Salvatore Pincherle

Di alcune operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità in una funzione analitica

Annali di Matematica pura e applicata, Serie 3, Vol. **4** (1900), p. 219–280

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 91–157

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_91>

20 [109].

Di alcune operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità in una funzione analitica.

Annali di Matematica pura e applicata (Milano);
(3) **4**, 219-280 (1900).

Una serie ordinata per le potenze intere positive di una variabile x,

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

definisce, come è noto, una funzione analitica che il metodo detto della continuazione analitica permette di calcolare in tutto il campo della sua validità. Tutte le proprietà della funzione sono dunque contenute nella legge di successione dei coefficienti a_n della serie; è però cosa assai difficile, in generale, mettere in evidenza la dipendenza fra le proprietà della funzione e quelle della successione a_n. Per quanto gli analisti si siano occupati da oltre un secolo della questione, pure si è lungi dal potere rispondere alla seguente domanda:

Si può, ed in quale modo, da proprietà verificabili sulla successione dei numeri a_n, rilevare il numero, la posizione e la natura delle singolarità della funzione definita dalla serie (1)?

La prima idea che si presenta alla mente in una simile ricerca, è di considerare i coefficienti a_n come i valori di una funzione $a(t)$ di una variabile t, per i valori $0, 1, 2, \dots$ della variabile stessa. Bene inteso, la funzione $a(t)$ non è definita completamente da queste condizioni, e non lo è nemmeno se si impone di essere analitica; si possono però aggiungere condizioni opportune, atte a completare convenientemente la determinazione della $a(t)$. Fra questa e la funzione $f(x)$ definita dalla serie (1) passa allora una relazione, o *corrispondenza funzionale*, che è stata considerata già da lungo tempo;

essa è stata notata per primo dal LAPLACE ([1]), che ha chiamato $f(x)$ funzione *generatrice* di $a(t)$, e questa funzione *determinante* di $f(x)$. Questo autore e, poco dopo di lui, l'ABEL ([2]) hanno sviluppato buon numero di relazioni formali che intercedono fra una generatrice e la sua determinante. Tali ricerche, riprese da vari autori con indirizzo più moderno e coi sussidi più potenti che col CAUCHY, col RIEMANN e col WEIERSTRASS si sono acquistati nella teoria delle funzioni, hanno dato risultati interessanti, fra i quali mi preme di ricordare i seguenti:

a) La funzione generatrice si esprime mediante un integrale definito sotto cui compare la determinante, e reciprocamente. In molti casi, l'integrale definito va esteso ad una curva nel piano della variabile d'integrazione, riguardata come complessa. La determinazione di una delle due funzioni, data l'altra, conduce in generale ad un problema d'inversione d'integrale definito.

b) Quando la funzione generatrice soddisfa ad una equazione differenziale lineare a coefficienti razionali in x, la determinante soddisfa ad una equazione lineare alle differenze finite, a coefficienti pure razionali in t, e viceversa. Questa osservazione ha permesso di stabilire tipi di equazioni lineari, differenziali o alle differenze ([3]), integrabili per mezzo di integrali definiti.

Ma risultati non meno notevoli si sono avuti quando la dipendenza fra la successione a_n dei coefficienti e la funzione $f(x)$ si è considerata sotto un altro punto di vista; quando si è trattato cioè di collegare fra di loro i due seguenti elementi: *singolarità* della funzione generatrice da una parte, *comportamento asintotico* della successione dei coefficienti dall'altra. Questo punto di vista interviene per la prima volta in una Memoria del sig. DARBOUX ([4]), dove sono ottenuti risultati per alcuni dei casi più semplici; abbandonato per vari anni, esso si presenta di nuovo in lavori recenti

---

([1]) *Mémoires* de l'Académie des Sciences 1779; *Théorie analytique des probabilités* (Paris, 1812). Cfr. LACROIX, *Traité du Calcul différentiel et intégral,* T. III, pag. 322 (Paris, 1819).

([2]) Œuvres, 2ème éd., T. II, Mém. XI.

([3]) V. per es. le mie Note: *Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate,* Rendic. della R. Accad. dei Lincei, 1888; e varie Memorie del sig. HJ. MELLIN negli *Acta Math.,* T. VIII e segg..

([4]) *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres,* J. de Math., 1878.

dei Sigg. HADAMARD (1), BOREL (2), FABRY (3), LEAU (4) ed altri. Da questi lavori si può, in casi determinati, dedurre il posto e talvolta la natura delle singolarità della funzione analitica definita dalla serie $\Sigma\, a_n\, x^n$ dal comportamento asintotico della successione a_n. In tali ricerche non si fa uso ordinariamente della determinante $a(t)$ come funzione analitica di t, sebbene il BOREL, nelle osservazioni suggestive della sua Nota citata, abbia consigliato di ricorrervi (5).

Il presente lavoro si propone di recare un contributo alla teoria della dipendenza fra la funzione generatrice e la determinante, studiando alcune operazioni distributive che mentre da una parte aggiungono, o tolgono, singolarità di specie determinata alla funzione generatrice, recano d'altra parte alla funzione determinante modificazioni corrispondenti, in guisa che da queste si può dedurre la natura delle singolarità introdotte od eliminate, e reciprocamente. Però, questo studio va preceduto da alcuni paragrafi nei quali si completa in qualche punto la teoria delle operazioni distributive, teoria di cui ho fatto conoscere gli elementi in pubblicazioni anteriori (6). La presente Memoria verrà pertanto divisa in tre Capitoli. Nel primo si tratterà della trasformazione di un'operazione mediante un'altra; si considereranno più specialmente quelle operazioni che trasformano una data operazione nell'operazione di moltiplicazione, e si verrà in tal guisa ad ottenere (nel modo più elementare ed indipendente da considerazioni di integrali definiti) l'operazione (che verrà detta *operazione C*) avente la proprietà di mutare ogni generatrice nella sua determinante. Altre operazioni speciali importanti

---

(1) J. de Mathém., 1892.

(2) Vedasi *Mémoire sur les séries divergentes* (Ann. de l'Éc. Norm., 1889) e *Leçons sur la théorie des fonctions* (Paris, 1898), passim; e specialmente la Nota in « Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, 12 déc. 1898 ».

(3) Ann. de l'Éc. Norm., 1896; Acta Math., T. XXII, 1898; Journal de Mathém., 1898.

(4) Comptes Rendus, 5 décembre.

(5) Circa la dipendenza fra il carattere analitico della funzione generatrice ed il comportamento della sua determinante esistono altri risultati, di natura più speciale, che non hanno attinenza col presente lavoro, ma che non è inutile ricordare. Questi risultati, ottenuti mediante ricerche che si fondano sulla natura aritmetica della determinante e che presentano difficoltà di altra specie, ma non minori di quelle relative al comportamento asintotico, si trovano in lavori di EISENSTEIN, HEINE, TCHEBITCHEFF, GOMES-TEIXEIRA, PINCHERLE ed altri.

