SALVATORE PINCHERLE

Struttura di uno spazio invariante nella teoria delle operazioni lineari

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Vol. **26** (1921-1922), p. 112–118

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 476–481

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_476>

37 [181].

Struttura di uno spazio invariante nella teoria delle operazioni lineari.

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; (Nuova serie) **26**, 112-118 (1921-1922).

1. — Sia S uno spazio lineare, ad una infinità numerabile di dimensioni, di enti aventi modulo (lunghezza) limitato; sia A un'operazione lineare univoca che applicata ad un ente di S genera un ente determinato di S medesimo; questa operazione non abbia radici in S (1). La serie

$$R_z = \Sigma\, z^n A^{n+1} \tag{1}$$

rappresenterà, se convergente per $|z| < |c|$, un'operazione lineare della stessa natura di A, permutabile con A, ed applicabile allo spazio S, mentre sarà funzione analitica della variabile z (per ogni ente α, di S, al quale essa si applica) regolare entro il cerchio $|z| = |c|$.

Si supponga ora che sola singolarità di R_z sulla circonferenza $|z| = |c|$ sia un polo di ordine s per $z = c$, per modo che si possa scrivere:

$$R_z = \sum_{h=1}^{s} \frac{B_h}{(c - z)^h} + R'_z\,, \tag{2}$$

dove R'_z è funzione analitica di z regolare nel predetto cerchio, circonferenza compresa, che sarà, al pari di $B_1, B_2, \dots, B_s$, operazione lineare determinata nello spazio S.

---

(1) Per le generalità sullo spazio e le equazioni lineari, vedasi PINCHERLE e AMALDI, *Operazioni distributive*, Zanichelli, Bologna 1901 (cfr. Cap. II e III). Per un esempio di spazio S vedansi i miei « *Appunti di Calcolo funzionale*, Mem. dell'Acc. di Bologna, S. VI, T. 8, 1911 ». [(*R.*) Quest'ultimo lavoro è il n. **30** **[145]** del presente Volume.]

In particolare è $R_0 = A$; si porrà analogamente $R'_0 = A'$.

2. — Dalla (1), formando R_y con $|y| < |c|$, si nota subito che R_z, R_y sono permutabili, e che vale per esse la relazione hilbertiana

$$R_z - R_y = (z - y)\, R_z R_y\,. \tag{3}$$

Si ha ancora, dalla (1),

$$R_z - z\, A R_z = A \tag{4}$$

e, dalla (2),

$$(c - z)^s\, R_z = B_s + (c - z)\, Q, \tag{5}$$

dove Q è un'operazione lineare, funzione analitica di z e regolare per $z = c$.

Moltiplicando la (4) per $(c - z)^s$ e passando al limite per $z = c$, tenuto conto che, per la (5), è

$$\lim_{z \to c} (c - z)^s\, R_z = B_s\,,$$

si ottiene

$$B_s - c\, A B_s = 0. \tag{6}$$

Questa relazione esprime che B_s, applicata allo spazio S, genera uno spazio U_s i cui elementi sono invarianti rispetto all'operazione A, col numero caratteristico $1/c$.

3. — Dalla (2) si deduce, per essere $A = R_0$,

$$A = \sum_{h=1}^{s} \frac{B_h}{c^h} + A', \tag{7}$$

decomposizione dell'operazione A in parti, di cui si possono dare notevoli proprietà. Anzitutto, le operazioni A, B, A' sono fra loro permutabili, e così lo sono con le R_z, R'_z. Indi ponendo, nella (3), $u = c - z$, $v = c - y$, sostituendo ad R_z la sua espressione (2) e l'espressione analoga per R_y, infine, notando che la (3) è un'identità in u, v ed eguagliando, dopo divisione per $v - u$, i coefficienti dei termini simili con potenze negative di u o v, si ottengono senza difficoltà le relazioni seguenti:

$$
(8)\qquad \begin{cases} B_1^2 = B_1, & \text{onde} \quad B_1^m = B_1, \\ B_1 B_2 = B_2, \quad \ldots, & B_1 B_s = B_s, \\ B_h B_k = B_{h+k-1} & \text{per} \quad h+k \leq s+1, \\ B_h B_k = 0 & \text{per} \quad h+k > s+1, \\ B_h R'_z = 0. \end{cases}
$$

