Salvatore Pincherle

## Sopra alcuni nuclei analitici

*Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, Vol. **20** (1915-1916), p. 85–100

*in*: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 464–475

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_464>

# 36 [159].

## Sopra alcuni nuclei analitici.

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna;
(Nuova Serie) **20**, 85-100 (1915-1916).

La teoria delle equazioni integrali, se si è finora prevalentemente applicata al campo delle funzioni reali di variabile reale, non perde però il suo interesse quando si applichi al campo analitico, come hanno già mostrato varie ricerche fra cui sono specialmente da ricordare quelle del PICARD e del TOEPLITZ; anzi, da codesta applicazione varie questioni della teoria delle funzioni analitiche possono acquistare maggiore agilità di trattazione e condurre a risultati interessanti. Uno studio generale delle operazioni ed equazioni integrali a nucleo analitico non è però facile: fra le molteplici ipotesi che si possono fare sulla forma del nucleo, non sarà agevole scegliere quelle più atte a condurre a risultati degni di nota. Di una di queste forme si tratta nella presente breve comunicazione, forma che offre interesse per i notevoli casi particolari che contiene, fra cui quello dell'iterazione analitica, e per le equazioni funzionali che vi si possono ricondurre.

**1.** — I nuclei che noi considereremo saranno serie di potenze intere positive in $x$, intere negative in $y$, della forma

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{n+\nu,n}\, x^{n+\nu}}{y^{n+1}}$$

che si supporranno convergenti per valori di $x$ di modulo abbastanza piccolo, e valori di $y$ di modulo abbastanza grande. Precisamente, essendo $g$, $r$ ed $r_1$ tre numeri positivi, faremo l'ipotesi che sia

$$(2) \qquad |a_{n+\nu,n}| < g\, r_1^n\, r^{-n-\nu},$$

onde la convergenza di (1) ha luogo sotto le condizioni

$$(3) \qquad |x| < r, \qquad |x| < (r/r_1)\,|y|.$$

Il nucleo (1), che indicheremo con $\alpha(x, y)$, può anche scriversi

$$\alpha(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n\, \alpha_n(x)}{y^{n+1}},$$

dove si è posto

$$\alpha_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu,n}\, x^{\nu},$$

e quindi, per la (2), è, per $|x| < r$,

$$|\alpha_n(x)| < \frac{g}{1-(x/r)} \left(\frac{r_1}{r}\right)^n.$$

Per brevità di scrittura indicheremo con $(r)$ il cerchio di centro nell'origine e di raggio $r$, e con $(r, r')$ la corona circolare compresa fra i cerchi concentrici $(r)$ ed $(r')$. Supporremo poi le $a_{n,n}$ tutte diverse da zero e diverse fra loro.

**2.** — Si prenda, nel piano della variabile complessa $x$ (che possiamo senza inconvenienti fare coincidere con quello della $y$), il cerchio $(c)$, con $c < r$, indi sia

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, y^n$$

una serie di potenze, rappresentante una funzione o ramo di funzione analitica regolare in $(c)$, circonferenza compresa. Se, in $\alpha(x, y)$, la $y$ si prende sulla circonferenza $(c)$, $\alpha(x, y)$ convergerà per $|x|$ inferiore al più piccolo dei due numeri $r$, $rc/r_1$, e l'integrale, esteso alla circonferenza $(c)$ percorsa nel senso positivo,

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \alpha(x, y)\, f(y)\, dy = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n\, \alpha_n(x)$$

rappresenterà una funzione o ramo di funzione analitica regolare entro il più piccolo dei due cerchi $(r)$, $(rc/r_1)$.

Il primo membro della (4) può riguardarsi come un'operazione (operazione integrale) eseguita sul soggetto $f(y)$: la indicheremo con

$A(f)$. La $A$ si può eseguire su un elemento qualunque dell'insieme, o spazio funzionale $S_c$, costituito dalle funzioni analitiche regolari in un intorno di $y = 0$ che includa $(c)$, ed il risultato dell'operazione stessa è un elemento di un analogo spazio funzionale $S_{c'}$, essendo $c'$ inferiore, per tanto poco quanto si vuole, al più piccolo dei due numeri $r$, $rc/r_1$.