(6) Riassunte in gran parte nel *Mémoire sur le Calcul fonctionnel distributif*, Math. Ann., T. XLIX, 1897.

si presentano come semplici modificazioni di questa; tale è la trasformazione ben nota di LAPLACE e quella di cui il Sig. BOREL ha recentemente (1) fatto uso nello studio delle trascendenti intere. Il secondo Capitolo è dedicato allo studio di operazioni distributive che, per la loro semplicità e simmetria, sono sembrate meritevoli del nome di *normali*; esse si presentano come generalizzazione spontanea di quelle forme differenziali lineari che, uguagliate a zero, dànno le equazioni della classe del FUCHS. Di queste operazioni si studiano poi le composizioni fra di loro e con operazioni di moltiplicazione. Infine nel terzo Capitolo si tratta dell'argomento principale di questo lavoro: sono definite le singolarità che si dicono semplici per una funzione analitica; si trova che ad ognuna di esse corrisponde un'operazione A, suscettibile di togliere la singolarità; inversamente, l'operazione inversa A^{-1} introduce, nella funzione alla quale essa si applica, quella singolarità medesima, a meno che la funzione non soddisfi ad una speciale condizione. Ciò accade nel modo stesso che l'operazione di moltiplicazione per $x-z$ toglie un polo di primo ordine nel punto $x=z$, mentre l'operazione di divisione per $x-z$, eseguita su una funzione regolare per $x=z$, vi introduce un polo di primo ordine in quel punto, a meno che la funzione non soddisfi alla condizione di annullarsi per $x=z$. Le trasformate CAC^{-1} di queste operazioni A mediante l'operazione C definita nella prima parte sono operazioni che portano sulla funzione determinante della funzione $f(x)$ soggetta ad A; esse indicano quali modificazioni arrecano ai coefficienti della serie di potenze che rappresenta $f(x)$ la presenza o l'eliminazione della singolarità corrispondente. Infine colla composizione di più operazioni A o delle loro inverse si tolgono o si introducono nelle funzioni analitiche singolarità più complesse; e si termina coll'applicazione delle cose dette alle singolarità che vengono tolte da forme differenziali lineari della classe del FUCHS, o vengono introdotte dalla risoluzione delle equazioni corrispondenti.

---

(1) Acta Mathematica, T. XXI, p. 243.

CAPITOLO I.

Operazioni trasformatrici.

I. — Richiamo di alcune proposizioni dalla teoria delle operazioni distributive.

1. — Nelle ricerche che seguono, come in molte altre, è opportuno considerare la totalità delle serie di potenze di una variabile x come un insieme, o *spazio*, di cui ogni singola serie costituisce un elemento. Un tale insieme ha evidentemente un numero infinito di dimensioni; esso verrà indicato con la lettera S. Ogni serie di potenze si può riguardare come un punto dello spazio S, ed i coefficienti della serie si possono considerare come le coordinate del punto (1).

Ogni serie di potenze ha un cerchio di convergenza di raggio determinato (nullo, finito od infinito). Ci accadrà spesso di dovere considerare l'insieme delle serie di potenze il cui raggio è maggiore del modulo di un numero x. Questo insieme verrà denotato con S_x. È chiaro che se è $|z| > |z'|$, l'insieme S_z è contenuto in $S_{z'}$. L'insieme delle serie di potenze il cui raggio di convergenza non è nullo è S_0.

2. — Poichè una funzione analitica, che supporremo ammettere un ramo regolare nell'intorno del punto $x = 0$, è completamente determinata dal suo sviluppo in serie di potenze nell'intorno di quel punto, così ogni elemento $\alpha(x)$ di S, il cui raggio di convergenza non è nullo, definisce una funzione analitica di cui un ramo è regolare nell'intorno di $x = 0$. Per schivare le discussioni relative a funzioni non uniformi, sarà opportuno ricorrere al concetto di *stella* quale è stato recentemente introdotto dal MITTAG-LEFFLER. Rimandando, per la definizione di questo concetto, alla sua Memoria (2), converremo di indicare ad un tempo con $\alpha(x)$ e la serie di

---

(1) Vedasi la mia Nota: *Cenno sulla Geometria dello spazio funzionale,* Rendic. della R. Accademia delle Scienze di Bologna, 14 febbraio 1897. Cfr. T. CAZZANIGA, *Intorno ai reciproci dei determinanti normali,* pag. 21, Rendic. della R. Accad. delle Scienze di Torino, 16 aprile 1899.

(2) MITTAG-LEFFLER, *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène,* Acta Math., T. XXIII, pag. 43, 1899.

potenze di S che si considera, ed il ramo della funzione analitica definita da questa serie esistente ed univocamente determinata nella stella appartenente alla successione $\alpha(0)$, $\alpha'(0)$ [1], $\alpha''(0)$, ...

3. — È noto che agli elementi di S sono applicabili operazioni che riproducono enti dell'insieme stesso o di un insieme analogo. Fra queste operazioni hanno speciale importanza quelle che ammettono la proprietà distributiva (*operazioni distributive*) e che vanno riguardate, ciò che ho fatto osservare altre volte, come le omografie dello spazio S.

Un'operazione distributiva A è determinata in S quando si conoscono le funzioni che essa fa corrispondere agli elementi 1, x, $x^2, \dots, x^n, \dots$ di S. Porremo:

$$A(x^n) = \xi_n(x), \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{1}$$

Si sa allora come ne consegua, per le funzioni $\varphi(x)$ di un insieme convenientemente definito in S, lo sviluppo

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)}{n!} D^n \varphi, \tag{2}$$

in cui D è l'operazione di derivazione, e le $\alpha_n = \alpha_n(x)$ sono funzioni dipendenti dalle $\xi_n = \xi_n(x)$ mediante le relazioni:

$$\alpha_n = \xi_n - n\,x\,\xi_{n-1} + \binom{n}{2} x^2\,\xi_{n-2} - \dots + (-1)^n x^n\,\xi_0. \tag{3}$$

Da queste relazioni si ricavano, inversamente, le ξ_n in funzione delle α_n:

$$\xi_n = \alpha_n + n\,x\,\alpha_{n-1} + \binom{n}{2} x^2\,\alpha_{n-2} + \dots + x^n \alpha_0 \quad (^2). \tag{4}$$

4. — Le operazioni distribuitive più semplici sono la moltiplicazione, la derivazione e la sostituzione.

---

(1) Con $\alpha'(x)$ si indica $\dfrac{d\alpha}{dx}$.

(2) V. il mio lavoro: *Mémoire sur le Calcul fonctionnel distributif*, Cap. II., Math. Annal., Bd. XLIX. Questo lavoro verrà d'ora innanzi citato con $M.$ seguito dal numero del paragrafo.

a) Facendo il prodotto di un elemento *arbitrario* $\varphi(x)$ di S per una funzione analitica *data* $\mu(x)$ si ha l'operazione di moltiplicazione, che rappresento con M_μ. La funzione $\mu(x)$ si può dire moltiplicatore. Considerando moltiplicatori appartenenti ad S, le varie operazioni di moltiplicazione formano un gruppo, sono fra loro commutabili e sono formate colla moltiplicazione M_x di moltiplicatore x; se cioè

$$\mu(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots,$$

si avrà:

$$M_\mu = c_0 + c_1 M_x + c_2 M_x^2 + \dots.$$

b) Per la derivazione si userà il solito simbolo D. La formula (2) dimostra che ogni operazione distributiva si può esprimere come somma di numero finito od infinito di prodotti di moltiplicazioni per derivazioni.

c) La sostituzione è l'operazione che consiste nel sostituire alla variabile x, in un elemento *arbitrario* $\varphi(x)$ di S, la funzione analitica data $\mu(x)$. Questa operazione la rappresento con S_μ. Per essa lo sviluppo (2) diviene:

$$S_\mu(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\mu(x) - x]^n}{n!} D^n \varphi.$$

Le operazioni di sostituzione formano un gruppo, non però commutabile.

