Salvatore Pincherle

Sulle serie di fattoriali generalizzate

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Vol. **37** (1914), p. 379–390

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 448–463

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_448>

35 [157].

Sulle serie di fattoriali generalizzate.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo;
37, 379-390 (1914).

Le serie di funzioni razionali della forma

$$\text{(a)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

e quelle, il cui studio procede parallelo, date da

$$\text{(b)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_n)},$$

hanno richiamato da tempo l'attenzione degli analisti, sia come estensione all'infinito di formule classiche di interpolazione, sia perchè generalizzazione di espressioni che fanno parte del materiale più usuale del Calcolo, come le serie di potenze ($a_n = 0$) o le serie di fattoriali ($a_n = n$): fra gli autori che se ne sono occupati, abbiamo da citare il FROBENIUS (1), il BENDIXSON (2), il LANDAU (3) e lo SCHNEE (4). Per primo, si è rivolta l'attenzione al caso in cui i punti

---

(1) G. FROBENIUS, *Über die Entwicklung analytischer Functionen in Reihen, die nach gegebenen Functionen fortschreiten,* Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXXIII (1871), pp. 1-30.

(2) J. BENDIXSON, *Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss,* Acta Mathematica, t. IX (1886), pp. 1-34.

(3) E. LANDAU, *Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen,* Abhand. der mathematisch-physikalischen Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München, t. XXXVI (1906), pp. 151-218.

(4) W. SCHNEE, *Über irreguläre Potenzreihen und Dirichlet'sche Reihen,* I Teil, Inaugural-Dissertation, Berlin 1908.

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ammettono un unico punto limite a distanza finita, in cui è maggiore l'analogia con le ordinarie serie di potenze; poi è stato esaminato il caso in cui le a_n tendono all'infinito: se ciò accade in modo che la serie $\Sigma\, 1/|a_n|$ sia convergente, il carattere della serie viene agevolmente analizzato, mentre dà luogo a questioni di maggiore interesse quello in cui la detta serie $\Sigma\, 1/|a_n|$ è divergente.

In questo caso, e nell'ipotesi che i numeri a_n siano reali e positivi, il BENDIXSON per le serie della forma (a) ha ottenuto risultati assai notevoli, e risultati analoghi ed altri anche più profondi sono stati dati dal LANDAU per le serie (b), aggiungendosi l'ipotesi che le a_n formino una successione monotona. Per il caso in cui le a_n siano complesse, pure avendo come unico punto limite l'infinito, è stato considerato, a mia conoscenza, solo il caso (5) in cui, essendo $a_n = b_n + ic_n$, è

$$\lim_{n=\infty} a_n = +\infty, \qquad \lim_{n=\infty} c_n/b_n = 0;$$

caso in cui si trovano in gran parte conservati i risultati ottenuti dal LANDAU per le a_n positive.

Studiando alcune classi di funzioni meromorfe, sono stato condotto a chiedermi se i teoremi del LANDAU si potessero estendere a qualche caso meno immediatamente affine: precisamente, ho cercato che cosa si possa dire circa il campo di convergenza semplice od assoluta di una serie (b) quando i punti a_n vanno all'infinito rimanendo entro un angolo di ampiezza determinata. Nella presente Nota, di carattere piuttosto elementare, mostro che si può, in questa ipotesi, estendere nel modo più ovvio il teorema sulla convergenza assoluta, mentre per il teorema sulla convergenza semplice la dimostrazione mi è riuscita agevole solo aggiungendo una ipotesi sul modo di tendere all'infinito dei punti a_n, e cioè che la funzione intera trascendente che ha questi punti come radici sia di genere 1.

In questa stessa ipotesi si estende subito la relazione, trovata da LANDAU fra il campo di convergenza di una serie di fattoriali e quello di una serie di DIRICHLET, alle serie della forma (b). Aggiungesi infine l'osservazione che per le funzioni rappresentate da

(5) Loc. cit. in (4), p. 74.

serie (b) vale, quando vi è un campo di convergenza assoluta, la rappresentazione asintotica mediante una serie di potenze intere negative di x quando la variabile tende all'infinito secondo le direzioni contenute in un certo angolo, analogamente a quanto accade, come ha mostrato il NIELSEN [6], per le serie di fattoriali.