**3.** — Ora, se è $r \leq r_1$, il risultato di $A(f)$ non si troverà incondizionatamente nelle medesime circostanze di $f$, in quanto non si potrà asserire in generale che codesto risultato sia regolare in un intorno dell'origine includente $(c)$: ne segue che ad $A(f)$ non è più applicabile senz'altro la $A$, e quindi che ad $f$ stessa non sono applicabili le iterate di $A$.

**4.** — Se è invece $r > r_1$, è $rc/r_1 > c$, $r > c$, onde in ogni caso $A(f)$ appartiene ad $S_c$; gli è dunque applicabile la $A$, e quindi ad $f$ è applicabile la $A^2$, quindi la $A^3, \ldots$ e tutte le successive iterate di $A$.

In questa ipotesi di $r > r_1$ si può assegnare una corona circolare includente $(c)$ e tale che per le coppie $x, y$ prese in codesta corona la $\alpha(x, y)$ sia convergente: basta prendere un numero positivo $c_1$ tale che sia

$$c_1 < c, \qquad c_1 > r_1 c/r;$$

nella corona circolare limitata fra i cerchi $c_1$, $r_1 c_1/r$ è soddisfatta la condizione di convergenza (3) di $\alpha(x, y)$. Si può allora assegnare, nella corona $(c_1, r_1 c_1/r)$, il massimo valore assoluto $m$ di $\alpha(x, y)$; se dunque $f$ è un elemento di $S_c$, di cui $q$ sia il massimo valore assoluto lungo $(c)$, si avrà

$$|A(f)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \alpha(x, y) f(y)\, dy \right| < mqc\,,$$

poichè $2\pi c$ è la lunghezza della linea d'integrazione. Da cui si deduce facilmente che è

$$|A^2(f)| < m^2 q c^2, \qquad |A^n(f)| < m^n q c^n;$$

in base a ciò, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1} A^n(f) \tag{5}$$

sarà, per $|k| < 1/(mc)$, assolutamente ed uniformemente convergente e rappresenterà quindi un'operazione funzionale $R$ soddisfacente all'equazione simbolica

$$R - kAR = A. \tag{6}$$

La $R$ è la risolvente di FREDHOLM dell'operazione $A$; ma alla sua espressione (5), valevole solo per $|k|$ abbastanza piccolo, se ne può subito sostituire un'altra valida per ogni valore di $k$. Infatti, al caso che qui consideriamo è letteralmente applicabile il procedimento di FREDHOLM [1] con le semplificazioni di forma che vi sono state recate [2] e con ciò si può tanto dimostrare che il nucleo di $R$, o nucleo risolvente, è una funzione meromorfa, quanto determinare le due trascendenti intere di cui essa è il quoziente. Ci limitiamo qui, poichè, come si è accennato, il ricordato procedimento è applicabile alla lettera, a dare l'espressione del nucleo risolvente, il quale soddisfa alla relazione

$$\varrho(x, y) - kA(\varrho) = \alpha(x, y); \tag{7}$$

essa è data da

$$\varrho(x, y) = D(x, y; k)/\delta(k),$$

dove

$$D(x, y; k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{k^n}{(2\pi i)^n} \int_{(c)} \cdots \int_{(c)} \begin{vmatrix} \alpha(x, y) & \alpha(x, t_1) & \dots & \alpha(x, t_n) \\ \alpha(t_1, y) & \alpha(t_1, t_1) & \dots & \alpha(t_1, t_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha(t_n, y) & \alpha(t_n, t_1) & \dots & \alpha(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n, \tag{8}$$

$$\delta(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{k^n}{(2\pi i)^n} \int_{(c)} \cdots \int_{(c)} \begin{vmatrix} \alpha(t_1, t_1) & \dots & \alpha(t_1, t_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha(t_n, t_1) & \dots & \alpha(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n. \tag{9}$$

Ma un semplice esame del determinante che figura nel termine d'indice $n$ in $\delta(k)$ e del risultato della integrazione multipla, mostra che il coefficiente di $(-1)^n k^n$ in $\delta(k)$ non è altro [tenuto conto della

---

(1) Acta Math., T. 27, p. 365 (1903).

