogonali per le funzioni continue: queste basi sono costituite da sistemi di funzioni discontinue, uno dei quali è costruito da questo Autore in modo assai semplice e notevole.

---

[1] Inaugural-Dissertation, Göttingen 1909.