1. — Siano dati due numeri complessi $x = \alpha + i\beta$, $y = \lambda + i\mu$, una successione di numeri positivi $r_0, r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ tendenti all'infinito e tali che la serie $\Sigma\, 1/r_n$ sia divergente, e una successione di numeri reali $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ compresi fra $-\varphi$ e φ $(\varphi < \pi/2)$ [7].

Posto

$$u_n = x\, e^{-i\varphi_n}, \qquad v_n = y\, e^{-i\varphi_n},$$

si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u_0 - r_0)(u_1 - r_1)\dots(u_n - r_n)}{(v_0 - r_0)(v_1 - r_1)\dots(v_n - r_n)(v_{n+1} - r_{n+1})}. \tag{1}$$

Se i numeri x ed y si prendono in modo che sia, *per tutti i valori di* n,

$$\alpha \cos\varphi_n + \beta \operatorname{sen}\varphi_n > \lambda \cos\varphi_n + \mu \operatorname{sen}\varphi_n + \delta, \tag{2}$$

essendo δ un numero positivo arbitrariamente piccolo, la serie (1) è assolutamente convergente.

Infatti, se è soddisfatta la (2), posso prendere due numeri reali a e b tali che sia

$$\alpha \cos\varphi_n + \beta \operatorname{sen}\varphi_n > a > b < \lambda \cos\varphi_n + \mu \operatorname{sen}\varphi_n.$$

Confronto $|u_n - r_n|$ ed $|a - r_n|$; la differenza dei quadrati di

---

[6] N. NIELSEN, *Sur la représentation asymptotique d'une série de factorielles*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (Paris), 3e série, t. XXI (1904), pp. 449-458.

[7] Si sono indicati con $+\varphi$ e $-\varphi$ gli azimut estremi semplicemente per comodità; si può con modificazione inconcludente, assumere due angoli qualunque φ e ψ compresi fra 0 e 2π come azimut estremi, con la sola condizione $|\varphi - \psi| < \pi$. Inoltre, non è necessario che tutti i φ_n siano compresi fra quei limiti, basta evidentemente assumere come lati limiti quelli che hanno per azimut rispettivamente il massimo limite ed il minimo limite degli angoli φ_n.

questi moduli è

$$\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - 2\, r_n (\alpha \cos\varphi_n + \beta \operatorname{sen}\varphi_n - a),$$

e siccome r_n tende all'infinito, il segno di questa differenza è, da un indice in poi, quello di

$$-(\alpha \cos \varphi_n + \beta \operatorname{sen}\varphi_n - a),$$

cioè negativo. Onde da un indice $\bar{n}$ in poi, è

$$|u_n - r_n| < |a - r_n|.$$

Analogamente, da un indice in poi è

$$|v_n - r_n| > |b - r_n|,$$

e quindi la serie (1), astrazione fatta da un numero finito di termini e da un fattore comune, ha i suoi termini inferiori in valore assoluto a quelli della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a - r_0)(a - r_1) \dots (a - r_n)}{(b - r_0)(b - r_1) \dots (b - r_n)(b - r_{n+1})}.$$

Ma questa [8], per essere $a > b$, è assolutamente convergente, onde è tale anche la (1).

2. — È facile interpretare graficamente la condizione (2). Se per un punto x del piano conduciamo le perpendicolari alle direzioni aventi per azimut φ e $-\varphi$, queste perpendicolari determinano quattro angoli di vertice x, uno dei quali ha l'apertura nel senso positivo dell'asse reale e l'opposto al vertice ha l'apertura nel senso negativo dell'asse stesso. Per brevità, dirò «angolo x (relativo a φ) destro» il primo di questi e «angolo x sinistro» il secondo. Ora, ricordando il significato geometrico di $\alpha \cos\varphi + \beta \operatorname{sen}\varphi$, si vede subito che la condizione (2) esprime che «il punto y è nell'angolo x sinistro, o il punto x nell'angolo y destro».

---

(8) Vedi J. Bendixson, loc. cit. in (2), p. 18.

3. — Sia ora una successione di punti

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots \tag{3}$$

nel piano della variabile complessa x, su cui si fanno le seguenti ipotesi:

a) I punti a_n hanno come solo punto limite l'infinito, e sono tutti compresi da un indice in poi — e non vi è restrizione a supporre dal primo in poi — entro un angolo avente il vertice nell'origine e i lati l'uno nel primo e l'altro nel quarto quadrante. Precisamente porremo

$$|a_n| = r_n\,, \qquad a_n = r_n\, e^{i\varphi_n}$$

con

$$\lim_{n=\infty} r_n = +\infty, \qquad -\varphi < \varphi_n < \varphi < \pi/2 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

b) Delle due serie

$$\Sigma \frac{1}{r_n}\,, \qquad \Sigma \frac{1}{r_n^2}$$

la prima è divergente, la seconda convergente.