5. — Quando un'operazione è stata definita per gli elementi di uno spazio S, è spesso possibile estenderla anche agli elementi di un nuovo spazio S' che comprenda S; ciò, anche quando la primitiva definizione non sia immediatamente applicabile in S'. Questa estensione si fa col mezzo del noto principio di *permanenza*, che l'HANKEL (1) ha enunciato per le operazioni fondamentali dell'Aritmetica, ma che conserva il suo valore in tutte le parti della scienza dei numeri (2). Per applicare questo principio si procederà in generale nel seguente modo.

---

(1) *Theorie der komplexen Zahlensystemen*, § 3 (Leipzig, 1867).

(2) È così, per esempio, che la derivata si può definire mediante la regola $D x^n = n x^{n-1}$ per tutto l'insieme S_0. Osservato poi che in questo insieme essa ha la proprietà di essere il limite del rapporto incrementale, si viene ad assumere questa proprietà come definizione della derivata in ogni insieme più esteso.

Supposto di avere un' operazione A definita per gli elementi di un insieme S, sia indicato con a l'insieme di proprietà, fra loro indipendenti, di cui gode la A nell'insieme S. La definizione data per A in S non sia applicabile ad un nuovo insieme S' che comprenda S e sia più esteso. Si possa ora, in qualunque modo, definire in S' un'operazione A_1 soggetta alle condizioni:

a) di coincidere con A quando degli elementi di S' si considerano quelli soli che appartengono ad S,

b) di godere delle proprietà a che valgono a determinarla in S'.

Sotto queste condizioni si riterrà applicabile il sopra citato principio di permanenza e si dirà che la A_1 è la stessa operazione A estesa al nuovo insieme S'.

6. — L'osservazione precedente permette di estendere a tutto l'insieme delle funzioni analitiche alcune operazioni originariamente definite per il solo spazio S_0. Questo è manifestamente il caso per le operazioni di moltiplicazione, derivazione e sostituzione; con ciò, in M_μ ed S_μ, μ potrà rappresentare una funzione analitica qualunque, anche non appartenente ad S_0.

Quando parleremo genericamente di operazioni applicabili all'insieme delle funzioni analitiche, ammetteremo solo che ad una funzione dell'insieme esse facciano corrispondere funzioni dell'insieme stesso. Con *spazio funzionale* intenderemo poi, sia tutto l'insieme delle funzioni analitiche, sia una parte di esso, colla condizione però che se α e β appartengono a questa parte vi appartenga anche $\alpha + \beta$.

7. — Prima di chiudere queste osservazioni preliminari, conviene notare un altro aspetto che si può dare alle operazioni distributive applicate agli elementi di S. Si abbia un'operazione A per la quale sia:

$$A(x^n) = \xi_n(x) = a_{n0} + a_{n1}\, x + a_{n2}\, x^2 + \dots + a_{n\nu}\, x^\nu + \dots .$$

Applicando questa operazione all'elemento di S, si ha

$$\varphi(x) = k_0 + k_1\, x + k_2\, x^2 + \dots ,$$

ed ammesso che questa serie sia stata presa in modo che risulti uniformemente convergente la $\Sigma\, k_n\, \xi_n$ in un intorno di $x = 0$, si avrà

$$A(\varphi) = g_0 + g_1\, x + g_2\, x^2 + \dots = \psi(x), \tag{5}$$

dove i coefficienti g_n dipendono dai coefficienti k_n per mezzo delle relazioni

$$g_n = a_{0n} k_0 + a_{1n} k_1 + \dots + a_{\nu n} k_n + \dots . \tag{6}$$

Sotto questa forma si vede che all'operazione A, che trasforma $\varphi(x)$ in $\psi(x)$, corrisponde un'operazione rappresentata dalla (6), la quale applicata a k_n lo trasforma in g_n; si ha cioè, in altra forma, una trasformazione lineare in uno spazio ad infinite dimensioni. È sotto questa forma che esse sono considerate dal Sig. CAZZANIGA [1] per il caso del determinante normale (d'ordine infinito) non nullo; e a questo proposito notiamo che non sarebbe nè difficile, nè inopportuno, ricondurre lo studio dei determinanti d'ordine infinito a considerazioni sulle operazioni distributive.

II. — Trasformazioni nelle operazioni.

8. — Siano A, B due operazioni distributive a determinazione unica, definite nell'insieme delle funzioni analitiche. Si dirà che B è *trasformata* di A mediante una terza operazione distributiva X, quando si abbia:

$$XAX^{-1} = B. \tag{7}$$

Si dirà ancora che X trasforma A in B.

In uno spazio funzionale in cui X sia a determinazione unica, la (7) equivale ancora a

$$XA = BX,$$

e a

$$X^{-1}BX = A.$$

9. — Per vedere quale grado di indeterminazione presenti la X quando siano date A e B, si ammetta che X ed Y siano due operazioni che trasformano A in B, e si ponga $X = KY$ onde $X^{-1} = Y^{-1}K^{-1}$. Dalle

$$XAX^{-1} = B, \quad YAY^{-1} = B,$$

verrà

$$B = KYAY^{-1}K^{-1}, \qquad \text{onde} \qquad B = KBK^{-1}.$$

---

(1) Nota citata, § 2.

Quest'ultima relazione esprime che K è commutabile con B; reciprocamente, se K è un'operazione qualunque commutabile con B e B è trasformata di A mediante X, lo è anche mediante KX.

Analogamente, se in uno spazio in cui Y è a determinazione unica, B è trasformata di A mediante Y, lo è anche mediante YH, essendo H un'operazione arbitraria commutabile con A; reciprocamente, se X ed Y trasformano A in B e si pone $X = YH$, H è commutabile con A.

10. — Essendo $a_0, a_1, a_2, \ldots$ una successione, finita o no, di costanti, è noto che l'operazione

$$a_0 A^0 + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots \tag{8}$$

è, nel suo campo di validità, commutabile con A. Ponendo

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

la (8) si può rappresentare simbolicamente con $f(A)$. Ora è

$$XA = BX,$$

onde:

$$XA^2 = BXA = B^2X,$$

ed in generale, per ogni valore di n intero e positivo,

$$XA^n = B^nX.$$

Da ciò [1], sostituendo A^0 coll'unità, segue

$$X(a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots) = (a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + \ldots)X,$$

o infine:

$$Xf(A)\,X^{-1} = f(B); \tag{9}$$

e questa relazione si estende senza difficoltà al caso che $f(A)$ contenga potenze negative di A.

La formula (9) ci mostra che non solo, mediante una trasformazione X, ad operazioni commutabili corrispondono operazioni

---

[1] Nell'applicare l'operazione distributiva ad una serie, conviene tenere presenti le osservazioni fatte in $M.$, § 48.

commutabili (il che è affatto ovvio), ma anche che una data funzione di A [1] si trasforma nella stessa funzione di B.