(2) Nella mia Memoria «*Sulle equazioni funzionali lineari,* Mem. della R. Accad. delle Scienze di Bologna, S. VI, T. 3 (1906)», in quella di GOURSAT «*Recherches sur les équations intégrales linéaires,* Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse, S. II, T. 10 (1908)», e nell'opera di LALESCO «*Introduction à la théorie des équations intégrales,* Hermann, Paris 1912, p. 25».

forma (1) di $\alpha(x, y)$ e notando che la serie (1) stessa è convergente per $x = t_i$, $y = t_j$ quando $t_1, \ldots, t_n$ sono variabili lungo la circonferenza $(c)$] che la somma dei prodotti dei coefficienti $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{\nu\nu}, \ldots$ moltiplicati ad $n$ ad $n$, in tutte le combinazioni possibili senza ripetizione, di codesti coefficienti ad $n$ ad $n$. Onde

$$(10) \qquad \delta(k) = 1 - k \sum_n a_{nn} + k^2 \sum_{r,s} a_{rr}\, a_{ss} - k^3 \sum_{r,s,t} a_{rr}\, a_{ss}\, a_{tt} - \ldots,$$

e questa serie, la cui convergenza per ogni $k$ è confermata dall'essere, per le (2),

$$|a_{nn}| < g \cdot (r_1/r)^n \qquad (r_1 < r),$$

è lo sviluppo del prodotto infinito

$$(11) \qquad \prod_n (1 - a_{nn}k),$$

pure convergente per ogni valore di $k$. Al determinante $\delta(k)$ dell'operazione $A$ si può dunque dare la forma (11), dalla quale risulta che lo spettro dell'operazione $A$ è costituito dalla successione dei reciproci dei coefficienti $a_{nn}$. La successione di questi (*numeri invarianti* od *autovalori* di $A$)

$$(12) \qquad \frac{1}{a_{11}}, \quad \frac{1}{a_{22}}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{a_{nn}}, \ldots$$

tende all'infinito per $n = \infty$ almeno come i termini della progressione geometrica di ragione $r/r_1$.

5. — Gli *elementi invarianti* od *autofunzioni* dell'operazione $A$ si possono ottenere direttamente, col metodo dei coefficienti indeterminati. Indicando genericamente con $\omega(x)$ una funzione invariante regolare per $x = 0$, sia

$$\omega(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

si ha

$$(13) \qquad \omega(x) = kA(\omega),$$

onde, sviluppando il secondo membro, cioè la serie $\Sigma\, c_n\, x^n\, \alpha_n(x)$, per le potenze di $x$, si avranno, dall'identità (13), le relazioni

$$(14) \qquad \begin{cases} c_0(1 - ka_{00}) = 0, \\ c_1(1 - ka_{11}) - kc_0 a_{10} = 0, \\ c_2(1 - ka_{22}) - kc_1 a_{21} - kc_0 a_{20} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

A queste si soddisfa ponendo le $c_i$ nulle fino ad un indice $i = m - 1$ incluso, indi facendo $k = 1/a_{mm}$ e prendendo $c_m$ arbitrario; le equazioni (14), dalla $(m+1)^{\text{esima}}$ in avanti, determineranno allora univocamente (per essere le $a_{ii}$ diverse fra loro) i successivi coefficienti $c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots$ .