Alla successione (1) corrisponde la funzione trascendente intera, di genere 1,

$$G(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{x/a_n}\,; \tag{4}$$

porremo

$$G_m(x) = \prod_{n=0}^{m} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{x/a_n}, \tag{5}$$

$$s_m = \sum_0^m \frac{1}{a_n} = \sum_0^m \frac{e^{-i\varphi_n}}{r_n}\,. \tag{6}$$

Consideriamo ora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_n)}{(y - a_0)(y - a_1) \dots (y - a_n)(y - a_{n+1})}\,. \tag{7}$$

Essa può scriversi

$$\sum_0^{\infty} \frac{(x\, e^{-i\varphi_0} - r_0) \dots (x\, e^{-i\varphi_n} - r_n)\, e^{-i\varphi_{n+1}}}{(y\, e^{-i\varphi_0} - r_0) \dots (y\, e^{-i\varphi_n} - r_n)(y\, e^{-i\varphi_{n+1}} - r_{n+1})}\,,$$

ed è, all'infuori del fattore $e^{-i\varphi_{n+1}}$ nel termine n^{mo}, della forma stessa della serie (1) Questa essendo assolutamente convergente sotto la condizione (2), la (7) è assolutamente convergente sotto la stessa condizione.

4. — Abbiasi ora una serie

$$\sigma(x) = \sum_0^\infty \frac{c_n}{(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_n)},$$

che sia convergente per un valore x della variabile. Seguendo un procedimento dovuto al Bendixson [9], si ponga

$$\sigma_{m,r}(x) = \sum_m^{m+r} \frac{c_n}{(x-a_0)\ldots(x-a_n)};$$

si ha identicamente

$$\sigma_{m,r}(y) = \sum_m^{m+r} \frac{c_n}{(x-a_0)\ldots(x-a_n)} \frac{(x-a_0)\ldots(x-a_n)}{(y-a_0)\ldots(y-a_n)} =$$

$$= \sigma_{m,0}(x)\frac{(x-a_0)\ldots(x-a_m)}{(y-a_0)\ldots(y-a_m)} + \{\sigma_{m,1}(x)-\sigma_{m,0}(x)\}\frac{(x-a_0)\ldots(x-a_{m+1})}{(y-a_0)\ldots(y-a_{m+1})} + \ldots$$

$$\ldots + \{\sigma_{m,r}(x) - \sigma_{m,r-1}(x)\}\frac{(x-a_0)\ldots(x-a_{m+r})}{(y-a_0)\ldots(y-a_{m+r})} =$$

$$= \sigma_{m,0}(x)\frac{(x-a_0)\ldots(x-a_m)(y-x)}{(y-a_0)\ldots(y-a_{m+1})} + \sigma_{m,1}(x)\frac{(x-a_0)\ldots(x-a_{m+1})(y-x)}{(y-a_0)\ldots(y-a_{m+2})} + \ldots$$

$$\ldots + \sigma_{m,r-1}(x)\frac{(x-a_0)\ldots(x-a_{m+r-1})(y-x)}{(y-a_0)\ldots(y-a_{m+r})} + \sigma_{m,r}(x)\frac{(x-a_0)\ldots(x-a_{m+r})}{(y-a_0)\ldots(y-a_{m+r})}.$$

Ora, siccome la $\sigma(x)$ è convergente per il valore x, le $|\sigma_{m,r}(x)|$ sono limitate ed inferiori quindi ad un numero assegnabile δ piccolo

(9) Loc. cit. in (2), pp. 11-12.

a piacere per m abbastanza grande; è dunque

$$(8)\quad \begin{cases} |\sigma_{m,r}(y)| < \delta\, |y-x| \left\{ \left| \dfrac{(x-a_0)\dots(x-a_m)}{(y-a_0)\dots(y-a_{m+1})} \right| + \dots + \right. \\ \left. + \left| \dfrac{(x-a_0)\dots(x-a_{m+r-1})}{(y-a_0)\dots(y-a_{m+r})} \right| \right\} + \delta \left| \dfrac{(x-a_0)\dots(x-a_{m+r})}{(y-a_0)\dots(y-a_{m+r})} \right| . \end{cases}$$

