

SALVATORE PINCHERLE

SALVATORE PINCHERLE

Sull'operazione aggiunta

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Vol. **2** (1897-1898), p. 130–139

in: Salvatore Pincherle, *Opere Scelte*, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 77–84

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_77>

Sull'operazione aggiunta.

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna;
(Nuova Serie) 2, 130-139 (1897-1898).

1. — Sia S una classe od insieme di funzioni analitiche $\varphi, \varphi_1, \dots$, di una variabile x , tale che la combinazione lineare a coefficienti costanti di quante si vogliano di esse appartenga alla classe stessa, e che vi appartenga anche il prodotto di una qualunque di esse per la variabile x . Sia S' una seconda classe di funzioni analitiche f, f_1, \dots , di una variabile z (variabile che si potrà, a seconda dei casi, fare coincidere o no con x), avente le medesime proprietà.

2. — Sia definita in qualunque modo un'operazione che si applichi ad ogni coppia φ, f di funzioni, l'una presa comunque in S , l'altra in S' . Questa operazione si indicherà con (φ, f) e si ammetteranno per essa le seguenti proprietà:

- a) essere a determinazione unica;
- b) essere distributiva tanto rispetto ad f che rispetto a φ , cioè

$$(\varphi, f + f_1) = (\varphi, f) + (\varphi, f_1), \quad (\varphi + \varphi_1, f) = (\varphi, f) + (\varphi_1, f);$$

- c) essere tale che, se per ogni funzione f di S' si ha

$$(\varphi, f) = (\varphi_1, f),$$

ne debba risultare $\varphi = \varphi_1$, e, se per ogni funzione φ di S si ha

$$(\varphi, f) = (\varphi, f_1),$$

ne debba risultare $f = f_1$;

- d) essere tale che

$$(x\varphi, f) = (\varphi, zf).$$

3. — Quando si parlerà di operazioni distributive da applicarsi alle funzioni di S , o di S' , si intenderà sempre che il risultato di queste operazioni si trova in S o rispettivamente in S' . Ciò stabilito, si applichi alle funzioni di S un'operazione distributiva A qualunque a determinazione unica; un'operazione distributiva \bar{A} applicabile alle funzioni di S' si dirà *aggiunta* di A , quando sia

$$(1) \quad (A(\varphi), f) = (\varphi, \bar{A}(f)).$$

La presente Nota ha per oggetto di sviluppare le proprietà generali dell'operazione aggiunta di una data operazione distributiva.

4. — Dalla definizione data segue intanto immediatamente:

I. *Se una operazione ammette una aggiunta, questa è unica.*

II. *L'aggiunta di una somma è uguale alla somma delle aggiunte.*

III. *L'aggiunta di una funzione lineare omogenea di più operazioni è uguale alla stessa funzione lineare omogenea delle aggiunte delle operazioni medesime.*

5. — Sia $\alpha(x)$ un polinomio razionale intero in x . Dalle proprietà poste al § 2, risulta immediatamente che

$$(2) \quad (\alpha(x)\varphi, f) = (\varphi, \alpha(x)f);$$

questa eguaglianza si può estendere, sotto condizioni di convergenza, facili a stabilirsi nei singoli casi, alla ipotesi che $\alpha(x)$ sia una serie di potenze intere positive di x , quando $\alpha(x)\varphi$ appartenga ad S ed $\alpha(x)f$ ad S' . Indicando dunque con M_α l'operazione di moltiplicazione di una funzione arbitraria di S per $\alpha(x)$, abbiamo:

IV. *L'operazione aggiunta di M_α è la M_α stessa.*

6. — Siano A, B due operazioni da applicarsi alle funzioni dell'insieme S . Si avrà per definizione, se \bar{A}, \bar{B} sono le aggiunte di A, B rispettivamente,

$$(A(\varphi), f) = (\varphi, \bar{A}(f)),$$

da cui, mutando ora la φ in $B(\varphi)$,

$$(AB(\varphi), f) = (B(\varphi), \bar{A}(f)) = (\varphi, \bar{B}\bar{A}(f)).$$

Onde il risultato notevole:

V. Se $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots, \bar{X}$ sono le aggiunte di A, B, C, \dots, X , rispettivamente, e si ha $X = ABC \dots$, si avrà $\bar{X} = \dots \bar{C}\bar{B}\bar{A}$.

Ne segue che se un sistema di operazioni forma un gruppo, il sistema delle aggiunte forma un gruppo isomorfo.