11. — Se X trasforma A in B, ed Y trasforma B in C, YX trasformerà A in B. Infatti, da

$$XAX^{-1} = B, \qquad YBY^{-1} = C,$$

risulta immediatamente:

$$YXAX^{-1}Y^{-1} = C.$$

Da questo teorema segue che se si ha una classe di operazioni $A, B, C, \ldots$ e si conoscono le operazioni che trasformano un'operazione fissa P nelle operazioni della classe, si conosceranno anche quelle che trasformano le operazioni della classe l'una nell'altra. Infatti, si avrà:

$$XPX^{-1} = A, \qquad YPY^{-1} = B, \qquad \ldots,$$

$$P = X^{-1}AX = Y^{-1}BY = \ldots,$$

onde, per il teorema precedente, YX^{-1} trasformerà A in B.

12. — Sempre nell'ipotesi di limitarci ad un campo funzionale in cui X è univoca, o, come si può anche dire, considerando un *ramo univoco* della X, avremo, per il §**10**,

$$XA = BX, \quad XA^2 = B^2X, \quad \ldots, \quad XA^n = B^nX, \quad \ldots.$$

Se ora, nello spazio funzionale considerato, A non ha radici ed ω è una radice di B,

$$AX^{-1}(\omega), \quad A^2X^{-1}(\omega), \quad \ldots, \quad A^nX^{-1}(\omega), \quad \ldots$$

saranno radici di X. Reciprocamente, se $A(\alpha)$ è radice di X senza che lo sia α, $X(\alpha)$ sarà radice di B ed $A^2(\alpha)$, $A^3(\alpha)$, $\ldots$, $A^n(\alpha)$ saranno radici di X.

---

(1) Circa il concetto di *funzione di un' operazione* vedasi LEVI-CIVITA: *Sui gruppi di operazioni funzionali,* pag. 4 (Rendic. dell'Ist. Lombardo, T. XXVIII, 1895).

III. — Le operazioni trasformatrici.

13. — Essendo M_x l'operazione di moltiplicazione per x (§ 4), chiameremo *operazione trasformatrice* di un'operazione data A un'operazione X che trasformi M_x in A. La trasformatrice è dunque definita dall'equazione

$$XM_xX^{-1} = A. \tag{10}$$

In altri termini, se φ è un elemento del campo funzionale che si considera, sarà

$$X(x\varphi) = AX(\varphi), \tag{11}$$

e ricordando [1] che con *derivata funzionale* di un'operazione X s'intende l'operazione $X'(\varphi) = X(x\varphi) - xX(\varphi)$, ne viene che la trasformatrice di A soddisfa all'equazione differenziale simbolica [2]:

$$X' = (A - x)X. \tag{12}$$

14. — Ogni operazione H commutabile con M_x è una moltiplicazione, poichè la $HM_x = M_xH$ equivale ad $H' = 0$, e si è dimostrato che l'operazione, la cui derivata funzionale sia nulla, è una moltiplicazione [3]. Reciprocamente, ogni moltiplicazione è commutabile con M_x. Se dunque si è trovata la trasformatrice X di una data operazione A, questa trasformatrice applicata al gruppo delle moltiplicazioni lo trasformerà nel gruppo delle operazioni commutabili con A.

In particolare, se è

$$\mu(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

si avrà, per il § 10,

$$XM_\mu X^{-1} = \mu(A). \tag{13}$$

15. — La formula precedente, che rappresenta l'enunciato di un teorema per il caso che il moltiplicatore μ sia una serie di potenze di x, si può assumere come definizione di $\mu(A)$ nel caso che

---

(1) *M.*, § 56.

(2) Su queste equazioni differenziali simboliche vedasi: *Di un'equazione funzionale simbolica, ecc.,* Rendic. della R. Accad. dei Lincei, 19 febbraio 1899.

(3) *M.*, § 60.

μ sia una funzione analitica qualunque; potremo dire cioè che con $\mu(A)$ intenderemo una delle determinazioni di $X M_\mu X^{-1}$, essendo X la trasformatrice di A.

In particolare,

$$X(x^m \varphi) = A^m X(\varphi) \tag{14}$$

si potrà prendere come definizione di A^m per ogni valore di m, scegliendo opportunamente la determinazione di X [1].

16. — Dalle cose dette nel §9, e dall'osservazione del §14 che le operazioni commutabili con M_x sono le moltiplicazioni, risulta che se X è un ramo univoco della trasformatrice di A, gli altri suoi rami saranno rappresentati da XM_μ, essendo $\mu(x)$ una funzione arbitraria. L'arbitrarietà del fattore M_μ fa sì che, avendosi un ramo X_1 della trasformatrice di A tale che sia $X_1(\lambda) = \alpha$, basterà prendere $X_2 = X_1 M_\lambda$ per avere con X_2 un ramo della trasformatrice tale che dia $X_2(1) = \alpha$. Basterà dunque che α sia nel campo di validità di uno dei rami di X^{-1} per avere un ramo di X che applicato ad 1 produca la funzione α.

17. — Passiamo ora alla determinazione effettiva di X, supposta data la A. Applicando all'equazione (12) la derivazione funzionale [2], si ottiene senza difficoltà:

$$X'' = (A^2 - 2xA + x^2)X,$$

quindi

$$X''' = (A^3 - 3xA^2 + 3x^2A - x^3)X,$$

e così via. Ponendo

$$(A - x)_m = A^m - mxA^{m-1} + \binom{m}{2} x^2 A^{m-2} - \dots + (-1)^m x^m,$$

il che, bene inteso, non è da confondersi colla m^{sima} potenza dell'operazione $A - x$, si ha, per la derivata funzionale m^{sima} della X,

$$X^{(m)} = (A - x)_m X. \tag{15}$$

---

(1) È in questo modo che in *M.*, §§ 105 e seg., si è definita la derivata d'indice qualunque mediante un'equazione funzionale simbolica che si deduce, in sostanza, dalla formula (14). Vedasi più avanti, al § 26.

(2) *M.*, § 58.

Fatto $X(1) = \alpha$, da cui

$$X^{(m)}(1) = A^m(\alpha) - mxA^{m-1}(\alpha) + \dots + (-1)^m x^m \alpha,$$

viene, per la formula (¹) che dà lo sviluppo di un'operazione distributiva in serie procedente secondo le potenze intere positive della derivata,

$$X(\varphi) = X(1)\varphi + X'(1)\varphi' + \frac{1}{1.2} X''(1)\varphi'' + \dots,$$

ossia:

$$X(\varphi) = \alpha\,\varphi + (A - x)\,\alpha . \varphi' + \frac{1}{1.2}(A - x)_2\,\alpha . \varphi'' + \dots . \tag{16}$$

Siccome poi per ogni serie di tale forma esiste un campo funzionale di validità, costituito per lo meno dalle funzioni razionali intere, così rimane dimostrata l'esistenza di trasformatrici per ogni operazione A. La multiplicità di determinazioni della X è poi rivelata dall'arbitrarietà della funzione α nella posizione $X(1) = \alpha$; il che è d'accordo con quanto è stato osservato al § 16.

18. — Essendo α una funzione qualunque, le $\alpha, \alpha x, \alpha x^2, \dots$ definiscono uno spazio funzionale che si può chiamare *intorno* di α. Quando un'operazione K ammette come radici le αx^i, per $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$, ne consegue:

$$K(\alpha) = K'(\alpha) = \dots = K^{(m-1)}(\alpha) = 0,$$

e lo sviluppo di K in serie ordinata per le potenze di D comincia col termine in D^m. Quando poi K ammette come radici le αx^i per tutti i valori interi positivi di i, quello sviluppo cessa di avere significato: in tale caso si potrà dire che α è *elemento singolare* per K, od anche che K è singolare per l'elemento α.