Essendo ancora $x = \alpha + i\beta$, $y = \lambda + i\mu$, per la convergenza assoluta della serie (7) la prima parte (entro graffe) del secondo membro della diseguaglianza precedente è piccola a piacere per m abbastanza grande se è soddisfatta la (2); rimane da esaminare l'ultimo termine di (8), che è quanto dire il rapporto

$$\varrho_m = \frac{(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_m)}{(y-a_0)(y-a_1)\dots(y-a_m)} .$$

Tenuto conto delle posizioni (5) e (6), esso si può scrivere

$$(9)\qquad \varrho_m = \frac{G_m(x)}{G_m(y)}\, e^{(y-x)\, s_m}.$$

Ora, essendo la s_m della forma

$$\frac{e^{-i\varphi_0}}{r_0} + \frac{e^{-i\varphi_1}}{r_1} + \dots + \frac{e^{-i\varphi_m}}{r_m},$$

il suo argomento sara compreso fra gli argomenti estremi degli addendi e quindi fra $-\varphi$ e φ, mentre il suo modulo tende all'infinito con m perchè la parte reale di s_m è

$$\frac{\cos\varphi_0}{r_0} + \frac{\cos\varphi_1}{r_1} + \dots + \frac{\cos\varphi_m}{r_m} > \cos\varphi . \sum_1^m \frac{1}{r_n},$$

e la serie $\Sigma \dfrac{1}{r_n}$ è divergente. Talchè si ha

$$s_m = \tau_m\, e^{-i\theta_m},$$

con

$$\lim_{m=\infty} \tau_m = +\infty, \qquad -\varphi < \theta_m < \varphi < \pi/2.$$

Tornando alla (9), avremo dunque [10],

$$|\varrho_m| = \left|\frac{G_m(x)}{G_m(y)}\right| e^{\mathcal{R}[(y-x)\ \tau_m e^{-i\theta_m}]};$$

la ϱ_m tenderà dunque a zero se è

$$\mathcal{R}\left[(y-x)\, e^{-i\theta_m}\right] < 0.$$

Ora questa diseguaglianza equivale a

$$(\lambda - \alpha)\cos\theta_m + (\mu - \beta)\,\mathrm{sen}\theta_m < 0$$

ed è quindi soddisfatta se è soddisfatta la (2) per ogni angolo φ_m fra $-\varphi$ e φ. Sotto questa condizione, la (8) dimostra che la serie $\sigma(y)$ è convergente, e siamo così giunti al seguente

Teorema. *La serie*

$$\sum_0^\infty \frac{c_n}{(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_n)},$$

dove la successione dei punti $a_0, a_1, \dots$ *soddisfa alle condizioni del* n. **3**, *sia convergente per un valore* x *della variabile. Essa è allora convergente per tutti i valori* y (*non coincidenti con uno degli* a_n) *contenuti nell'angolo* (*sinistro*) *di vertice* x *coi lati perpendicolari alle direzioni* $+\varphi$ *e* $-\varphi$.

5. — Entro ogni campo connesso limitato, tutto contenuto nell'interno di uno degli angoli di cui al teorema precedente e che non contenga alcuno dei punti a_n, la serie $\sigma(x)$ converge uniformemente e vi rappresenta quindi un pezzo di funzione analitica regolare.

La dimostrazione si svolge senza alcuna difficoltà [11], riferendosi alla diseguaglianza (8).

6. — I campi di convergenza delle serie di fattoriali e quelli delle serie di DIRICHLET hanno un legame che è stato posto in evidenza dal LANDAU [12] in una notevolissima proposizione:

---

[10] Con $\mathcal{R}(a)$ viene indicata la parte reale del numero complesso a.

[11] In modo analogo a quello tenuto dal BENDIXSON, loc. cit. in [2], p. 22.

[12] Loc. cit. in [3], p. 167. Il LANDAU avverte che questo teorema era stato intraveduto dal KLUYVER. Cfr. J. C. KLUYVER, *Over de ontwikkeling van eene functie in eene faculteitenreeks*, Nieuw Archief voor Wiskunde uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam, serie II, tomo IV (1899), pp. 74-82.

le due serie

$$\Sigma \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\dots(x+n)}, \qquad \Sigma \frac{a_n}{x^n}$$

convergono e divergono insieme per ogni valore di x diverso da $0, -1, -2, \dots$. Ora, nelle ipotesi a) e b) del n. **3**, si può stabilire una proposizione analoga anche per le serie di fattoriali generalizzate, ed alla dimostrazione servono a un dipresso gli stessi mezzi di cui si è giovato il LANDAU.