7. — Se \bar{A} è l'aggiunta di A , si avrà (§§ 2, 5)

$$(A(x\varphi), f) = (\varphi, z\bar{A}(f)), \quad (xA(\varphi), f) = (\varphi, \bar{A}(zf)),$$

onde sottraendo membro a membro

$$(A(x\varphi) - xA(\varphi), f) = (\varphi, z\bar{A}(f) - \bar{A}(zf)).$$

Ricordando ⁽¹⁾ che si chiama derivata funzionale di un'operazione A , e si indica con A' , l'operazione $A' = A(x\varphi) - xA(\varphi)$, la relazione precedente può scriversi

$$(A'(\varphi), f) = (\varphi, -\bar{A}'(f)),$$

cioè:

VI. *L'aggiunta della derivata funzionale di una operazione è data dalla derivata funzionale dell'aggiunta dell'operazione stessa, presa con segno contrario.*

8. — Come applicazione, cerchiamo quale è l'aggiunta dell'operazione di derivazione ordinaria, che, come di solito, si rappresenterà con \bar{D} . Se D ne è l'aggiunta, si avrà

$$(D'\varphi, f) = (\varphi, -\bar{D}'f),$$

ma $D' = 1$ ⁽²⁾, onde

$$(\varphi, f) = (\varphi, -\bar{D}'f),$$

e quindi [§ 2, c)] sarà $\bar{D}'f = -f$, onde risulta ⁽³⁾ $\bar{D} = -Df + \lambda f$, essendo λ un moltiplicatore arbitrario. Nei molti casi in cui nulla si opporrà, nella definizione delle classi S, S' e della operazione (φ, f) ,

⁽¹⁾ Vedasi il mio *Mémoire sur le Calcul fonctionnel*, § 56, Math. Ann, Bd. 49.

⁽²⁾ *Mém. sur le Calcul fonctionnel*, § 60, b).

⁽³⁾ Memoria citata, ibid..

a che questo moltiplicatore si prenda eguale a zero, si avrà :

VII. *L'operazione aggiunta della derivazione ordinaria è la derivazione stessa presa con segno cambiato.*

9. — Risulta dalle proprietà IV, V e VII che se si assume come operazione A una forma differenziale lineare

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^p \alpha_n(x) D^n \varphi,$$

la sua aggiunta \bar{A} sarà data da

$$\bar{A}(f) = \sum_{n=0}^p (-1)^n D^n [\alpha_n(z) f],$$

cioè l'equazione $\bar{A} = 0$ è precisamente l'aggiunta di Lagrange dell'equazione differenziale lineare $A = 0$.

Inoltre, se la forma A è scomposta in fattori di primo ordine $A = E_1 E_2 \dots E_p$, si avrà, per il teorema V ed indicando con \bar{E}_i la forma aggiunta di E_i , che $\bar{A} = \bar{E}_p \bar{E}_{p-1} \dots \bar{E}_2 \bar{E}_1$; si ritrova così il noto teorema di reciprocità di THOMÉ e FROBENIUS ⁽¹⁾.

10. — È noto ⁽²⁾ che un'operazione funzionale distributiva A può, in generale, essere sviluppata in serie della forma

$$(3) \quad A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)}{n!} D^n \varphi.$$

Ne segue che, sotto condizioni di convergenza, la ricerca delle quali, almeno in quanto debbano essere sufficienti, non presenterà difficoltà nei singoli casi ai quali si darà luogo particolarizzando le classi S ed S' e l'operazione (φ, f) , si potrà porre l'aggiunta di \bar{A} sotto la forma :

$$(4) \quad \bar{A}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} D^n [\alpha_n(z) f].$$

11. — Nella formula precedente si faccia in particolare $\alpha_n = a^n$, essendo a una costante, e si avrà immediatamente che l'aggiunta

⁽¹⁾ Vedasi SCHLESINGER, *Handbuch der Lineardifferentialgl.*, Bd. I, pag. 58.

⁽²⁾ *Mém. sur le Calcul fonctionnel*, § 63.

di $\varphi(x+a)$ è $f(z-a)$. Onde segue che l'aggiunta della differenza finita $\varphi(x+1) - \varphi(x)$ è $f(z-1) - f(z)$. Applicando questo risultato ad una forma lineare alle differenze

$$F = \alpha_0(x)\varphi(x) + \alpha_1(x)\varphi(x+1) + \dots + \alpha_p(x)\varphi(x+p),$$

si ottiene come operazione aggiunta

$$\bar{F} = \alpha_0(z)f(z) + \alpha_1(z-1)f(z-1) + \dots + \alpha_p(z-p)f(z-p).$$

All'equazione $F = 0$ corrisponde dunque la $\bar{F} = 0$; questa equazione, che ho chiamata *inversa* della prima, mi si è presentata in molte occasioni nelle mie ricerche sulle equazioni lineari alle differenze finite ⁽¹⁾, ed il suo primo membro è stato studiato dal BORTOLOTTI ⁽²⁾ sotto il nome di *forma aggiunta* della F .