Si ottiene così una successione di serie di potenze, nulle per $x = 0$ dell'ordine indicato dal loro indice,

$$\omega_0(x), \quad \omega_1(x), \quad \ldots, \quad \omega_n(x), \quad \ldots ,$$

determinate ciascuna all'infuori di un moltiplicatore costante, soddisfacenti formalmente alla (13) in cui $k$ riceve i valori rispettivi (12). Ma questa determinazione formale ha valore effettivo poichè, con una non difficile dimostrazione [1], si trova agevolmente che ognuna delle serie $\omega(x)$ converge entro il cerchio $(r)$. La determinazione degli elementi invarianti di $A$ nello spazio $S_c$ è così eseguita. Mediante la $R$ si risolve poi, senza difficoltà, l'equazione di FREDHOLM

$$\varphi - A(\varphi) = f$$

relativa alla nostra operazione, e si trova che ogni equazione in cui $f$ è elemento di funzione regolare per $x = 0$ ammette, per $k$ diverso dai numeri (12), un'unica soluzione regolare per $x = 0$. Se è $k = 1/a_{nn}$, l'equazione risulta, come nella teoria classica, impossibile o indeterminata.

6. — Accanto all'operazione integrale $A$ si può considerare la sua aggiunta $\bar{A}$, definita da

$$\bar{A}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \alpha(x, y)\, \varphi(x)\, dx, \tag{15}$$

e che intenderemo applicata alle serie di potenze di $1/x$, convergenti fuori di un cerchio $(c')$ di raggio inferiore a $c$ per tanto poco quanto si vuole. Il risultato dell'operazione $\bar{A}$, se il soggetto è

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^{n+1}} ,$$

[1] La dimostrazione di questa proposizione viene data in un lavoro più esteso sulle operazioni integrali analitiche, attualmente in preparazione.

sarà dato da

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left( \frac{a_{n,0}}{y} + \frac{a_{n,1}}{y^2} + \dots + \frac{a_{n,n}}{y^{n+1}} \right).$$

Per questa operazione i numeri invarianti sono gli stessi che per l'operazione $A$, cioè i numeri della successione (12); si trova inoltre [1], dalla forma del nucleo risolvente in vicinanza del valore $1/a_{nn}$, che al numero invariante $1/a_{nn}$ corrisponde una funzione invariante che è un polinomio intero in $1/y$ della forma

$$\eta_n(x) = \frac{g_0}{y} + \frac{g_1}{y^2} + \dots + \frac{g_n}{y^{n+1}}.$$

I coefficienti $g_r$ vengono pure determinati, come quelli delle $\omega_n(x)$, mediante il metodo dei coefficienti indeterminati applicato all'equazione

$$\varphi = k\bar{A}(\varphi),$$

ciò che fornisce il sistema

$$\text{(16)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} g_n \cdot (1 - k_n a_{n,n}) = 0, \\ g_{n-1} \cdot (1 - k_n a_{n-1,n-1}) = k_n a_{n,n-1} g_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_0 \cdot (1 - k_n a_{00}) = k_n \cdot (a_{n,0} g_n + a_{n-1,0} g_{n-1} + \dots + a_{10} g_1), \end{array} \right.$$

il quale risolve la questione.

**7.** — Accenniamo ora ad un'applicazione di quanto precede, e all'uopo supponiamo dato un elemento di funzione analitica regolare per $x = 0$ e nullo di primo ordine in $x = 0$, e sia

$$\text{(17)} \qquad \lambda(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

in cui inoltre verrà essenzialmente supposto

$$\text{(18)} \qquad |a_1| < 1.$$

In questa ipotesi, si può assegnare una corona circolare $(r_1, r)$ tale che, per le coppie $(x, y)$ in essa contenute, la funzione

$$\text{(19)} \qquad \frac{1}{y - \lambda(x)}$$

[1] Anche di questo asserto la dimostrazione verrà data nell'indicato lavoro.

