

SALVATORE PINCHERLE

SALVATORE PINCHERLE

Sull'operazione aggiunta di Lagrange

Annali di Matematica pura ed applicata, Serie 3, Vol. **21** (1913), p. 143–151

in: Salvatore Pincherle, *Opere Scelte*, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 435–444

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_435>

Sull'operazione aggiunta di Lagrange.

Annali di Matematica pura ed applicata (Milano);
(3) 21, 143-151 (1913).

È ben noto come, nello studio elementare delle equazioni differenziali lineari, la conoscenza di certe funzioni, dette moltiplicatori, permetta, mediante quadrature, di ridurre una tale equazione ad altre di grado inferiore, e come questi moltiplicatori siano gli integrali di un'equazione differenziale lineare dello stesso ordine della proposta, i cui coefficienti dipendono in modo semplice dai coefficienti di questa, di cui viene detta « equazione aggiunta » od anche « aggiunta di LAGRANGE », perchè venne considerata per primo dal sommo analista di cui il presente volume intende di onorare il ricordo.

Fra un'equazione differenziale lineare e la sua aggiunta, o meglio fra le operazioni funzionali (forme differenziali lineari) rappresentate dai primi membri delle due equazioni, passano notevoli relazioni, di carattere involutorio. Ma, dal punto di vista generale della teoria delle operazioni, queste relazioni non sono che una conseguenza di una dipendenza assai generale, quella stessa che nella geometria analitica delle varietà lineari in uno spazio ad n dimensioni lega le trasformazioni lineari sullo spazio di punti a quelle sullo spazio degli iperpiani. Per questa dipendenza, ad ogni operazione lineare si può farne corrispondere un'altra, detta *aggiunta* (anzi *aggiunta* di LAGRANGE, per l'esempio tipico che ne ha dato il nostro grande analista nella teoria delle forme differenziali lineari) della prima, le cui proprietà sono legate in modo assai semplice con quelle dell'operazione primitiva, la quale è alla sua volta l'aggiunta della propria aggiunta; e la semplicità della dipendenza stessa viene intuita dal fatto che per le operazioni lineari esprimibili mediante una matrice ad un numero finito od infinito di elementi, l'aggiunta non è altro che l'operazione espressa dalla matrice ottenuta ruotando la prima

di 180° intorno alla propria diagonale principale. Dell'operazione aggiunta di una data operazione lineare mi sono già occupato da tempo (1); mi propongo qui di introdurne il concetto nel modo più generale e di indicarne qualche applicazione.

1. — Un insieme S di elementi, per i quali siano definite, ed ammettano le usuali proprietà, l'eguaglianza, la somma, la moltiplicazione per un numero, e l'elemento zero, e tali che ogni combinazione lineare di questi elementi appartenga all'insieme stesso, dicesi *spazio lineare*. Giova all'intuizione assimilare gli elementi di questo spazio a vettori. Più elementi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, di cui una combinazione lineare dia l'elemento zero, si dicono linearmente dipendenti; linearmente indipendenti nel caso contrario. Se esiste un intero m tale che m elementi di S siano di necessità linearmente dipendenti, lo spazio è ad un numero finito di dimensioni; ad un numero infinito di dimensioni nel caso contrario.

2. — Consideriamo due tali spazi, S e S' , dei quali non si esclude la coincidenza; indichiamo con le minuscole in carattere grassetto gli elementi del primo, con le minuscole greche quelli del secondo, con le minuscole corsive i numeri reali, con le maiuscole i simboli operatori. Data una coppia di elementi, l'uno \mathbf{a} in S , l'altro α in S' , sia definita un'operazione P che, applicata alla coppia, dia luogo ad un elemento di un nuovo spazio S'' , che può anche ridursi allo spazio — ad una dimensione — dei numeri reali. L'elemento ottenuto dall'applicazione di P alla coppia \mathbf{a}, α , venga indicato con (\mathbf{a}, α) . Per l'operazione P si ammettano le seguenti proprietà:

a) Essa sia a risultato unico per ogni coppia \mathbf{a}, α .

