SALVATORE PINCHERLE

Sul concetto di piano in uno spazio ad infinite dimensioni

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Vol. **2** (1897-1898), p. 71–77

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 71–76

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_71>

17 [94].

Sul concetto di piano in uno spazio ad infinite dimensioni.

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; (Nuova serie) **2**, 71-77 (1897-1898).

In vari lavori sulle operazioni distributive applicate alle infinite funzioni analitiche di una variabile x, regolari nell'intorno di un valore determinato x_0 della variabile, ho fatto notare il vantaggio che vi è nel considerare ognuna di queste funzioni come elemento o *punto di uno spazio* S. I coefficienti della serie di potenze di $x - x_0$, che in quell'intorno di x_0 rappresenta la funzione, sono le coordinate di questo punto; la totalità delle funzioni in discorso costituisce lo spazio S riempito da questi punti, spazio ad un numero infinito — ma numerabile — di dimensioni. Nella determinazione dei punti dello spazio S si può introdurre la omogeneità, quando non si considerino come distinte le serie di potenze di $x - x_0$ che si ottengono da una di esse mediante la moltiplicazione per una costante arbitraria: a tutte le serie così ottenute corrisponde cioè un unico punto di S.

Per precisare meglio il mio concetto, considererò lo spazio S i cui elementi (o punti) sono le serie di potenze intere positive della variabile x, convergenti entro un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio superiore ad un numero positivo r. Per brevità di linguaggio, una tale serie si dirà *appartenere* al cerchio (r). Analogamente, si dirà che una serie di potenze intere negative di x appartiene al cerchio (r) quando essa converga fuori di un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio inferiore ad r. Che lo spazio S delle serie di potenze intere positive di x appartenenti ad (r) sia lineare, risulta dall'osservazione che ogni combinazione lineare di due suoi elementi fa parte dello spazio medesimo.

Il concetto di varietà, lineare o no, ad un numero qualunque di dimensioni, immersa in uno spazio come S, si presenta assai naturale: mi riferisco, su questo argomento, al cenno che ne ho dato di recente in questi stessi Rendiconti (1). Limitandoci alle varietà lineari, due, tre, ..., $r+1$ serie di S linearmente indipendenti definiranno rispettivamente una retta S_1, uno spazio S_2 a due dimensioni, ..., uno spazio S_r ad r dimensioni, immersi nello spazio S. A prima giunta può sembrare meno ovvia l'estensione allo spazio S del concetto di spazi correlativi degli S_r; ed anzitutto, dell'elemento correlativo del punto di S, cui si dovrà attribuire il nome di *iperpiano* o semplicemente di *piano* in S. Invece, mediante le facili considerazioni che qui espongo, questa estensione apparirà, io spero, assai semplice e, quel che più importa, assai spontanea, quando la si consideri come interpretazione di alcuni fatti, ai quali dà luogo lo studio delle operazioni distributive applicate alle serie di S.

È noto infatti (2) che esistono operazioni distributive, le quali, applicate ad ogni serie dello spazio S, dànno come risultato una costante: queste operazioni fanno, in altri termini, corrispondere un solo e stesso punto a tutti i punti di S. È nota pure (3) l'espressione analitica di queste operazioni, che denoterò con C. Come esempio di un'operazione C, si può citare quella che ad ogni serie di potenze $\varphi(x)$ di S fa corrispondere il numero $\varphi(a)$, essendo $|a| \leq r$. Data la successione di numeri

$$(u) = u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots,$$

soggetta solo alla restrizione che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^n}$$

appartenga ad (r), un'operazione C è completamente definita per tutto lo spazio S dalle condizioni

$$C(x^n) = u_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

(1) Sessione del 14 febbraio 1897.

(2) Vedasi *Mémoire sur le Calcul fonctionnel distributif,* Math. Ann., Bd. XLIX, §§ 79 e 80.

