SALVATORE PINCHERLE

A proposito di un recente teorema del Sig. Hadamard

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Vol. **3** (1898-1899), p. 67–74

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 85–90

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_85>

19 [100].

A proposito di un recente teorema del Sig. Hadamard.

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna;
(Nuova Serie) 3, 67-74 (1898-1899).

1. — Il Sig. HADAMARD enunciava nel 1897 (1) un notevole teorema sulle funzioni analitiche, e ne pubblicava nell'anno seguente (2) la dimostrazione. Questo teorema è il seguente:

Date le serie di potenze

$$\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

la serie

$$\gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$$

definisce una funzione analitica che non può avere altri punti singolari all'infuori di quelli della forma $x = uv$, essendo genericamente u e v i punti singolari delle funzioni definite rispettivamente dalle serie $\alpha(x)$ e $\beta(x)$.

La dimostrazione di questo teorema, fondata sulla considerazione di integrali curvilinei, veniva più recentemente semplificata dal Sig. BOREL (3), il quale inoltre, in seguito ad una comunicazione verbale del Sig. E. LINDELÖF, riconosceva anche al detto teorema un caso di eccezione. Nel suo lavoro il BOREL fa osservare che se si riguarda una delle due funzioni date, per esempio la $\alpha(x)$, come fissa, e l'altra $\beta(x)$ come arbitrariamente variabile, la $\gamma(x)$ è il

(1) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, T. CXXIV, p. 492.
(2) Acta Mathem., T. XXII, p. 55.
(3) Bulletin de la Soc. Math. de France, T. XXVI, p. 238, 1898.

risultato di una determinata operazione distributiva eseguita sul soggetto $\beta(x)$. La presente Nota è diretta a dare alcune proprietà di questa operazione, a porla sotto forma di una serie che permetta di esprimere la continuazione analitica della $\gamma(x)$, infine a mostrare come dallo studio di questa serie e delle sue condizioni di convergenza si possa, in molti casi, ottenere il teorema di HADAMARD senza che occorra il sussidio degli integrali curvilinei.

2. — Definisco un'operazione distributiva U, applicabile alle serie di potenze intere e positive di x, mediante la posizione

$$U(x^n) = a_n x^n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Questa operazione [1] applicata ad una serie di potenze $\beta(x) = \Sigma\, b_n x^n$ dà

$$U(\beta) = \Sigma\, a_n b_n x^n; \tag{2}$$

la serie così ottenuta è convergente in un cerchio di raggio non nullo se tali sono le serie $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, e definisce la funzione $\gamma(x)$. Ora, ogni operazione distributiva applicabile ad una serie arbitraria di potenze intere positive di x, è rappresentabile, come ho dimostrato [2], mediante una serie ordinata per le derivate successive della funzione arbitraria. Per il caso della operazione U si trova immediatamente

$$U(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(1)\, \frac{x^n}{n!}\, \frac{\mathrm{d}^n \beta(x)}{\mathrm{d}x^n}, \tag{3}$$

dove si è posto

$$\alpha_n(1) = a_n - n\, a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\, a_{n-2} - \ldots + (-1)^n a_0.$$

Si ha quindi l'eguaglianza

$$\Sigma\, a_n b_n x^n = \Sigma\, \alpha_n(1)\, \frac{x^n}{n!}\, \frac{\mathrm{d}^n \beta(x)}{\mathrm{d}x^n},$$

(1) L'operazione U è una di quelle che ho chiamate *normali* nella Nota « *Appunti di Calcolo funzionale distributivo,* Rendic. del R. Istituto Lombardo, 15 luglio 1897 ».

(2) *Mémoire sur le Calcul fonctionnel distributif,* Math. Ann., XLIX, 1897.

valida per tutte le funzioni analitiche, regolari in un intorno di $x = 0$, che rendono il secondo membro convergente assolutamente ed uniformemente, e per tutti i valori di x di modulo sufficientemente piccolo.