19. — Ora, le operazioni trasformatrici ammettono, in generale, elementi singolari. A dimostrarlo, consideriamo la trasformatrice X di un'operazione A, e sia ω una radice di A; inoltre, ω appartenga al campo di validità di uno dei rami di X^{-1} (il che accadrà in ge-

---

(¹) *M.*, § 63.

nerale) per modo che $X^{-1}(\omega) = \alpha$. Si avrà allora (cfr. § 12):

$$X(x\alpha) = A(X(\alpha)) = 0, \quad X(x^2\alpha) = AX(x\alpha) = 0, \quad \dots,$$

$$X(x^m\alpha) = A\,X(x^{m-1}\alpha) = 0,$$

per ogni m intero. L'elemento $x\alpha$ è dunque singolare per X. In quanto ad α stessa, esso dà:

$$X(\alpha) = \omega, \; X'(\alpha) = -x\omega, \quad \dots, \; X^{(m)}(\alpha) = (-1)^m x^m \omega,$$

da cui, essendo φ un elemento dell'insieme S_0,

$$X(\alpha\varphi) = \omega\left(\varphi - x\varphi' + \frac{x^2}{1.2}\varphi'' - \dots\right);$$

cioè, siccome la serie tra parentesi non è altro che la costante $\varphi(0)$, l'operazione X fa corrispondere all'intero spazio $\alpha\varphi$, lo spazio ad una dimensione $c\omega$, dove c è una costante arbitraria.

La presenza di elementi singolari nelle operazioni trasformatrici dà, per così dire, un carattere di trascendenza a queste operazioni. Infatti le operazioni di natura più elementare fra le distributive (come le forme differenziali lineari, le forme lineari alle differenze, le sostituzioni, ecc.) non ammettono elementi singolari.

20. — Se X è trasformatrice di A, ed α non annulla X mentre l'annulla αx, αx sarà elemento singolare di X. Infatti, dall'equazione di definizione della trasformatrice:

$$X(x\varphi) = AX(\varphi)$$

segue, facendo $\varphi = \alpha$, che $X(\alpha)$ è radice di A; si ricade quindi nella ipotesi del paragrafo precedente, ed X è singolare per l'elemento αx.

IV. — Alcune trasformatrici speciali.

21. — Ci proponiamo ora di dare alcuni esempi di operazioni trasformatrici particolari. Cerchiamo anzitutto la trasformatrice dell'operazione di moltiplicazione M_μ. Dovendo essere

$$X M_x X^{-1} = M_\mu,$$

ossia

$$X(x\varphi) = \mu(x)\,X(\varphi),$$

ne verrà, indicando al solito con X' la derivata funzionale di X,

$$X' = \{\mu(x) - x\} X . \tag{17}$$

Ora questa è un'equazione differenziale simbolica appartenente ad una classe di equazioni che io ho studiate e risolute in altri lavori [1], dai quali risulta che la soluzione generale dell'equazione (17) è data da λS_μ, dove λ è una funzione arbitraria ed S_μ è l'operazione di sostituzione di $\mu(x)$ ad x [§4, c)]. Ne viene che la trasformatrice di una moltiplicazione M_μ, all'infuori di una moltiplicazione (la cui arbitrarietà risulta dal §16), è la sostituzione corrispondente S_μ. Reciprocamente, ogni sostituzione è trasformatrice della moltiplicazione corrispondente.

22. — Cerchiamo la trasformatrice della derivazione. Essa sarà definita da

$$X M_x X^{-1} = D \quad \text{od} \quad X(x\varphi) = DX(\varphi) . \tag{18}$$

Ne viene che posto $X(\varphi) = \psi$, ed indicate le derivate con accenti, si avrà

$$X(\varphi) = \psi , \quad X(x\varphi) = \psi' , \quad X(x^2 \varphi) = \psi'' , \quad \dots . \tag{19}$$

In particolare, possiamo giovarci dell'arbitrarietà che rimane in X secondo il §16, e porre $X(1) = \alpha$, dove α è una funzione arbitraria; viene allora:

$$X(1) = \alpha , \quad X(x) = \alpha' , \quad X(x^2) = \alpha'' , \quad \dots , \tag{20}$$

onde

$$X(e^{ax}) = \alpha(x + a) . \tag{21}$$

23. — La formula richiamata al §17 serve a darci lo sviluppo della trasformatrice di D in serie ordinate per le derivate successive dell'elemento φ; posto $X(\mu) = \alpha$, questa formula diviene:

$$X(\mu\varphi) = \alpha\,\varphi + (\alpha' - x\,\alpha)\,\varphi' + \frac{1}{1.2}(\alpha'' - 2\,x\,\alpha' + x^2\,\alpha)\,\varphi'' + \dots ; \tag{22}$$

---

[1] *Sopra alcune equazioni simboliche,* Mem. della R. Accad. delle Scienze di Bologna, S. V, T. V, 1895. Cfr. anche *M.*, § 65 e seguenti.

ogni diversa determinazione di μ ed α ci darà un ramo diverso della trasformatrice di D. Esaminiamo alcuni speciali fra questi rami.

24. — a) Ponendo dapprima $\mu = 1$, $\alpha = e^{ax}$, viene dalla (22):

$$X(\varphi) = e^{ax}\left(\varphi + (a - x)\,\varphi' + \frac{(a - x)^2}{1.2}\,\varphi'' + \ldots\right),$$

e quindi per lo spazio funzionale S_a sarà:

$$X(\varphi) = e^{ax}\,\varphi(a).$$

Esiste dunque un ramo della trasformatrice di D che fa corrispondere a tutte le funzioni dello spazio S_a una medesima funzione moltiplicata per una costante, cioè uno spazio ad una sola dimensione [1]. Questo ramo ammette uno spazio di radici ad infinite dimensioni, cioè tutte le funzioni di S_a per le quali è $\varphi(a) = 0$.

b) Essendo μ una funzione arbitraria, poniamo $\alpha = 1$. Dalla (19) viene

$$X(\mu) = 1\,, \quad X(x\mu) = X(x^2\,\mu) = \ldots = 0\,.$$

La $x\mu$ sarà dunque un elemento singolare per la X; ciò proviene dal fatto (§19) che questo ramo della X fa corrispondere a μ la radice 1 dell'operazione D. Applicando nuovamente a questo ramo l'equazione di definizione (18), si ottiene, essendo $a_0, a_1, a_2, \ldots$ costanti arbitrarie introdotte colle successive quadrature,

$$X\left(\frac{\mu}{x}\right) = x + a_0\,, \quad X\left(\frac{\mu}{x^2}\right) = \frac{x^2}{1.2} + a_0\,x + a_1\,, \quad \ldots,$$

$$X\left(\frac{\mu}{x^n}\right) = \frac{x^n}{n!} + a_0\,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + a_1\,\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + a_{n-2}\,x + a_{n-1}.$$

Facendo $\mu = 1/x$, e prendendo eguali a zero le costanti d'integrazione, si ottiene una determinazione della X per la quale è:

$$X(1/x^n) = x^{n-1}/(n-1)!\,. \tag{23}$$

---

(1) È questa una delle operazioni aventi il massimo grado di degenerescenza e che sono indicate colle lettere C nei §§ 79 e seguenti del M.

c) Ponendo invece $\mu = 1$, $\alpha = 1/x$, le (19) dànno:

$$X(x^n) = (-1)^n\, n!/x^{n+1}\,, \tag{24}$$

altro ramo della trasformatrice di D, pure degno di osservazione.