Consideriamo le due serie

$$\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0\, a_1 \dots a_n\, c_n}{(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_n)}, \qquad \tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n\, e^{s_n x};$$

essendo (n. **3**)

$$(x - a_0)(x - a_1)\dots(x - a_n) = (-1)^{n+1} a_0\, a_1 \dots a_n\, G_n(x)\, e^{-s_n x}, \tag{10}$$

viene che la $\tau(x)$ può scriversi

$$\tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0\, a_1 \dots a_n\, c_n\, G_n(x)}{(x - a_0)(x - a_1)\dots(x - a_n)}. \tag{11}$$

Supponiamo ora $\sigma(x)$ convergente: indicandone con q_n il suo termine generale, possiamo applicare alla $\tau(x) = \Sigma\, q_n\, G_n$ il teorema di DEDEKIND-JENSEN ([13]), il quale dice che se $\Sigma\, q_n$ e $\Sigma\, |G_{n-1} - G_n|$ sono convergenti, è convergente $\Sigma\, q_n\, G_n$. Ora $\Sigma\, q_n$ è convergente per ipotesi; si ha poi

$$G_{n-1}(x) - G_n(x) = G_{n-1}(x) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{x/a_n} \right\},$$

ma $G_{n-1}(x)$ tende a $G(x)$, onde basta dimostrare la convergenza assoluta di

$$\Sigma \left| 1 - \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{x/a_n} \right|;$$

e poichè il termine generale di questa, per n abbastanza grande,

([13]) E. LANDAU, loc. cit. in ([3]), p. 155.

verifica la diseguaglianza

$$\left|1-\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{x/a_n}\right|=\left|\frac{x^2}{2a_n^2}+\frac{2\,x^3}{3!\,a_n^3}+\frac{3\,x^4}{4!\,a_n^4}+\ldots\right|<\frac{|x^2|}{a_n^2}\,\frac{1}{1-|x/a_n|},$$

così questa convergenza risulta dimostrata, e di conseguenza quella di $\tau(x)$.

Suppongasi invece la $\tau(x)$ convergente $(x \neq a_n)$; si può scrivere, per la (10),

$$\sigma(x)=\Sigma\,\frac{(-1)^{n+1}\,e^{s_n x}}{G_n(x)}, \tag{12}$$

e quindi, a dimostrare la convergenza di $\sigma(x)$, basta, per il citato teorema di DEDEKIND-JENSEN, dimostrare quella di

$$\Sigma\left|\frac{1}{G_{n-1}(x)}-\frac{1}{G_n(x)}\right|=\Sigma\,\frac{|\,G_{n-1}(x)-G_n(x)|}{|\,G_n(x)\,G_{n-1}(x)|}. \tag{13}$$

Ora la convergenza di $\Sigma\,|\,G_{n-1}-G_n|$ è stata dimostrata; la $G_n(x)$ tende a limite finito e diverso da zero per essere x diverso dalle radici $a_0, a_1, a_2, \ldots$ di $G(x)$: onde risulta la convergenza della (13) e quindi della $\sigma(x)$. Abbiamo così il

Teorema. *La serie di funzioni razionali $\sigma(x)$, nelle ipotesi fatte per le a_n, e la serie di Dirichlet generalizzata $\tau(x)$, convergono e divergono insieme per tutti i valori di x diversi da $a_0, a_1, a_2, \ldots$* (14).

7. — Per quanto si riferisce alla convergenza assoluta, la proposizione del n. **4** ha la sua analoga sotto condizioni assai più larghe, perchè non importa più l'ipotesi b) del n. **3**, bastando la a); e la dimostrazione si ha nel modo più ovvio. Cioè: se la serie

$$\Sigma\,\frac{c_n}{(x-a_0)\,(x-a_1)\ldots(x-a_n)},$$

---

(14) Da ciò, per le serie di DIRICHLET $\sum c_n\, e^{s_n x}$ si ha un campo di convergenza il cui contorno è una spezzata. Lo SCHNEE [loc. cit. in (4), pag. 23] ha pure notato come per serie di DIRICHLET, in cui le ipotesi sugli esponenti s_n sono alquanto diverse, si presentino tali campi di convergenza.