b) Sia distributiva tanto negli elementi di S quanto in quelli di S' ; talchè si abbia:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \alpha) &= (\mathbf{a}, \alpha) + (\mathbf{b}, \alpha), & (c\mathbf{a}, \alpha) &= c(\mathbf{a}, \alpha); \\ (\mathbf{a}, \alpha + \beta) &= (\mathbf{a}, \alpha) + (\mathbf{a}, \beta), & (\mathbf{a}, c\alpha) &= c(\mathbf{a}, \alpha). \end{aligned}$$

c) Se si ha, per un elemento determinato \mathbf{a}_1 di S e per ogni elemento arbitrario α in S' ,

$$(\mathbf{a}_1, \alpha) = 0,$$

(1) *Sull'operazione aggiunta*, Rendic. della R. Accademia delle Scienze di Bologna, 1898; PINCHERLE e AMALDI, *Le operazioni distributive*, Zanichelli, Bologna 1901, (cfr. Cap. IX).

ne consegua $\mathbf{a}_1 = 0$; e se si ha, per un elemento \mathbf{a} arbitrario in S e per un elemento determinato α_1 di S' ,

$$(\mathbf{a}, \alpha_1) = 0,$$

ne consegua $\alpha_1 = 0$.

Risulta dalle ipotesi precedenti che se è $\mathbf{a} = 0$ od $\alpha = 0$ è zero il risultato di P . Ciò per l'unicità del risultato stesso.

3. — Due elementi \mathbf{a} , α si diranno *ortogonali* rispetto a P quando sia $(\mathbf{a}, \alpha) = 0$. Se più elementi $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sono ortogonali ad un medesimo α_1 è ortogonale ad \mathbf{a} ogni loro combinazione lineare. L'ipotesi c) del n. precedente si può enunciare dicendo che un elemento di S non può essere ortogonale ad ogni elemento di S' senza essere identicamente nullo. Poichè tutti gli elementi di S' non possono essere ortogonali ad un elemento \mathbf{a}_1 di S se \mathbf{a}_1 non è zero, questi elementi ortogonali formeranno una parte di S'_0 , cioè un sottospazio S'_1 evidentemente lineare, e che si dirà *ortogonale* ad \mathbf{a}_1 . Se poi S'_1 è ortogonale a più elementi $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots$ di S , sarà ortogonale ad ogni loro combinazione lineare, cioè ad un sottospazio S_1 di S ; i due sottospazi S_1, S'_1 si diranno pure ortogonali fra loro. Non sarebbe privo d'interesse sviluppare le proprietà dell'ortogonalità dal punto di vista dell'algoritmia generale; in particolare considerare il caso degli spazi S, S' sovrapposti; come pure darebbe luogo ad esame interessante lo studio dell'operazione P , in particolare nel caso degli spazi sovrapposti, e quello dell'operazione (\mathbf{a}, \mathbf{a}) che si deduce da P e che è forse il caso più semplice di un'operazione non distributiva; ma, tralasciando per ora queste considerazioni, veniamo alla definizione della operazione aggiunta di un'operazione data.

4. — Sia A un'operazione lineare, univoca, che applicata ad elementi dello spazio S riproduca elementi di questo spazio; sarà allora

$$(A(\mathbf{a}), \alpha)$$

un elemento di S'' . Ora, sia possibile porre questo elemento sotto la forma (\mathbf{a}, β) , per modo che sia

$$(A(\mathbf{a}), \alpha) = (\mathbf{a}, \beta);$$

la β dipenderà da α , e si potrà dire ottenuta da α mediante un'ope-

razione che indicheremo con $\bar{A}(\alpha)$, per modo che si avrà

$$(A(\mathbf{a}), \alpha) = (\mathbf{a}, \bar{A}(\alpha)).$$

a) L'operazione \bar{A} è univoca. Ciò per l'univocità di P e la proprietà c) del n. 2.

b) Essa è lineare. Infatti, se è

$$(A(\mathbf{a}), \alpha) = (\mathbf{a}, \beta), \quad (A(\mathbf{a}), \alpha') = (\mathbf{a}, \beta')$$

ne segue [n. 2, b)]

$$(A(\mathbf{a}), \alpha + \alpha') = (\mathbf{a}, \beta + \beta'),$$

onde

$$\bar{A}(\alpha + \alpha') = \bar{A}(\alpha) + \bar{A}(\alpha'),$$

e si verifica pure subito che è

$$\bar{A}(c\alpha) = c\bar{A}(\alpha).$$

L'operazione \bar{A} si dirà *aggiunta di A rispetto a P*; quando, in una data questione, sia fissata la P in modo che non si possa dare luogo ad ambiguità, la \bar{A} si dirà semplicemente *aggiunta di A*.