25. — La nota operazione funzionale che va sotto il nome di trasformazione di LAPLACE è una delle trasformatrici della derivazione. Infatti, essa si può definire [1] mediante due equazioni simboliche, una delle quali è precisamente la (18). Essa può anche definirsi come una trasformatrice di D, la cui *aggiunta* [2] è pure trasformatrice di D [3]. Fra i rami di X enumerati al paragrafo precedente, quelli che soddisfano alle equazioni (23) e (24) sono appunto rami della trasformazione di LAPLACE.

26. — Nel §15 abbiamo definito la funzione $\mu(A)$ di una operazione come risultato della trasformazione M_μ per mezzo della trasformatrice di A. Se X è trasformatrice della derivazione, la funzione $\mu(D)$ di D si potrà dunque definire con

$$X M_\mu X^{-1} = \mu(D)\,. \tag{25}$$

In particolare, essendo r un numero qualunque. la $X x^r X^{-1}$ si potrà indicare con D^r. Vi è però in questa posizione l'arbitrarietà dipendente dalla scelta del ramo di X che figura nella (25). Prendendo in particolare per X la trasformazione di LAPLACE, cioè quella che oltre alla (18) soddisfa anche a:

$$X D\varphi = -\, x\, X(\varphi)\,,$$

si trova con un calcolo facile che, posto $Xx^rX^{-1} = A$, la A soddi-

---

(1) U. AMALDI, *Sulla trasformazione di Laplace*, Rendic. della R. Accad. dei Lincei, S. V, T. VII, 1898.

(2) V. la mia Nota: *Sull'operazione aggiunta di una data*, Rendic. dell'Accad. di Bologna, 17 Aprile 1878.

(3) AMALDI (loc. cit.) dimostra che l'aggiunta della trasformazione di LAPLACE coincide colla trasformazione stessa. Reciprocamente, se si pone che una trasformatrice X della derivazione debba ammettere come aggiunta $\overline{X}$ una trasformatrice della derivazione, la $\overline{X}$ dovrà verificare l'equazione $\overline{X}(x\varphi) = D\,\overline{X}(\varphi)$, insieme a quella che si ottiene prendendo l'aggiunta dei due membri della (18), che è (secondo la citata Nota sull'operazione aggiunta) $\overline{X} D\varphi = -\, x\, \overline{X}(\varphi)$: ora queste due equazioni sono appunto quelle che caratterizzano la trasformazione di LAPLACE.

sferà all'equazione differenziale simbolica $DA' = rA$, che è quella presa al § 105 del più volte citato *Mémoire* come equazione di definizione delle derivate d'indice qualunque.

27. — Ottenuta la trasformatrice di D, è facile ottenere le trasformatrici di operazioni commutabili con D, mediante la seguente osservazione generale. Sia X la trasformatrice di un'operazione A; si ha:

$$X M_\mu X^{-1} = \mu A .$$

Ma al § **21** si è visto che

$$S_\mu M_x S_\mu^{-1} = M_\mu ,$$

onde

$$X S_\mu M_x S_\mu^{-1} X^{-1} = \mu(A) .$$

La trasformatrice di $\mu(A)$ è dunque XS_μ. Se dunque X è trasformatrice di D, e $\mu(D)$ è un'operazione commutabile con D, la regola precedente permette subito di trovarne la trasformatrice.

28. — In particolare, assumiamo la trasformazione di LAPLACE come trasformazione della derivazione ed indichiamola con L; essa soddisfa alle due equazioni (§ **26**) che la determinano:

$$L(x\varphi) = DL(\varphi) , \quad LD\varphi = -xL(\varphi) ,$$

che possiamo anche scrivere

$$L M_x L^{-1} = D , \quad L^{-1} M_x L = -D , \tag{26}$$

le quali esprimono che L è trasformatrice di D ed L^{-1} di $-D$. Consideriamo ora un'operazione della forma

$$K = LS_\mu .$$

Essa soddisferà a due equazioni che si deducono dalle (26); la prima sarà

$$K M_x K^{-1} = \mu (D), \tag{27}$$

ed esprimerà che K è la trasformatrice dell'operazione $\mu(D)$. In quanto alla seconda, osservo dapprima che la trasformata di D mediante S_μ^{-1} non è altro che il prodotto dell'operazione D per il moltiplicatore

$\nu(x) = \mu'(\mu_{-1}(x))$ (¹), cioè

$$S_\mu^{-1} D S_\mu = M_\nu D ,$$

come si verifica subito. Ciò posto, la seconda delle (26) dà:

$$S_\mu^{-1} D S_\mu = - S_\mu^{-1} L^{-1} M_x L S_\mu = - K^{-1} M_x K ,$$

e quindi

(28) $$K^{-1} M_x K = - M_\nu D .$$

Se ne conclude che K^{-1} è la trasformatrice del prodotto della D per il moltiplicatore fisso ν.

29. — Di quanto precede si può fare l'applicazione a due casi particolarmente interessanti, il secondo dei quali ci darà quell'operazione di cui si è fatto cenno nell'Introduzione al presente lavoro e che permette (impiegando la terminologia del LAPLACE) il passaggio dalla funzione generatrice alla sua determinante. Di queste operazioni darò qui quel tanto che è necessario per le applicazioni che se ne devono fare, proponendomi di riprenderle in un altro lavoro per uno studio più approfondito.

Il primo caso si ottiene facendo nell'operazione $K = LS_\mu$ del paragrafo precedente, $\mu = 1/x$. Indicando con B l'operazione così ottenuta, si trova che per essa le equazioni (27) e (28) divengono:

(29) $$B M_x B^{-1} = D^{-1} , \quad B^{-1} M_x B = x^2 D ;$$

l'operazione B è dunque la trasformatrice di D^{-1}, e la sua inversa è quella di $x^2 D$. A questa operazione si potrebbe dare il nome di trasformazione di BOREL, per l'uso sistematico che ne ha fatto questo autore (²) per trasformare serie di potenze sempre divergenti in serie aventi un raggio di convergenza non nullo, o serie convergenti in un cerchio di raggio finito in serie convergenti in tutto il piano.

(¹) Con $\mu_{-1}(x)$ indico secondo una notazione usuale, la funzione inversa di $\mu(x)$.

(²) *Sur les séries de Taylor,* Journ. de Math., 1896, Comptes Rendus, 14 décembre 1896; *Sur les séries de Taylor,* Acta Math., T. XXI, 1897, etc. .

Un ramo dell'operazione di BOREL si ha dal ramo di L (1) definito dalle equazioni (23) e vale per uno spazio di serie di potenze positive di x; esso è definito dalle eguaglianze:

$$B(x^n) = x^{n-1}/(n-1)\,! ; \tag{30}$$

un secondo ramo si ha invece dal ramo della L definito dalla (24), e vale per serie di potenze negative di x; per esso si ha:

$$B(1/x^n) = (-1)^n\, n\,!/x^{n+1}. \tag{31}$$

Le equazioni di definizione (29) sono evidentemente soddisfatte tanto colle prime formule che colle seconde, mentre esse permettono di definire l'operazione di BOREL anche in spazi funzionali in cui le (30) o le (31) non sono applicabili.