sia sviluppabile in serie della forma (1) e sia quindi nucleo di un'operazione integrale della forma considerata in ciò che precede. Ed infatti, sia $\varrho$ un numero positivo inferiore per tanto poco quanto si vuole al raggio di convergenza della $\lambda(x)$, e sia $m$ il massimo valore assoluto di $\lambda(x)$ in $(\varrho)$, è

$$|a_n| \leq m/\varrho^n,$$

onde

$$|\lambda(x)| \leq |a_1 x| + \frac{m\,|x|^2}{\varrho^2 - \varrho\,|x|}.$$

Si soddisferà dunque alla condizione

$$|\lambda(x)| < b\,|x|, \tag{20}$$

dove $b$ è un numero positivo compreso fra $|a_1|$ ed 1, facendo

$$|x| < \frac{\varrho^2(b - |a_1|)}{m + (b - |a_1|)\,\varrho}.$$

È così determinato un numero $\bar{r}$ tale che, per $|a_1| < \bar{r}$, sia $|\lambda(x)| < b\,|x|$. Se dunque si prende un numero positivo $r$ inferiore ad $\bar{r}$, ed un numero positivo $r_1$ inferiore ad $r$ ma superiore a $br$, preso $x$ nella corona circolare $(r_1, r)$, sarà in essa $|\lambda(x)| < b\,|x| < br$ e quindi $|\lambda(x)| < r_1$. Preso dunque $y$ nella corona stessa, sarà $|y| > r_1$ e quindi la (19) è sviluppabile, per le coppie $(x, y)$ contenute nella detta corona, in serie della forma

$$\Sigma \frac{\lambda^n(x)}{y^{n+1}}$$

uniformemente convergente e che quindi si può ordinare in una serie di potenze di $x$ e di $y$ avente precisamente la forma (1). La funzione (19) costituisce dunque il nucleo di un'operazione integrale analitica $A$ del tipo studiato sopra.

8. — Ora, essendo $c$ un numero positivo compreso fra $r_1$ ed $r$, ed $f(y)$ una serie di potenze, elemento dello spazio funzionale $S_c$, il risultato dell'operazione $A(f)$ formata con il nucleo (19) non sarà altro che il risultato $f(\lambda(x))$ della sostituzione di $\lambda(x)$ in $f$; risultato regolare in tutto il cerchio $(r)$. L'equazione di definizione degli ele-

menti invarianti

$$\varphi(x) = k\,\varphi(\lambda(x))$$

ammetterà come soluzioni regolari per $x = 0$ (oltre che la costante per $k = 1$, soluzione inconcludente di cui non giova tenere conto) un sistema di funzioni

$$\omega_1(x), \quad \omega_2(x), \quad \ldots, \quad \omega_n(x), \ldots \tag{21}$$

nulle per $x = 0$, rispettivamente degli ordini $1, 2, \ldots, n, \ldots$, e corrispondenti rispettivamente ai numeri invarianti

$$\frac{1}{a_1}, \quad \frac{1}{a_1^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{a_1^n}, \quad \ldots\ .$$

Per la teoria generale, le (21) sono serie di potenze convergenti almeno per $|x| < r$; ognuna di esse è determinata all'infuori di una costante moltiplicatrice. Ma dall'essere (scrivendo ormai $a$ invece di $a_1$)

$$a\,\omega_1(x) = \omega_1(\lambda(x)) \tag{22}$$

risulta

$$a^n \omega_1^n(x) = \omega_1^n(\lambda(x)),$$

talchè $\omega_n(x)$ non differisce da $\omega_1^n(x)$ se non per un moltiplicatore numerico. Il sistema (21), indicata con $\omega(x)$ la prima funzione in cui il primo coefficiente $\omega'(0)$ si fa eguale all'unità, è dunque costituito dalla successione delle potenze intere positive di $\omega(x)$; si deducono così tutti gli elementi invarianti di $A$ regolari per $x = 0$ dalla costruzione della sola $\omega(x)$. E questa, soddisfacente alla (22), non è altro che la nota funzione di KOENIGS [1]; ricordiamo che la (22) è la cosidetta equazione di SCHRÖDER. Dalla (22) risulta, indicando con $\lambda_2(x)$ l'iterata $\lambda(\lambda(x))$ e con $\lambda_n(x)$ la $\lambda(\lambda_{n-1}(x))$,