Si hanno ancora le seguenti proprietà:

c) L'aggiunta di una somma è uguale alle somme delle aggiunte; l'aggiunta di una funzione lineare omogenea di più operatori è uguale alla stessa funzione lineare omogenea delle aggiunte degli operatori medesimi.

5. — Siano A, B due operazioni lineari su S , siano \bar{A}, \bar{B} le rispettive aggiunte rispetto ad una P . Per definizione è:

$$(AB(\mathbf{a}), \alpha) = (B(\mathbf{a}), \bar{A}(\alpha)),$$

e ancora

$$(B(\mathbf{a}), \bar{A}(\alpha)) = (\mathbf{a}, \bar{B}\bar{A}(\alpha)),$$

onde

$$(AB(\mathbf{a}), \alpha) = (\mathbf{a}, \bar{B}\bar{A}(\alpha)),$$

che dà

$$\overline{AB} = \bar{B}\bar{A},$$

o in parole: *L'aggiunta di un prodotto di due operatori lineari e uguale al prodotto degli operatori aggiunti presi in ordine invertito.*

In generale, per un prodotto di un numero qualunque di fattori si ha :

$$\overline{ABC \dots L} = \bar{L} \dots \bar{C} \bar{B} \bar{A}.$$

6. — Ricordiamo che per le operazioni lineari si possono dare i seguenti casi :

a) A non ammette radici, e applicata ad S riproduce l'intero spazio S . In questo caso essa ammette un'operazione inversa univoca.

b) A ammette radici. In tale caso l'operazione inversa è plurivoca.

c) A applicata ad S produce solo una parte S_1 di S ; in tale caso l'operazione inversa di A non ha senso per gli elementi di S non appartenenti ad S_1 .

Il caso a) esclude naturalmente gli altri. Per gli spazi ad un numero finito di dimensioni, i due casi b) e c) si presentano sempre uniti; per gli spazi ad un numero infinito di dimensioni possono presentarsi separatamente e si denominano rispettivamente *degenerescenza di prima e di seconda specie*.

Ciò posto, sia A nel primo caso. Sostituendo allora, nella relazione

$$(A(\mathbf{a}), \alpha) = (\mathbf{a}, \bar{A}(\alpha)),$$

per \mathbf{a} la $A^{-1}(\mathbf{a})$, viene

$$(\mathbf{a}, \alpha) = (A^{-1}(\mathbf{a}), \bar{A}(\alpha));$$

relazione che appare come la generalizzazione della proprietà caratteristica delle variabili controgredienti. Sia ora (A^{-1}) l'aggiunta di A^{-1} ; verrà dalla precedente che essa è l'inversa di \bar{A} , tanto a destra che a sinistra e quindi anche \bar{A} ha operazione inversa univoca.

Sia A nel secondo caso. Se ω è radice di A_1 viene

$$(\omega, \bar{A}(\alpha)) = 0$$

qualunque sia α ; l'operazione \bar{A} trasforma dunque S' in una sua parte, e precisamente in un sottospazio di S' ortogonale ad ω , e si trova dunque nel terzo caso. Sia infine A nel terzo caso: sia S_1 il sottospazio lineare in cui S è trasformato da A . Sia B un'operazione lineare univoca di cui S_1 sia spazio radice, \bar{B} la sua aggiunta;

sarà per ogni \mathbf{a} di S :

$$0 = (BA(\mathbf{a}), \alpha) = (\mathbf{a}, \bar{A} \bar{B}(\alpha)),$$

onde [n. 2, c)] per essere \mathbf{a} arbitrario in S , è $\bar{A} \bar{B}(\alpha) = 0$; \bar{A} ammette dunque come radice lo spazio $\bar{B}(\alpha)$, e quindi si trova nel secondo caso.