30. — Il secondo caso particolare al quale vogliamo accennare si ottiene facendo nell'operazione $K = LS_\mu$ e del § 28, la funzione μ eguale ad e^{-x}. Indicando con C l'operazione così definita, le equazioni (26) dànno:

$$C\,M_x\,C^{-1} = e^{-D}, \quad C^{-1}\,M_x\,C = xD. \tag{32}$$

L'operazione e^D essendo quella che muta x in $x+1$ in una funzione di x, cioè quella che viene ordinariamente indicata nel calcolo delle differenze col simbolo θ, introdotto dal CASORATI, si avrà, per la prima delle (32),

$$C\,M_x\,C^{-1} = \theta^{-1}.$$

Ora, l'operazione che applicata ad una serie di potenze ne dà il coefficiente di x^n considerato come funzione dell'indice (2), (o, in altre parole, l'operazione che fa passare dalla funzione generatrice alla sua

(1) I vari rami dell'operazione di LAPLACE sono controdistinti dai diversi spazi funzionali su cui porta l'operazione (cfr. AMALDI, Nota citata). A questi corrispondono pure vari rami per l'operazione B studiata in questo paragrafo e per l'operazione C considerata nel paragrafo successivo, l'una e l'altra dedotte da L. Sulla questione del come avvenga il passaggio da un ramo all'altro (passaggio possibile poichè basta uno dei rami a determinare l'operazione) non è qui il luogo di trattenersi.

(2) Considerata per esempio dal BOREL nella Nota dei *Comptes Rendus* del 12 dicembre 1898.

determinante) gode appunto delle proprietà espresse dalle equazioni (32); e poichè queste equazioni determinano la C come le (26) determinano la L, così l'operazione in discorso è un ramo dell'operazione C ora definita.

L'operazione C è la trasformatrice di θ^{-1}, mentre la sua inversa è la trasformatrice di xD. Da ciò la sua proprietà, di trasformare le equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali in equazioni lineari alle differenze pure a coefficienti razionali. Tralasciando per ora di insistere sulle proprietà di questa operazione, mi limiterò ad indicare un ramo di essa, valido per l'intorno della funzione esponenziale. Se si pone

$$C(e^{ax}) = a^x F(x),$$

dove $F(x)$ rappresenta il fattoriale, cioè è uguale ad $\dfrac{1}{\Gamma(x+1)}$, si ha per ogni n intero e positivo, mediante applicazione della prima delle (32),

$$C(x^n e^{ax}) = a^{x-n} F(x)\, x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1),$$

e si verifica senz'alcuna difficoltà che in questo modo è soddisfatta anche la seconda delle (32).

CAPITOLO II.

Operazioni normali.

I. — Operazioni normali d'ordine nullo.

31. — Definiremo un'operazione distributiva applicabile all'insieme S delle serie di potenze, mediante le equazioni:

$$U(x^n) = a_n x^n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{1}$$

dove $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ è una successione di numeri dati. Una tale operazione verrà detta *normale di ordine nullo;* un'operazione normale d'ordine nullo è individuata dalla successione dei numeri a_n, e le varie operazioni che si possono fare corrispondere alle diverse successioni verranno rappresentate colla lettera U, affetta o no da indici. Per brevità, chiameremo operazioni U le operazioni normali di ordine nullo.

32. — Dalla definizione delle operazioni U risultano immediatamente le seguenti proposizioni:

a) la somma di due o più operazioni U è un'operazione U;

b) il prodotto di due operazioni U è un'operazione U, e perciò le operazioni U formano un gruppo;

c) il prodotto di due operazioni U è commutativo;

d) una funzione razionale intera a coefficienti costanti di più operazioni U è pure un'operazione U; e se indichiamo con $F(u_1, u_2, \dots, u_r)$ una funzione razionale intera delle indeterminate $u_1, u_2, \dots, u_r$, e poniamo

$$U_i(x^n) = a_{in}\, x^n, \quad (i = 1, 2, \dots, r;\ n = 0, 1, 2, \dots),$$

si avrà:

$$F(U_1, U_2, \dots, U_r)(x^n) = F(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{rn})\, x^n.$$

33. — Suppongasi tutti i numeri a_n che figurano nelle (1) differenti da zero. L'operazione U non ha allora radici nello spazio S; la U^{-1} è a determinazione unica in questo spazio, ed essendo

$$U^{-1}(x^n) = x^n/a^n, \tag{2}$$

è essa stessa un'operazione U. Quando uno dei coefficienti, per esempio a_r, è nullo, l'operazione U ha la radice x^r; l'operazione U^{-1} è allora a determinazione multipla, poichè si può aggiungere ad una sua determinazione la cx^r, dove c è una costante arbitraria. Se sono nulli i p coefficienti:

$$a_{r_1}, \quad a_{r_2}, \quad \dots, \quad a_{r_p},$$

l'operazione U ammetterà lo spazio di radici ad r dimensioni:

$$c_1\, x^{r_1} + c_2\, x^{r_2} + \dots + c_p\, x^{r_p}, \tag{3}$$

colle p costanti arbitrarie $c_1, c_2, \dots, c_p$; e ad una determinazione di U^{-1} si potrà aggiungere la funzione arbitraria (3).

34. — Abbiamo visto al § 32 che le operazioni U formano un gruppo commutabile. Fra queste operazioni vi è la xD, definita da:

$$U(1) = 0, \quad U(x) = x, \quad \dots, \quad U(x^n) = n\, x^n, \quad \dots.$$

L'operazione xD ammette come sola radice in S la costante. Ogni operazione U è commutabile con xD; reciprocamente, se obblighiamo un'operazione A, defiuita nello spazio S dalle equazioni:

$$A(x^n) = a_{n0} + a_{n1}\, x + a_{n2}\, x^2 + \dots + a_{n\nu}\, x^\nu + \dots ,$$

alla condizione di essere commutabile con xD, si vede facilmente che questa condizione porta alla conseguenza che tutti i coefficienti $a_{n\nu}$ devono essere nulli ad eccezione di a_{nn}, e quindi che la A è un'operazione U.

35. — Fra le operazioni del gruppo delle U si trova la sostituzione S_{zx}, definita da

$$S_{zx}(x^n) = z^n\, x^n.$$

Considerando, in queste uguaglianze, le z come un parametro arbitrario, queste sostituzioni formano un sottogruppo ∞^1 del gruppo delle operazioni U; si vede subito, posto $z = e^t$, che questo sottogruppo si riduce a quello delle traslazioni. Il sottogruppo S_{zx} contiene l'identità per $z = 1$; si verifica poi facilmente che la sua trasformazione infinitesima è l'operazione xD.