Da questo, risulta in particolare,

$$
(9)\qquad B_2^2 = B_3, \quad B_2^3 = B_4, \quad \ldots, \quad B_2^{s-1} = B_s \text{ (}^1\text{)}.
$$

4. — Onde interpretare queste relazioni, indichiamo con U_h lo spazio ottenuto in S dall'applicazione di B_h, con V lo spazio ottenuto in S dall'applicazione di R'_z.

a) Per la prima delle (8), l'operazione B_1 coincide, nello spazio U_1, con l'operazione identica.

b) Per le seconde delle (8), ogni spazio U_h fa parte dello spazio U_1, poichè B_h coincide con $B_1 B_h$.

c) Per la terza delle (8), risulta che ogni spazio U_h appartiene ad U_k per $k \leq h$, poichè B_h coincide con $B_k B_{h-k+1}$.

Gli spazi S, U_1, U_2, ..., U_s sono dunque ognuno contenuto nel precedente.

d) Ogni elemento $A(\alpha)$ di S può, ed in un sol modo, decomporsi in una somma $\beta + \gamma$, dove β appartiene ad U_1 e γ appartiene a V. Infatti, indicando con B la sommatoria nel secondo membro della (7), dalla (7) stessa si ha:

$$
A(\alpha) = B(\alpha) + A'(\alpha) = \beta + \gamma.
$$

Se, essendo β_1, γ_1 rispettivamente elementi di U_1 e V, si avesse anche

$$
A(\alpha) = \beta_1 + \gamma_1,
$$

---

(1) Se le operazioni lineari qui considerate si riguardano come elementi di un'Algebra associativa, la B_1 è uno degli elementi detti, dai teorici di queste Algebre, *idempotenti* (vedasi per esempio J. A. SCHOUTEN, Math. Ann., T. 76, 1914) ed *automoduli* secondo G. SCORZA (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, T. 45, p. 22, 1921). Nello stesso ordine di idee, anche alle altre B si potrebbe applicare la nomenclatura data dallo SCORZA al loc. cit. .

ne verrebbe $\beta - \beta_1 = \gamma_1 - \gamma$, cioè U_1 e V avrebbero qualche elemento comune. Ora ciò non è possibile, poichè se δ fosse un tale elemento (non nullo) comune, da una parte sarebbe

$$B_1(\delta) = \delta,$$

d'altra parte, per essere $\delta = R_z'(\varepsilon)$ come elemento di V, in virtù dell'ultima delle (8), sarebbe

$$\delta = B_1(\delta) = B_1 R_z'(\varepsilon) = 0.$$

Ne risulta che l'operazione A applicata ad un elemento di U_1 non può dare che un elemento di U_1.

5. — Da quanto precede si conclude che l'operazione A, in quanto opera sullo spazio U_1, può scriversi, α essendo il soggetto dell'operazione,

$$A(\alpha) = \frac{\alpha}{c} + \frac{1}{c^2} B(\alpha) + \frac{1}{c^3} B^2(\alpha) + \ldots + \frac{1}{c^s} B^{s-1}(\alpha), \tag{10}$$

dove B è l'operazione indicata con B_2 nei numeri precedenti, e a questa va aggiunto

$$B^s(\alpha) = 0. \tag{11}$$

Da ciò si può dedurre, con la massima facilità, la riduzione di A a forma canonica. Valgono perciò le seguenti osservazioni:

a) Sia ω un invariante di A in U_1, k il numero invariante. Sarà

$$A(\omega) = k\omega$$

e, ponendo per A l'espressione (10),

$$\left(\frac{1}{c} - k\right)\omega + \frac{1}{c^2} B(\omega) + \ldots + \frac{1}{c^s} B^{s-1}(\omega) = 0.$$