12. — Suppongasi che l'operazione A ammetta una radice φ_1 , da $A(\varphi_1) = 0$ risulterà, poichè l'operazione (φ, f) è a determinazione unica, che sarà $(A(\varphi_1), f) = 0$, e per conseguenza

$$(\varphi_1, \bar{A}(f)) = 0.$$

Se questa non si riduce ad una identità, essa ci darà una relazione alla quale soddisfano tutte le funzioni $A(f)$, in altre parole le $A(f)$ non sono elementi qualunque della classe S' , ma appartengono a quella classe S'_1 contenuta in S' , i cui elementi g soddisfano all'equazione $(\varphi_1, g) = 0$. Questa classe S'_1 è evidentemente tale che la combinazione lineare di quanti si vogliano suoi elementi appartiene alla classe stessa. Usando il linguaggio geometrico e considerando pertanto S', S'_1, \dots come spazi lineari, abbiamo il seguente teorema:

VIII. *Se l'operazione A ammette uno spazio (lineare) S_r di radici contenuto in S , e $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r$ costituiscono un sistema fondamentale di radici contenute in questo spazio, l'operazione aggiunta \bar{A} farà corrispondere in generale allo spazio S' , lo spazio $S^{(r)}$ contenuto in S' e formato dalle funzioni g che soddisfano alle equazioni*

$$(\varphi_i, g) = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r).$$

⁽¹⁾ Vedasi, per es., Memorie dell'Accad. di Bologna, S. IV, T. IX, 1890.

⁽²⁾ Rendiconti delle R. Accad. dei Lincei, S. V, T. V, p. 349, 1896.

13. — Data un'operazione distributiva a determinazione unica A , e generalizzando un concetto della teoria delle equazioni differenziali, si può chiamare *moltiplicatore* di A una funzione λ tale che sia $\lambda A = DB$, B essendo una nuova operazione distributiva a determinazione unica. Sia λ un tale moltiplicatore ed A, B le aggiunte di \bar{A}, \bar{B} ; si avrà dalla relazione (1) e dai teoremi V e VII:

$$(\lambda^{-1}DB(\varphi), f) = (\varphi, -\bar{B}D(\lambda^{-1}f));$$

onde segue che, fatto $f = \lambda$, l'operazione \bar{B} è applicata ad un elemento nullo e dà quindi zero come risultato. Ma $\bar{A}(f) = -\bar{B}D(\lambda^{-1}f)$, e quindi λ è radice di \bar{A} ; onde:

IX. *I moltiplicatori di un'operazione sono radici della operazione aggiunta.*

14. — Consideriamo, come applicazione, gli spazi S ed S' definiti come segue. Gli elementi φ di S , che diremo *punti*, siano le serie di potenze intere positive della variabile x , convergenti entro un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio superiore ad un numero positivo r ; gli elementi f di S' , che diremo *piani*, siano le serie di potenze intere negative di x convergenti fuori di un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio inferiore ad r . Non si escluderà che gli elementi di S' possano anche contenere qualche termine con potenza positiva (o nulla) di x , ma non si riguarderanno come diversi due elementi che differiscano solo per i coefficienti di tali termini. Ad esempio, si avrà

$$\varphi = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots,$$

$$f = \dots + \frac{u_0}{x} + \frac{u_1}{x^2} + \dots + \frac{u_n}{x^{n+1}} + \dots$$

Come operazione (φ, f) , si definirà il residuo, per $x = 0$, di $f(x)\varphi(x)$, ossia

$$(5) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \varphi(x)f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n,$$

dove, nell'integrale definito, l'integrazione è estesa alla circonferenza (r) , e dove si verifica immediatamente che sono soddisfatte le quattro condizioni imposte nel §2 ad una tale operazione. I punti φ , dato il piano f_1 , per i quali è soddisfatta la relazione $(\varphi, f_1) = 0$, si

diranno, secondo la nomenclatura introdotta in una Nota precedente (1), appartenere al piano f_1 , e viceversa il piano f_1 appartiene a questi punti.