dove è $a_n = r_n\, e^{i\varphi_n}$ con

$$\lim_{n=\infty} r_n = +\infty, \qquad -\varphi < \varphi_n < \varphi < \pi/2,$$

è convergente assolutamente per un valore $x = \alpha + i\,\beta$, è convergente assolutamente per ogni valore $y = \lambda + i\,\mu$ tale che sia, per ogni n,

$$\alpha \cos\varphi_n + \beta \operatorname{sen}\varphi_n > \lambda \cos\varphi_n + \mu \operatorname{sen}\varphi_n,$$

cioè per y contenuto nell'angolo (sinistro) di vertice x coi lati perpendicolari alle direzioni $+\varphi$, $-\varphi$.

Basta infatti l'osservazione che, sotto l'espressa condizione, da un indice n in avanti risulta $|y - a_n| > |x - a_n|$.

Il campo di convergenza assoluta, se esiste, ha dunque, aggiungendo l'ipotesi b), i suoi lati (due o quattro) paralleli a quelli del campo di convergenza semplice.

8. — Tornando ora all'ipotesi b) per i punti a_n, anche il raffronto fra i campi di convergenza assoluta della serie $\sigma(x)$ e della serie $\tau(x)$ di Dirichlet generalizzate con gli esponenti $s_n\, x$ è immediato; basta l'osservazione che i termini di $\sigma(x)$ si deducono da quelli corrispondenti di $\tau(x)$ con la moltiplicazione per le $G_n(x)$, a limite finito e diverso da zero, per concludere che per i valori di x diversi da $a_0, a_1, \ldots$ le serie $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ o convergono assolutamente insieme, o non convergono assolutamente nè l'una nè l'altra.

9. — Uno dei fatti più interessanti nella teoria delle serie è certamente quello che una serie, anche perdendo il carattere apparentemente essenziale della convergenza, possa continuare a servire al calcolo di una funzione come sviluppo asintotico. Il Nielsen (15) ha osservato che una serie di fattoriali può trasformarsi formalmente in una serie di potenze intere negative della variabile, la quale, quando non è convergente in un intorno di $x = \infty$ (convergenza

(15) N. Nielsen, loc. cit. in (6). Vedi anche: N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Teubner, Leipzig 1906, (pp. 272 e seguenti). Si noti che le serie di fattoriali, se hanno un campo di convergenza, hanno anche un campo di convergenza assoluta: è ciò che giustifica la formula (9), p. 451 della Memoria citata in (6) o la diseguaglianza (13), p. 274, dell'*Handbuch*.

avente luogo soltanto sotto condizioni abbastanza restrittive), rappresenta asintoticamente la funzione definita dalla serie di fattoriali quando x va all'infinito in direzioni convenienti. Si può chiedere se questa proprietà si conservi per le serie di fattoriali generalizzate: ora, è facile mostrare come nell'ipotesi dell'esistenza di un campo di convergenza assoluta per una tale serie, valga effettivamente lo sviluppo asintotico in serie di potenze se la variabile va all'infinito seguendo semirette appartenenti a quel campo.

Considereremo la serie

$$\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_n)};$$

sulle a_n faremo solo l'ipotesi a) del n. 3; perciò quanto verrà detto si applicherà agli sviluppi considerati dagli Autori sopra citati.

Ognuno dei termini di σ può svilupparsi in una serie di potenze intere negative di x, dove lo sviluppo dell'n^{mo} termine comincia con la potenza x^{-n}; sommando queste serie per termini simili, si ottiene formalmente la serie di potenze

$$\frac{g_0}{x} + \frac{g_1}{x^2} + \frac{g_2}{x^3} + \dots, \tag{14}$$

dove è

$$g_0 = c_0, \quad g_1 = a_1 c_0 + c_1, \quad g_2 = a_0^2 c_0 + (a_0 + a_1) c_1 + c_2, \quad \dots,$$

che diremo *sviluppo virtuale* corrispondente a $\sigma(x)$ e che solo eccezionalmente può essere convergente.