7. — Se gli spazi S ed S' coincidono, e l'operazione P è simmetrica, il carattere involutorio dell'operazione aggiunta rispetto all'operazione primitiva è evidente; cioè se \bar{A} è l'aggiunta di A , viceversa A è l'aggiunta di \bar{A} .

8. — Passiamo ora ad indicare alcuni casi particolari. Accenniamo al più ovvio, quello in cui S, S' siano coincidenti in uno spazio ad un numero finito n di dimensioni: caso in cui un elemento α di A è dato in funzione lineare omogenea di un sistema fondamentale $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ di vettori di S :

$$\alpha = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \dots + c_n \eta_n,$$

c_1, c_2, \dots, c_n sono le coordinate di α . Come operazione P su due vettori $\alpha (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ed $\alpha' (c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$ si prenda il loro prodotto scalare $c_1 c'_1 + c_2 c'_2 + \dots + c_n c'_n$; se allora una operazione lineare A (omografia di S) è definita da

$$A(\eta_i) = a_{i1} \eta_1 + a_{i2} \eta_2 + \dots + a_{in} \eta_n,$$

cioè dalla matrice

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array},$$

L'operazione aggiunta \bar{A} è definita dalla matrice

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{array},$$

ottenuta dall'inversione delle linee in colonne nella prima.

Allo stesso risultato si giunge anche nel caso di uno spazio ad un numero infinito (numerabile) di dimensioni, supponendo l'operazione A definita da una matrice *limitata* (beschränkt) nel senso di HILBERT.

9. — Lo spazio S , coincidente ancora con S' , sia ora l'insieme delle funzioni reali di una variabile reale, date nell'intervallo $0 \dots 1$, ed ivi integrabili⁽¹⁾ insieme ai loro quadrati.

Come operazione P applicata a due funzioni α, β dell'insieme si assuma

$$(1) \quad (\alpha, \beta) = \int_0^1 \alpha(x) \beta(x) dx.$$

Un'operazione funzionale lineare in S si assuma sotto forma di operazione integrale:

$$A(\alpha) = \int_0^1 K(x, y) \alpha(y) dy,$$

a nucleo integrabile insieme al suo quadrato nel quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, ammessa inoltre l'invertibilità delle integrazioni. Si ha allora

$$(A(\alpha), \beta) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) \alpha(y) \beta(x) dy dx,$$

che per inversione diviene

$$\int_0^1 \int_0^1 \alpha(y) K(x, y) \beta(x) dx dy = (\alpha, \bar{A}(\beta)),$$

dove è

$$\bar{A}(\beta) = \int_0^1 K(x, y) \beta(x) dx.$$

Si ha così che *l'aggiunta di un'operazione integrale è quell'operazione integrale del medesimo nucleo in cui la variabile parametrica è scambiata con quella d'integrazione.*

(1) Nel senso di LEBESGUE.

10. — Supponendo che le funzioni prese in considerazione siano derivabili, si ha

$$\int_0^1 \frac{d\alpha(x)}{dx} \beta(x) dx = [\alpha(x) \beta(x)]_0^1 - \int_0^1 \alpha(x) \frac{d\beta(x)}{dx} dx;$$

cioè, essendo $C_{\alpha, \beta}$ una costante dipendente da α, β e lineare in entrambe e pertanto risultante da un'operazione del tipo P , si ha, D indicando l'operazione di derivazione,

$$(D\alpha, \beta) = C_{\alpha, \beta} - (\alpha, D\beta).$$

In particolare, se le funzioni riprendono i medesimi valori ai limiti dell'integrazione (¹), si ha

$$(D\alpha, \beta) = -(\alpha, D\beta),$$

cioè l'operazione aggiunta di D è $-D$.

L'operazione aggiunta della moltiplicazione per una funzione μ è la moltiplicazione per lo stesso moltiplicatore

$$(\mu\alpha, \beta) = (\alpha, \mu\beta),$$

onde segue, tenuto conto del risultato del n. 5, che l'aggiunta di una forma differenziale lineare

$$\alpha_0 \varphi + \alpha_1 D\varphi + \dots + \alpha_n D^n \varphi$$

è la forma differenziale lineare

$$\alpha_0 \varphi - D(\alpha_1 \varphi) + D^2(\alpha_2 \varphi) - \dots + (-1)^n D^n(\alpha_n \varphi),$$

cioè appunto la classica aggiunta di LAGRANGE.