3. — Consideriamo, accanto all'operazione U, l'operazione U_z definita da

$$U_z(x^n) = a_n z^n x^n .$$

Applicandola alla $\beta(x)$ viene

$$U_z(\beta) = \Sigma\, a_n b_n z^n x^n = \Sigma\, \alpha_n(z) \frac{x^n}{n\,!} \frac{\mathrm{d}^n \beta(x)}{\mathrm{d}\, x^n} ,$$

dove si è posto

$$\alpha_n(z) = a_n z^n - n\, a_{n-1} z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a_{n-2} z^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_0 .$$

Se ora si muta qui $\beta(x)$ in $\beta(x/z)$, si ricade sulla $U(\beta)$. Si ottiene pertanto, per l'operazione U, l'espressione analitica seguente:

$$U(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(z) \frac{x^n}{n\,!} \frac{\mathrm{d}^n \beta(x/z)}{\mathrm{d}\, x^n} . \tag{4}$$

L'operazione distributiva accennata dal Sig. Borel e che, in un intorno di $x = 0$, è rappresentata dalla (2), si ha quindi in una regione generalmente più vasto, mediante l'espressione (4); in una regione eccedente quell'intorno ma contenente il punto $x = 0$, essa dà la continuazione analitica della serie (2). Per $z = 1$ la (4) si riduce allo sviluppo (3).

4. — Vogliamo ora occuparci delle condizioni di convergenza della serie (4). Premetterò le due seguenti notazioni. Per esprimere che una serie $\Sigma\, k_n x^n$ ha r come raggio di convergenza, scriverò

$$k_n \backsim 1/r^n .$$

Poi, dati due punti nel piano x rappresentati dai valori $x = p$, $x = q$, indicherò con $C_\lambda(p, q)$ il cerchio luogo dei punti x tali che sia $|x - p| : |x - q| = \lambda$. Variando λ da 0 ad $+\infty$, si ottiene un fascio di cerchi, aventi come asse radicale la perpendicolare al segmento $p \ldots q$ nel suo punto di mezzo. Ogni cerchio del fascio divide il piano in due regioni, l'una contenente il punto p e l'altra il punto q, e che si diranno rispettivamente *regione* (p) e *regione* (q) del cerchio; per $C_\lambda(p,q)$ in cui è $\lambda < 1$, la regione (p) è finita e (q) infinita, e inversamente se è $\lambda > 1$; per $\lambda = 1$ le due regioni sono infinite, poichè $C_1(p,q)$ non è altro che l'asse radicale del fascio.

5. — Ciò posto, se indichiamo genericamente con v i punti singolari della funzione $\beta(x)$, vz saranno quelli della funzione $\beta(x/z)$ e, per le condizioni di convergenza dello sviluppo di TAYLOR per le funzioni analitiche, si avrà, indicando con $v_j z$ il più prossimo ad x fra i punti vz,

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n \beta(x/z)}{d x^n} \backsim \frac{1}{|x - v_j z|^n}. \tag{5}$$

Per ottenere le condizioni di convergenza assoluta della serie (4) occorre ora cercare quel numero positivo r_z tale che sia

$$\alpha_n(z) \backsim \frac{1}{r_z^n}.$$

Questo numero si trova facilmente come segue. Facciamo, nella (4), $\beta(x) = \dfrac{1}{1-x}$; la $U(\beta)$ si riduce alla $\alpha(x)$, e lo sviluppo (4) diviene:

$$\alpha(x) = z \,\Sigma\, a_n(z) \frac{x}{(z-x)^{n+1}} \quad (^1).$$

Consideriamo, fra i cerchi $C_\lambda(0,z)$, quello che, passando per uno o più punti singolari u_i di $\alpha(x)$, lascia tutti gli altri nella sua regione (z). Siccome, posto

$$\frac{x}{z-x} = t, \quad \text{onde} \quad x = \frac{zt}{1+t},$$

questo cerchio corrisponde al cerchio $|t| = \lambda$ del piano t, e la regione (z) di $C_\lambda(0,z)$ corrisponde all'interno del cerchio $|t| = \lambda$,

---

(1) Questa formula dà la sostituzione — generalizzazione di quella di EULER — che il Sig. ERNST LINDELÖF ha presa come punto di partenza di interessanti ricerche sulle singolarità delle funzioni analitiche (Acta Soc. Scient. Fennicæ, T. XXIV, n°. 7, 1898).

così la serie $\Sigma\, \alpha_n(z)\, t^n$ converge entro questo cerchio $|t| = \lambda$, e si ha pertanto

$$\alpha_n(z) \backsim \frac{1}{\lambda^n}\,.$$

E poichè sulla circonferenza $C_\lambda(0, z)$ si trova il punto u_i, viene

$$\alpha_n(z) \backsim \left| \frac{z - u_i}{u_i} \right|^n. \tag{6}$$

6. — Dalle (5) e (6) segue la condizione di convergenza dello sviluppo (4), nei seguenti termini:

Per tutti i punti x di una regione T contenente il punto $x = 0$, per la quale si può determinare un punto z tale che sia

$$\left| \frac{x}{x - v_j\, z} \right| < \varepsilon \left| \frac{u_i}{z - u_i} \right|, \tag{7}$$

dove ε è un numero positivo minore di uno, la serie (4) *è convergente assolutamente, uniformemente e rappresenta la funzione $\gamma(x)$.*

7. — La condizione (7) si può anche scrivere

$$\left| \frac{x}{x - v_j\, z} \right| < \varepsilon \left| \frac{u_i\, v_j}{u_i\, v_j - v_j\, z} \right|. \tag{8}$$

I limiti delle regioni di convergenza della serie (4) sono dunque dati da

$$\left| \frac{x}{x - v_j\, z} \right| = \left| \frac{u_i\, v_j}{u_i\, v_j - v_j\, z} \right|;$$

ora questa equazione rappresenta la circonferenza $C(0, v_j\, z)$ passante per il punto $u_i\, v_j$. Per un altro valore di z, z', il limite di convergenza sarà un secondo cerchio $C(0, v_j\, z')$ che, per z' abbastanza prossimo a z, passerà per lo stesso punto $u_i\, v_j$; siccome poi le circonferenze sono caratterizzate dall'esistenza, su di esse, di qualche singolarità della funzione $\gamma(x)$, così si intuisce come le singolarità della $\gamma(x)$ siano i punti $u_i\, v_j$, ed in ciò consiste il teorema di HADAMARD (1).

---

(1) Si vede ancora come il punto $x = 0$ appartenga a tutte queste circonferenze; ciò spiega l'eccezione segnalata dal Sig. BOREL al teorema di HADAMARD.

8. — Notiamo alcuni casi particolari.

a) La $\alpha(x)$ sia uniforme, ed abbia il solo punto singolare $x = u$. Si prenda z molto prossimo ad u; si potrà allora, per ogni x che non sia della forma uv_j, soddisfare alla diseguaglianza (7); la serie (4), in cui è fatto $z = u$, rappresenta pertanto la $\gamma(x)$ in tutto il piano, eccettuati i punti uv_j.

b) La $\alpha(x)$ sia uniforme, ed abbia un numero finito di punti singolari $u_1, u_2, \dots, u_m$, tutti finiti e differenti da $x = 0$. Si può scomporre $\alpha(x)$ in

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha^{(i)}(x),$$

essendo

$$\alpha^{(i)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i.n}\, x^n, \qquad (i = 1, 2, 3, \dots, m),$$

e la $\alpha^{(i)}(x)$ è singolare come $\alpha(x)$ nel solo punto u_i. Posto

$$U_i(x^n) = a_{i,n} x^n,$$

si ha

$$U(\beta) = \sum_{i=1}^{m} U_i(\beta)$$

e quindi

$$U(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(i)}(u_i) \frac{x^n}{n\,!} \frac{d^n \beta(x/u_i)}{d\, x^n}, \tag{9}$$

dove le $\alpha_n^{(i)}(z)$ sono formate con $\alpha^{(i)}(x)$ come le $\alpha_n(z)$ con $\alpha(x)$. Sotto questa forma si vede che la $\gamma(x)$ è rappresentata dalla serie (9) assolutamente convergente in tutto il piano, eccettuati i punti della forma $u_i v_j$.

c) Supponiamo infine che la $\alpha(x)$ abbia una linea di punti singolari, o un taglio, che partendo da un punto u vada all'infinito sul prolungamento del vettore $0 \dots u$; la $\beta(x)$ abbia il solo punto singolare $x = v$. Descrivo allora il cerchio di centro uv e di raggio $|uv|$; preso x dovunque, fuori del prolungamento del vettore $0 \dots uv$, unisco 0 con x e da uv tiro la parallela s ad $0 \dots x$, infine prendo il simmetrico di 0 rispetto ad s. Indico questo punto con vz. Per questo punto la condizione (8) è manifestamente soddisfatta, e quindi la $\gamma(x)$ è rappresentata dalla serie (4) in tutto il piano, eccettuati i punti del prolungamento di $0 \dots uv$.