Essendo m un intero fisso, considero la somma

$$\frac{c_0}{x - a_0} + \frac{c_1}{(x - a_0)(x - a_1)} + \dots + \frac{c_{m-1}}{(x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_{m-1})};$$

essa è sviluppabile in una serie di potenze intere negative di x, i cui primi m termini coincidono evidentemente con quelli dello sviluppo virtuale, e che si può pertanto scrivere

$$\frac{g_0}{x} + \frac{g_1}{x^2} + \dots + \frac{g_{m-1}}{x^m} + \frac{\varrho_m(x)}{x^m}; \tag{15}$$

si ha quindi:

$$x^m\left(\sigma(x)-\frac{g_0}{x}-\frac{g_1}{x^2}-\dots-\frac{g_{m-1}}{x^m}\right)=$$

(16)

$$=\varrho_m(x)+\frac{x^m}{(x-a_0)\dots(x-a_{m-1})}\ \frac{\sigma_m(x)}{x-a_m},$$

dove si è posto

$$\sigma_m(x)=c_m+\frac{c_{m+1}}{x-a_{m+1}}+\dots .$$

La serie (15) è convergente per tutti i valori di x maggiori in modulo del massimo fra i numeri r_0, r_1, ..., r_m; ma ϱ_m comincia con un termine in x^{-1}; perciò si può, preso un numero positivo ε piccolo a piacere, determinare un numero positivo ξ_1 tale che per $|x|>\xi_1$ sia

(17) $$|\varrho_m(x)|<\varepsilon/2.$$

Aggiungiamo ora l'ipotesi che $\sigma(x)$ abbia un campo di convergenza assoluta. In questo campo, si prenda un punto arbitrario $x_0=\alpha+i\beta$, indi si conduca per x_0 una semiretta l di azimut θ, con

$$\varphi+(\pi/2)<\theta<(3\pi/2)-\varphi;$$

un punto di l verrà dunque dato da

$$x=x_0+\varrho\, e^{i\theta}$$

e ogni tale punto apparterrà certamente al campo di convergenza assoluta di $\sigma(x)$.

Formando ora $|x-a_n|^2$, si trova l'espressione

$$\alpha^2+\beta^2+\varrho^2+r_n^2-2\,r_n(\alpha\cos\varphi_n+\beta\,\mathrm{sen}\varphi_n)+2\varrho\,(\alpha\cos\theta+\beta\,\mathrm{sen}\theta)-$$
$$-2\,\varrho\, r_n\cos(\theta-\varphi_n),$$

la cui semiderivata rispetto a ϱ è

$$\varrho+\alpha\cos\theta+\beta\,\mathrm{sen}\theta-r_n\cos(\theta-\varphi_n);$$

ma poichè $\theta-\varphi_n$, al variare di n, rimane compreso fra $\pi/2$ e $3\pi/2$, così il coseno di $\theta - \varphi_n$ è negativo: quindi, da un valore $\bar{\varrho}$ di ϱ in avanti, questa semiderivata è positiva e perciò $|x - a_n|$ è crescente con ϱ. Se dunque x va allontanandosi all'infinito lungo l, il valore assoluto dei termini di $\sigma(x)$ va diminuendo; più precisamente, se si prende x lungo l con $\varrho > \bar{\varrho}$ e quindi a fortiori con $|x| > \xi_2$, dove è $\xi_2 = |x_0| + \bar{\varrho}$, si ha costantemente

$$|\sigma_m(x)| < k,$$

k essendo un numero positivo assegnabile.

Prendiamo ora ξ_3 tale che sia

$$\xi_3 > (4k/\varepsilon) + |a_m|;$$

ne viene che per $|x| > \xi_3$ è

$$|x - a_m| > 4k/\varepsilon;$$

pertanto, per x lungo il raggio l e maggiore in modulo di ξ_2 e di ξ_3, è

$$\left|\frac{\sigma_m(x)}{x - a_m}\right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{18}$$

Infine, il rapporto

$$\frac{x^m}{(x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_{m-1})}$$

tende ad 1 per $x = \infty$; si può dunque prendere un numero positivo ξ_4 tale che per $|x| > \xi_4$ questo rapporto si mantenga minore di 2 in valore assoluto. Consegue da tutto ciò che per x preso lungo l e maggiore in valore assoluto del più grande fra i numeri ξ_2, ξ_3 e ξ_4, l'ultimo termine della (16) è inferiore ad $\varepsilon/2$ in valore assoluto. Ma, per la (17), anche $\varrho_m(x)$ è minore in valore assoluto di $\varepsilon/2$ se è $|x| > \xi_1$: onde, infine, si conclude che, *per x preso lungo l e maggiore in modulo del più grande fra i quattro numeri ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, è*

$$\left| x^m \left\{ \sigma(x) - \frac{g_0}{x} - \frac{g_1}{x^2} - \dots - \frac{g_{m-1}}{x^m} \right\} \right| < \varepsilon,$$

essendo ε prefissato ad arbitrio. Questa diseguaglianza ([16]) dimostra

([16]) Secondo la definizione classica data da H. POINCARÉ in « *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires,* Acta Mathematica, t. VIII (1886), pp. 295-344 ».