$$\omega(\lambda_n(x)) = a^n\,\omega(x)\,,$$

onde

$$\omega(x) = \lim_{n=\infty} \frac{\omega(\lambda_n(x))}{a^n}\,. \tag{23}$$

---

(1) Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, T. 99, p. 1016 (1884). Ann. de l'Éc. Normale, S. III, T. I (supplém.), p. 19 (1884); S. III, T. II, p. 385 (1885).

9. — Poichè $\omega(x)$ è nulla del primo ordine per $x=0$, ogni funzione analitica regolare per $x=0$ può svilupparsi, per un intorno conveniente di quel punto, in serie di potenze di $\omega(x)$. In particolare sarà

$$\lambda(x) = l_1\omega(x) + l_2\,\omega^2(x) + \dots + l_n\,\omega^n(x) + \dots,$$

dove, dall'essere $\lambda(x) = ax + \dots$, $\omega(x) = x + \dots$, è facile vedere che è $l_1 = a$. Dallo sviluppo precedente risulta

$$\lambda_2(x) = \lambda(\lambda(x)) = a^2\omega(x) + l_2 a^2\omega^2(x) + \dots + l_n a^n\omega^n(x) + \dots,$$

$$\lambda_m(x) = \lambda(\lambda_{m-1}(x)) = a^m\omega(x) + l_2 a^{2(m-1)}\omega^2(x) + \dots + l_n a^{n(m-1)}\omega^m(x) + \dots .$$

Da questa viene

$$\lim_{m=\infty} \frac{\lambda_m(x)}{a^m} = \omega(x), \tag{24}$$

cioè la funzione $\omega(x)$ può definirsi come limite in questo modo [1].

10. — La teoria dell'iterazione analitica si è così presentata come un caso particolare fra le operazioni integrali analitiche a nucleo della forma (1). La risoluzione dell'equazione funzionale

$$\varphi(x) - k\,\varphi(\lambda(x)) = f(x) \tag{25}$$

se ne deduce immediatamente, poichè la (25) è l'equazione di FREDHOLM relativa al nucleo (19), e pertanto la detta equazione (25) ammette soluzione per ogni valore di $k$ diverso dalle $1/a^m$, soluzione unica nello spazio $S_c$; se poi è $k = 1/a^m$, l'equazione, secondo che è soddisfatta o no una ben nota condizione, è indeterminata od impossibile.

11. — Ora, possiamo ricondurre alla classe delle operazioni analitiche, il cui nucleo è della forma (1), un tipo più generale di equazioni funzionali, molto interessante, sebbene poco considerato fin qui all'infuori di qualche caso assai particolare. Queste equazioni sono quelle della forma

$$h_1\,\varphi(\lambda_1(x)) + h_2\,\varphi(\lambda_2(x)) + \dots + h_m\,\varphi(\lambda_m(x)) = f(x), \tag{26}$$

---

(1) KOENIGS, loc. cit. .

dove le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ed $f$ sono funzioni date, e $\varphi(x)$ è la funzione da determinarsi.

Le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, f, \varphi$ si intendono analitiche, regolari per $x = 0$; le $\lambda$ si suppongono inoltre nulle di primo ordine per $x = 0$, e sia $\lambda_s'(0) = e_s$; inoltre, si ammette che fra le $e_s$ ve ne sia una (ed una sola) di modulo massimo, e sia per esempio la $e_m$, talchè si suppone

$$|e_m| > |e_1|, \quad |e_m| > |e_2|, \quad \ldots, \quad |e_m| > |e_{m-1}|.$$

Sotto queste ipotesi si può ricondurre la (26) ad una forma più conveniente. Si ponga $\lambda_m(x) = z$; se ne deduce, col *ritorno* della serie, $x = \mu(z)$, dove $\mu$ è pure analitica, regolare, nulla di primo ordine per $z = 0$, ed è $\mu'(0) = 1/e_m$; si ponga poi