Sia ora A un'operazione distributiva a determinazione unica la quale, applicata a punti dello spazio ora definito S , riproduca punti del medesimo spazio. Essa potrà, ad esempio, venire definita mediante le serie (punti) che essa fa corrispondere alle potenze intere positive (e nulla) della variabile x , cioè da

$$(6) \quad A(x^n) = a_{n0} + a_{n1}x + \dots + a_{nv}x^v + \dots;$$

o, ciò che è lo stesso, dal quadro dei coefficienti

$$(Q) \quad \begin{cases} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0v} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1v} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

Analogamente, l'operazione \bar{A} aggiunta di A , e che trasformi i piani di S' in piani, sia definita da

$$(7) \quad \bar{A}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) = \frac{b_{n0}}{z} + \frac{b_{n1}}{z^2} + \dots + \frac{b_{nv}}{z^{v+1}} + \dots,$$

ossia dal quadro

$$(Q') \quad \begin{cases} b_{00} & b_{01} & b_{02} & \dots & b_{0v} & \dots \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1v} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

Ma l'operazione \bar{A} è data, per definizione, da

$$\int_{(r)} A[\varphi(x)]f(x) dx = \int_{(r)} \varphi(x) \bar{A}[f(x)] dx;$$

ora, facendo $\varphi(x) = x^m$, $f(x) = 1/x^{u+1}$, si ottiene immediatamente

$$a_{mu} = b_{\mu m}.$$

Onde:

X. Se l'operazione \bar{A} è l'aggiunta di A , il quadro (Q') si ottiene da (Q) mutando le linee in colonne e viceversa.

(1) Questo Rendiconto, sessione del 30 gennaio 1898.

15. — Se l'operazione A ha le radici $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r$, linearmente indipendenti, queste definiscono uno spazio lineare S_r ad r dimensioni immerso in S ; l'operazione A è degenerare di specie $r + 1$. Ma la relazione

$$(A(\varphi_i), f) = (\varphi_i, \bar{A}(f)) = 0$$

dimostra che le $\bar{A}(f)$ appartengono tutte allo spazio lineare $S^{(r)}$ di piani, costituito da tutti i piani di S' che contengono lo spazio S_r di punti. Riferiamoci ora ad un'osservazione già accennata altre volte ⁽¹⁾; che cioè negli spazi ad infinite dimensioni le proprietà delle omografie degeneri si scindono, essendovi operazioni distributive A che hanno radici, senza che le $A(\varphi)$ appartengano ad uno spazio meno esteso di S (cioè contenuto in S , ma non identico) ed operazioni che, sebbene non abbiano radici, proiettano lo spazio S su uno spazio meno esteso; mentre negli spazi ad un numero finito di dimensioni queste due proprietà si accompagnano necessariamente. Potremo distinguere queste due particolarità, dando alla prima il nome di *degenerescenza di primo genere*, e all'altra il nome di *degenerescenza di secondo genere*, le due degenerescenze potendo presentarsi o no insieme. Usando questa locuzione, potremo dire:

XI. *Se un'operazione presenta la degenerescenza di primo genere, la sua aggiunta presenta quella di secondo genere, e viceversa.*

16. — Consideriamo infine quei punti φ di S in cui sono nulli i coefficienti delle potenze di x superiori ad n , e quei piani f di S' in cui sono nulli i coefficienti delle potenze di x inferiori a $-(n + 1)$; facciamo anche la stessa ipotesi sui coefficienti delle (6) e delle (7). Veniamo così a considerare spazi S_n, S'_n ad n dimensioni contenuti rispettivamente in S, S' , e le A, \bar{A} sono sostituzioni lineari od omografie di questi spazi. Ora, per il teorema X, od anche per la relazione (1) che si può ancora scrivere

$$(\varphi, f) = (\bar{A}^{-1}(\varphi), A(f)),$$

si vede immediatamente che le sostituzioni A^{-1}, \bar{A} sono fra di loro in quella relazione per cui si dicono dualistiche o contrarie ⁽²⁾, talchè:

XII. *L'operazione aggiunta di una data omografia è l'omografia contraria dell'inversa della data.*

⁽¹⁾ Questo Rendiconto, Nota citata del 30 gennaio 1898; e Rendiconti del R. Istituto Lombardo, adunanza del 15 luglio 1897.

⁽²⁾ Questa espressione è quella usata del Prof. D'OVIDIO (*Geometria analitica*, pag. 63, Torino, Bocca, 1896).