appunto che lo sviluppo virtuale (14) è asintotico per la $\sigma(x)$ quando x tende all'infinito lungo una semiretta contenuta entro il campo di convergenza assoluta.

10. — Colgo questa occasione per notare come lo sviluppo asintotico sia valido per serie $\sigma(x)$ della stessa forma di quelle ora considerate ma sotto ipotesi alquanto diverse. Supporrò ancora che i punti a_n siano tutti compresi entro l'angolo di ampiezza 2φ, con $\varphi < \pi/2$ e col vertice nell'origine: ne indicherò i lati con $0a$, $0b$, il primo di azimut φ ed il secondo di azimut $-\varphi$. Entro questo angolo i punti a_n siano arbitrariamente disposti, cioè, avendo per punto limite l'infinito, abbiano anche altri punti limiti quanti se ne vogliono. Però, i coefficienti c_n della serie $\sigma(x)$ siano soggetti alla limitazione che la serie $\Sigma\, c_n z^n$ non sia costantemente divergente: in altre parole, esista un numero positivo h tale che sia

$$|c_n| < h^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

La serie $\sigma(x)$ rappresenta un ramo ad un valore di funzione analitica regolare in tutto il campo E esterno all'angolo ottenuto conducendo i raggi paralleli alle semirette $0a$, $0b$, esternamente all'angolo $b0a$ e alla distanza h, limitandole al loro incontro; infatti, per ogni punto di E la serie $\sigma(x)$ è assolutamente convergente, ed uniformemente in ogni regione limitata interna ad E; indicherò del pari con $\sigma(x)$ questo ramo di funzione analitica.

Orbene, se della $\sigma(x)$ si costruisce lo sviluppo virtuale

$$\frac{g_0}{x} + \frac{g_1}{x^2} + \frac{g_2}{x^3} + \cdots,$$

questo vale a rappresentarla asintoticamente quando x va all'infinito lungo qualunque semiretta uscente dall'origine di azimut compreso fra φ e $2\pi - \varphi$, gli estremi esclusi. Si riprenda infatti l'eguaglianza (16) stabilita nel n. precedente: in essa, per $|x|$ abbastanza grande, si può rendere $\varrho_m(x)$ piccolo a piacere, $\dfrac{x^m}{(x-a_0)\ldots(x-a_{m-1})}$ prossimo ad 1 quanto si vuole in valore assoluto; a stabilire la diseguaglianza (19), che definisce l'approssimazione asintotica, basta dimostrare che

$$\sigma_m(x) = c_m + \frac{c_{m+1}}{x - a_{m+1}} + \cdots$$

è, in valore assoluto, limitata superiormente per tutti i valori di x di azimut conveniente e di modulo superiore ad un valore determinato. Ora ciò si vede facilmente: se x va all'infinito in una direzione di azimut compreso fra $(\pi/2)+\varphi$ e $(3\pi/2)-\varphi$, la distanza di x da uno qualunque dei punti a_n è superiore a $|x|$, e quindi basta fare

$$|x| > h_1 > h$$

per rendere limitato $|\sigma_m(x)|$; e se x va all'infinito in una direzione di azimut θ compreso fra φ e $\varphi+(\pi/2)$ oppure $-\varphi$ e $-\varphi-(\pi/2)$ [esclusi φ e $-\varphi$], la distanza $|x-x_n|$ è superiore a $|x \operatorname{sen}(\theta-\varphi)|$, e quindi basta prendere

$$|x| > \frac{h_1}{|\operatorname{sen}(\theta-\varphi)|} \qquad (h_1 > h)$$

per rendere limitata la $\sigma_m(x)$. Ne concludiamo che, eccettuati gli azimut compresi fra $-\varphi$ e φ, estremi inclusi, lo sviluppo virtuale di $\sigma(x)$ rappresenta asintoticamente la funzione per x tendente all'infinito in qualunque altra direzione.

Bologna, ottobre 1913.