(3) Memoria citata, § 79.

questa operazione farà corrispondere alla serie od elemento

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

di S, il numero dato dalla serie $\Sigma u_n c_n$, serie assolutamente convergente per le ipotesi fatte.

Ogni operazione C così definita ammette una infinita multiplicità di radici, cioè di serie ω di S tali che sia $C(\omega) = 0$; ciò è facilmente prevedibile, poichè quest'operazione fa corrispondere uno spazio a zero dimensioni allo spazio S che ne ha infinite. L'insieme delle radici di C è uno spazio certamente lineare, poichè ne fa parte ogni combinazione lineare dei suoi elementi; lo indicheremo con $S^{(0)}$, ed è questo spazio che converrà di riguardare come un *piano* nello spazio S. Questa denominazione si giustifica mostrando che ogni S_r di S è intersecato dall'$S^{(0)}$ ora definito secondo un S_{r-1}. Infatti, lo spazio S_r è determinato da $r+1$ serie di S, linearmente indipendenti,

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x), \ldots, \ \varphi_r(x),$$

con

$$\varphi_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{in} x^n, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, r);$$

un elemento qualunque di S_r è

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{r} c_i \varphi_i(x) = \sum_{i=0}^{r} \sum_{n=0}^{\infty} c_i a_{in} x^n;$$

l'operazione C, applicata a $\psi(x)$, dà come risultato

$$C[\psi(x)] = \sum_{i=0}^{r} \sum_{n=0}^{\infty} c_i a_{in} u_n.$$

Indicata ora con v_i la somma della serie assolutamente convergente $\sum_{n=0}^{\infty} a_{in} u_n$, si ha

$$C[\psi(x)] = \sum_{i=0}^{r} c_i v_i,$$

e l'equazione $C(\psi) = 0$ ammette come soluzioni le ∞^{r-1} funzioni $\psi(x)$ che si ottengono assoggettando le $c_0, c_1, \ldots, c_r$ a soddisfare alla relazione

$$\sum_{i=0}^{r} c_i v_i = 0 ;$$

l'intersezione dello spazio $S^{(0)}$ col dato S_r è dunque un S_{r-1}.

Riassumendo, la definizione di *piano* dello spazio S è la seguente:

Data una successione (u), tale che la serie $\Sigma \frac{u_n}{z^n}$ appartenga ad (r), si consideri l'operazione C definita da $C(x^n) = u_n$. Diremo *piano* di S l'insieme delle radici di C in S. I termini $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ della successione (u) si potranno dire coordinate del piano; essi si riguardano dati all'infuori di un moltiplicatore comune.

Nello stesso modo che un punto di S si fa corrispondere ad una serie di potenze intere positive $\Sigma a_n x^n$, così un piano di S si potrebbe fare corrispondere ad una serie di potenze intere negative $\Sigma \frac{u_n}{z^n}$.

Definiti così i piani di S, il loro insieme si potrà alla sua volta riguardare come uno spazio lineare, che si indicherà con Σ. Dati più piani, mediante le successioni $(u^{(0)}), (u^{(1)}), \dots$ si potrà definire la loro dipendenza od indipendenza lineare; indi si potranno costruire con essi varietà lineari ad un numero finito di dimensioni in Σ (e quindi infinito in S). Ad esempio, siano dati $m+1$ piani definiti dalle coordinate

$$(u^{(i)}) = u_{i0}, u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}, \dots \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, m+1),$$

linearmente indipendenti; l'insieme dei punti che appartengono ad un tempo a tutti gli $m+1$ piani, e quindi a ogni loro combinazione lineare

$$(c_0 u^{(0)} + c_1 u^{(1)} + \dots + c_m u^{(m)}),$$

sarà una varietà lineare: questa sarà ad m dimensioni, e si indicherà con Σ_m, come spazio di piani: sarà ad infinite dimensioni, e si indicherà con $S^{(m)}$, come spazio di punti.