$$\lambda_s(\mu(z)) = \nu_s(z) \qquad (s = 1, 2, \ldots, m-1),$$

$$-\frac{h_s}{h_m} = k_s, \qquad \frac{1}{h_m} f(\mu(z)) = g(z).$$

Con ciò, la (26) viene a scriversi

$$\varphi(z) - k_1\varphi(\nu_1(z)) - \ldots - k_{m-1}\varphi(\nu_{m-1}(z)) = g(z), \tag{27}$$

dove le $\nu_s$ e $g$ sono funzioni analitiche regolari per $z = 0$, e le $\nu_s$ sono inoltre nulle di primo ordine per $z = 0$, con $\nu_s'(0) = e_s/e_m$; ponendo $e_s/e_m = u_s$, è $|u_s| < 1$.

Si consideri ora la funzione

$$\alpha(z, y) = \sum_{s=1}^{m-1} \frac{k_1}{y - \nu_s(z)}; \tag{28}$$

per le stesse considerazioni svolte ai nn. **7** e seguenti, si può determinare una corona circolare $(r_1, r)$, con $r_1 < r$, tale che per le coppie $(z, y)$ contenute in essa la $\alpha(z, y)$ sia regolare e sviluppabile in serie della forma (1). Essendo $r_1 < c < r$, l'operazione

$$A(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \alpha(z, y)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y,$$

dove $\varphi$ è un elemento di $S_c$, appartiene alla classe studiata ai nn. **2** e seguenti e le si possono applicare tutti i risultati ivi ottenuti. In particolare, se ne potranno determinare i numeri invarianti, che si trovano subito essere

$$1/(k_1 u_1^n + k_2 u_2^n + \dots + k_{m-1} u_{m-1}^n) \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

e a ciascuno di questi corrisponde un elemento invariante $\omega_n(x)$ analitico regolare per $x = 0$ e nullo dell'ordine rispettivo $n$ in $x = 0$, il quale si determina come è indicato al n. 5. Questo soddisfa all'equazione

$$k_1\{\omega(z) - u_1^n \omega(\nu_1(z))\} + \dots + k_{m-1}\{\omega(z) - u_{m-1}^n \omega(\nu_{m-1}(z))\} = 0.$$

Se ora le $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ non soddisfano alla relazione

$$k_1 u_1^n + k_2 u_2^n + \dots + k_{m-1} u_{m-1}^n = 1 \tag{29}$$

per alcun valore intero positivo di $n$ o, ciò che è lo stesso, se le $h_1, h_2, \dots, h_m$ sono tali da non verificare alcuna delle

$$h_1 e_1^n + h_2 e_2^n + \dots + h_m e_m^n = 0, \tag{29'}$$

l'equazione (27) ammette una soluzione ed una sola regolare per $x = 0$ e che si calcola (n. 5) per mezzo dell'operazione risolvente; in corrispondenza, si ha la soluzione dell'equazione funzionale (26). Se invece è soddisfatta la (29) o (29'), 1 è numero invariante della $A$, ed ammette soluzione, che si determina come al n. 5, l'equazione

$$\varphi(z) = k_1 \varphi(\nu_1(z)) + \dots + k_{m-1} \varphi(\nu_{m-1}(z))$$

e quindi la

$$h_1 \varphi(\lambda_1(x)) + h_2 \varphi(\lambda_2(x)) + \dots + h_m \varphi(\lambda_m(x)) = 0.$$

In corrispondenza, cioè nell'ipotesi che sia verificata la (29) o (29'), l'equazione (27), e quindi la (26), sarà generalmente impossibile, a meno che $g(z)$ non sia ortogonale all'elemento invariante di $\bar{A}$ corrispondente al numero invariante 1, nel quale caso l'equazione è indeterminata.