11. — Sia F una forma differenziale lineare, \bar{F} la sua aggiunta; sia μ un moltiplicatore di F , cioè una funzione tale che μF sia differenziale esatto di una forma differenziale lineare d'ordine inferiore: $\mu F = DG$. Prendendo le aggiunte si avrà $\bar{F}\mu = -\bar{G}D$, e quindi, se

(¹) Restrizione senza importanza, potendosi sostituire all'operazione P data da l'operazione stessa aumentata di una costante, dipendente da α e β , opportunamente scelta.

si applica l'operatore dell'uno e dell'altro membro ad 1, si ottiene $\bar{F}(\mu) = 0$; μ è dunque integrale di \bar{F} ; questa è la nota proprietà fondamentale dell'equazione aggiunta di LAGRANGE.

Per le equazioni differenziali lineari, la relazione del n. 5 è il teorema noto sotto il nome di principio di reciprocità di THOMÉ e FROBENIUS.

12. — Nelle ricerche sulle equazioni lineari alle differenze si è presentata frequentemente ⁽¹⁾, accanto ad una data equazione, un'altra che è con la prima in una dipendenza analoga a quella che passa fra un'equazione differenziale lineare e la sua aggiunta di LAGRANGE. Infatti, il primo membro della seconda dà un'operazione che è l'aggiunta, nel senso definito nel presente lavoro, dell'operazione rappresentata dal primo membro della prima equazione rispetto ad una conveniente operazione P . L'operazione P rispetto alla quale si prende l'aggiunta può essere scelta in vario modo; per esempio, si può considerare come spazio S l'insieme delle funzioni, reali di variabile reale, integrabili da $-\infty$ ad ∞ , insieme ai loro quadrati (nel senso di LEBESGUE) e, α e β essendo due elementi di S , porre:

$$(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) \beta(x) dx.$$

Viene allora che, detta θ^a l'operazione di accrescimento finito [quella che muta $f(x)$ in $f(x+a)$], la sua aggiunta è θ^{-a} , e quindi l'aggiunta di

$$F = \alpha_0(x)f(x+n) + \alpha_1(x)f(x+n-1) + \dots \\ \dots + \alpha_{n-1}(x)f(x+1) + \alpha_n(x)f(x)$$

è, per i principi dei nn. 4-5,

$$F = \alpha_0(x-n)f(x-n) + \alpha_1(x-n+1)f(x-n+1) + \dots \\ \dots + \alpha_{n-1}(x-1)f(x-1) + \alpha_n(x)f(x).$$

(1) Vedasi la mia Memoria « Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche, Mem. Acc. Bologna, S. 4, T. 10 (1890), pag. 513 » dove l'equazione aggiunta è designata sotto il nome di « equazione inversa ». Vedasi anche: BORTOLOTTI, Rend. Acc. Lincei, S. 5, T. 5 (1896), pag. 254; WALLEMBERG, *Theorie der lin. Differenzengleich.*, Leipzig 1911, p. 81.

Le proprietà dell'equazione alle differenze aggiunta di un'equazione data, che si trovano sviluppate nei lavori testè citati, non sono che semplici conseguenze delle proprietà generali dell'operazione aggiunta di una data operazione lineare, quali risultano dal capitolo di Algoritmia che abbiamo tentato di abbozzare nel presente saggio.

L'operazione θ , o di sostituzione di x con $x + 1$, è un caso particolare dell'operazione S_ω di sostituzione, che consiste nel sostituire nella funzione generica $f(x)$ ad x la funzione data $\omega(x)$. Si trova con ciò che l'affermazione « l'aggiunta di θ è θ^{-1} » è caso particolare dell'altra « l'aggiunta di S_ω è $\frac{1}{\omega'(x)} S_\omega^{-1}$ », posto $\omega'(x) = \frac{d\omega}{dx}$ ed essendo S^{-1} l'inversa di S : l'operazione P essendo sempre data dall'integrazione del prodotto fra limiti convenienti.