Un tale spazio $S^{(m)}$ può anche venire definito come insieme delle radici di un'operazione. Consideriamo infatti un'operazione distributiva H che faccia corrispondere allo spazio S uno spazio S_m, definito da $m+1$ serie di S linearmente indipendenti $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Una tale operazione è data [1] da

$$H(\varphi) = \alpha_0 \, C_0(\varphi) + \alpha_1 \, C_1(\varphi) + \dots + \alpha_m \, C_m(\varphi) \,,$$

essendo le operazioni C_i di quelle definite dianzi; C_i è data, per es., da una successione $\{u^{(i)}\}$. Se una serie $\varphi = \Sigma \, a_n x^n$ di S deve essere radice di H, per essere le $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ linearmente indipendenti, dovrà essere

$$C_0(\varphi) = 0, \; C_1(\varphi) = 0, \; \dots, \; C_m(\varphi) = 0 \,;$$

talchè la φ deve appartenere ad un tempo ad $m + 1$ piani linearmente indipendenti, cioè ad un Σ_m od $S^{(m)}$.

Si vede immediatamente che uno spazio S_p, $(p > m)$, interseca uno spazio $S^{(m)}$ secondo un S_{p-m-1}.

Mostrerò ora, con un esempio, come il concetto qui esposto si presti a dare enunciati di proprietà analitiche, alle quali, esso conferisce un alto grado di intuizione; quest'esempio è, a dir vero, assai elementare, ma ci servirà a preparare una generalizzazione che formerà oggetto di un'altra Nota e che varrà a porre in migliore luce alcuni fatti riguardanti le singolarità delle funzioni analitiche. Considererò l'operazione distributiva che consiste nel moltiplicare una $\varphi(x)$ qualunque di S per il polinomio razionale intero, di grado $m + 1$,

$$\gamma(x) = (x - c_0)(x - c_1) \dots (x - c_m) \,,$$

dove suppongo $|c_i| \leq r$, $(i = 0, 1, 2, \dots, m)$. Il prodotto

$$\psi(x) = \varphi(x) \, \gamma(x)$$

essendo nullo per $x = c_i$, $(i = 0, 1, \dots, m)$, apparterrà allo spazio $S^{(m)}$ definito dai piani linearmente indipendenti $(c_0^n), (c_1^n), \dots, (c_m^n)$, o, se si vuole, allo spazio dato dalle radici dell'operazione

$$H(\varphi) = \varphi(c_0) + x \, \varphi(c_1) + x^2 \, \varphi(c_2) + \dots + x^m \varphi(c_m) \,.$$

[1] Memoria citata, § 81.

L'operazione di moltiplicazione, che pur non ha radici, trasforma dunque S in un $S^{(m)}$ contenuto in S [1]. L'operazione inversa o di divisione per $\gamma(x)$, applicata ad un elemento $\varphi(x)$ di S, non avrà quindi in generale un risultato in S: perchè ciò accada, è necessario e sufficiente che $\varphi(x)$ sia divisibile per $\gamma(x)$, cioè che sia compresa nello spazio $S^{(m)}$ delle radici dell'operazione $H(\varphi)$ precedentemente considerata. Si può dunque dire che l'insieme degli elementi di S divisibili per il polinomio $\gamma(x)$ costituisce in S un $S^{(m)}$, ad infinite dimensioni come spazio di punti, e ad m dimensioni come spazio di piani.

---

[1] Ricordo, a questo proposito, un'osservazione già fatta in altra occasione (vedasi i Rendiconti del R. Istituto Lombardo, adunanza del 15 luglio 1897), che cioè, mentre una proiettività A degenere in uno spazio S_m ad un numero finito di dimensioni ha le due proprietà 1°) di ammettere radici, 2°) di porre tutti i punti $A(\varphi)$ non nulli in un $S_{m'}$, $(m' < m)$; invece negli spazi ad un numero infinito di dimensioni queste due proprietà non si accompagnano sempre. L'operazione di moltiplicazione per $\gamma(x)$ è una proiettività di S che gode della seconda proprietà, ma non della prima.