Applicando l'operazione B^{r-1}, essendo r il minimo esponente per il quale è $B^r(\omega) = 0$ $(r \leq s)$, viene

$$\left(\frac{1}{c} - k\right) B^{r-1}(\omega) = 0, \qquad \text{onde} \quad k = \frac{1}{c}\,;$$

la A ha dunque in U_1 il solo numero invariante $1/c$.

b) Sia α radice di B^r, ma non di una potenza di B inferiore ad r. Applicando alla (10) successivamente le operazioni $B^{r-1}, B^{r-2}, \ldots, B, 1$ e ponendo $B(\alpha) = \alpha_1$, $B^2(\alpha) = \alpha_2, \ldots, B^{r-1}(\alpha) = \alpha_{r-1}$ viene successivamente:

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A(\alpha_{r-1}) = \dfrac{1}{c}\, \alpha_{r-1}, \\[2ex] A(\alpha_{r-2}) = \dfrac{1}{c}\, \alpha_{r-2} + \dfrac{\alpha_{r-1}}{c^2}, \\[2ex] \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\[2ex] A(\alpha_1) = \dfrac{1}{c}\, \alpha_1 + \dfrac{\alpha_2}{c^2} + \ldots + \dfrac{\alpha_{r-1}}{c^{s-1}}, \\[2ex] A(\alpha) \;= \dfrac{1}{c}\, \alpha \;+ \dfrac{\alpha_1}{c^2} + \ldots + \dfrac{\alpha_{r-1}}{c^s}. \end{array} \right.$$

Le $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ sono linearmente indipendenti, perchè qualora si avesse

$$c_0\, \alpha + c_1\, \alpha_1 + \ldots + c_{r-1}\, \alpha_{r-1} = 0,$$

applicando la B^{r-1} verrebbe $c_0 = 0$, e così successivamente. Dallo specchio (12) risulta dunque che ad ogni radice α di B^r che non lo sia di B^{r-1}, corrisponde uno spazio invariante elementare per A entro U_1, di cui $\left(z - \dfrac{1}{c}\right)^r$ è il divisore elementare.

6. — La struttura di A, quale la caratterizza la sua riduzione a forma canonica, è dunque perfettamente determinata dalle radici delle potenze dell'operazione B. Tutto lo spazio U_1 è costituito da radici di B^s, onde segue, applicando B^{s-1} alla (10),

$$cAB^{s-1}(\alpha) = B^{s-1}(\alpha),$$

cioè ogni elemento $B^{s-1}(\alpha)$ non nullo è elemento invariante di A; se è $B^{s-1}(\alpha) = 0$, si cerchi il minimo esponente r per cui è $B^r(\alpha) = 0$, e si ha in corrispondenza $B^{r-1}(\alpha)$ come elemento invariante. A ciascuno di questi elementi corrisponde uno spazio invariante elementare, il cui divisore elementare è $\left(z - \dfrac{1}{c}\right)^r$, come segue dal n. precedente.

Come casi estremi, si ha da una parte quello in cui è $r = 1$ per ogni α; ogni elemento di U_1 è invariante per A ed è $s = 1$; tutti i divisori elementari sono della forma $z - (1/c)$; il loro numero è quello delle dimensioni dello spazio U_1. D'altra parte, si ha il caso in cui r è costantemente uguale ad s, allora $\left(z - \frac{1}{c}\right)^s$ sono i divisori elementari, ed il loro numero (numero degli elementi invarianti indipendenti) è quello delle dimensioni dello spazio U_s.

*
* *

Le considerazioni precedenti sono applicabili, in particolare, alla discussione dello spazio caratteristico relativo ad una radice, semplice o multipla, del determinante di FREDHOLM nell'equazione integrale lineare regolare di seconda specie: esse pongono nella vera luce, senza che sia necessario ricorrere ad espressioni integrali, la struttura di un simile spazio, e possono in particolare sostituire con vantaggio la discussione contenuta, ad esempio, nel Capitolo II dell'opera di T. LALESCO: *Introduction à la théorie des équations intégrales*, Paris, 1912.