L'operazione $S_{zx}\, U$ si indicherà con U_z, e dalle (1) si ha:

$$U_z\,(x^n) = a_n\, z^n\, x^n . \tag{4}$$

36. — Formando le derivate funzionali successive di U, si trova:

$$U'\,(x^n) = U\,(x^{n+1}) - x\, U\,(x^n) \quad = (a_{n+1} - a_n)\, x^{n+1},$$

$$U''\,(x^n) = U'\,(x^{n+1}) - x\, U'\,(x^n) = (a_{n+2} - 2\, a_{n+1} + a_n)\, x^{n+2},$$

e così via. Analogamente:

$$U'_z\,(x^n) = (a_{n+1}\, z - a_n)\, x^{n+1},\ U''_z\,(x^n) = (a_{n+2}\, z^2 - 2\, a_{n+1}\, z + a_n)\, x^{n+2}, \dots ,$$

$$U_z^{(m)}(x^n) = \left\{ a_{n+m} z^m - m a_{n+m-1} z^{m-1} + \binom{m}{2} a_{n+m-2} z^{m-2} - \dots + (-1)^n a_n \right\} x^{n+m}.$$

37. — Qui sarà conveniente usare le notazioni del Calcolo delle differenze finite, e indicare con Δ la differenza di una funzione della variabile (o indice) n. Così Δ^2, Δ^3, ... saranno ordinatamente le differenze seconda, terza, ecc., per modo che

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \quad \Delta^2 a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n; \quad \dots .$$

Con notazione analoga, si indicherà con $\Delta_z a_n$ il binomio $a_{n+1} z - a_n$, ed in generale si porrà:

$$\Delta_z^m a_n = a_{n+m} z^m - m\, a_{n+m-1} z^{m-1} + \\ + \binom{m}{2} a_{n+m-2} z^{m-2} - \dots + (-1)^n a_n .$$

Potremo pertanto scrivere

$$U'_z(x^n) = x^{n+1} \Delta_z a_n, \quad \dots, \quad U_z^{(m)}(x^n) = x^{n+m} \Delta_z^m a_n,$$

ed in particolare

$$U'_z(1) = x \Delta_z a_0, \quad \dots, \quad U_z^{(m)}(1) = x^m \Delta_z^m a_0 .$$

Richiamando ora la formula che dà lo sviluppo di una operazione distributiva in serie ordinata per le potenze di D (§ 3), avremo per la U_z lo sviluppo

$$U_z(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Delta_z^n a_0 \cdot \varphi^{(n)}, \tag{5}$$

e in particolare, per $z = 1$,

$$U(\varphi) = a_0 \varphi + x \Delta a_0 \cdot \varphi' + \frac{x^2}{1.2} \Delta^2 a_0 \cdot \varphi'' + \dots . \tag{6}$$

Mutando qui $\varphi(x)$ in $\varphi(x/z)$, si ha per $U(\varphi)$ l'altra espressione:

$$U(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_z^n a_0 \frac{x^n}{n!} \frac{d^n \varphi(x/z)}{d x^n} \quad (^1). \tag{7}$$

---

(1) Considerando due operazioni U, U_1 date nella forma

$$U(x^n) = a_n x^n, \quad U_1(x^n) = a'_n x^n,$$

se ne ricavano le serie:

$$U(\varphi) = \Sigma b_n \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)}, \quad U_1(\varphi) = \Sigma b'_n \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)},$$

38. — L'operazione U è data, nello spazio S delle serie di potenze, dalle equazioni di definizione (1); da queste risulta formalmente lo sviluppo (6). Limitandosi al punto di vista formale, si può dire che tanto le (1) quanto la (6) definiscono la U per ogni serie di potenze. Si tratta ora di esaminare fino a che punto questo risultato formale abbia un significato effettivo: si è perciò condotti a distinguere due casi, secondo che il sistema dei numeri a_n introdotti nelle (1) è tale che la serie $\Sigma\, a_n x^n$ abbia, oppure no, un raggio (non nullo) di convergenza.

Nel primo caso, ogni serie $\varphi = \Sigma\, c_n x^n$ che abbia un raggio non nullo di convergenza appartiene al *campo di validità* della operazione U. Intendiamo con ciò che tanto le (1) quanto la (6), applicate alla serie φ, dànno risultato avente significato, ed i risultati ottenuti per queste due vie coincidono. Infatti, per le ipotesi fatte, essendo m, m', g, g' numeri positivi finiti, si avrà:

$$|a_n| < m\, g^n, \qquad |c_n| < m'\, g'^n,$$

onde:

$$|a_n\, c_n| < m\, m'\, g^n\, g'^n,$$

e la serie $\Sigma\, c_n a_n x^n$, ottenuta applicando la U alla serie φ, ha un raggio non nullo di convergenza. Inoltre, è

$$|\varDelta^n a_0| \leq |a_n| + n\,|a_{n-1}| + \binom{n}{2} |a_{n-2}| + \dots + |a_0|,$$

cioè:

$$|\varDelta^n a_0| < m\,(1+g)^n.$$

---

dove

$$b_n = \varDelta^n a_0, \quad b'_n = \varDelta^n a'_0.$$

Formando il prodotto UU_1, si avrà da una parte

$$U\, U_1\, (x^n) = a_n\, a'_n\, x^n,$$

dall'altra

$$U\, U_1\, (\varphi) \equiv \Sigma\, b''_n \frac{x^n}{n!}\, \varphi^{(n)}, \quad \text{con} \quad b''_n = \varDelta^n (a_0\, a'_0).$$

Sviluppando il calcolo, si otterrà facilmente per questa via l'espressione di $\varDelta^n (a_0\, a'_0)$ in funzione di $\varDelta^m a_0$, $\varDelta^m a'_0$, con $m \leq n$.

Di più, se r è il raggio di convergenza della serie φ, per tutti i valori di x il cui modulo è minore di $\frac{1}{2}r$, si ha

$$\left|\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}\right| < \frac{2^n m'}{r^n};$$

il termine generale della serie (6) è dunque inferiore a

$$\frac{2^n m m' (1+g)^n |x|^n}{r^n},$$

e qui basta prendere

$$|x| < \frac{r}{2(1+g)}$$

per rendere la serie (6) convergente assolutamente ed uniformemente. È lecito allora, per un noto teorema di WEIERSTRASS, ordinare il secondo membro della (6) per le potenze di x, e si ritrova $\Sigma c_n a_n x^n$. Ogni elemento φ di S_0 appartiene dunque al campo di validità di U.

39. — Anche nel secondo caso, in cui $\Sigma a_n x^n$ ha raggio nullo di convergenza, si può assegnare uno spazio S' contenuto in S e costituente un campo di validità per l'operazione U. Prendiamo, a tale uopo, una successione di numeri $k_0, k_1, \ldots, k_n, \ldots$ positivi, decrescenti e soddisfacenti alle diseguaglianze

$$k_n < m t^n / |a_n|, \tag{8}$$

essendo m e t numeri positivi arbitrariamente scelti. Dico che lo spazio S' è costituito da tutte le serie

$$\varphi = \Sigma c_n x^n$$

per le quali è $|c_n| < k_n$.

Intanto, è manifesto che applicando le (1) ad una tale serie si ottiene una serie di potenze a raggio di convergenza non nullo. Considerando poi la serie (6), si nota che il suo termine generale è, per $|x| < r$, inferiore a

$$\frac{r^n}{n!}\left\{|a_n| + n|a_{n-1}| + \binom{n}{2}|a_{n-2}| + \ldots + |a_0|\right\}\eta^{(n)}(r), \tag{9}$$

dove $\eta(r)$ è la serie a termini positivi $\Sigma k_n r^n$. Per la derivata n^{sima} di questa si ha l'espressione

$$\frac{\eta^{(n)}(r)}{n!} = k_n + (n+1)\, k_{n+1}\, r + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} k_{n+2}\, r^2 + \dots,$$

perciò si avrà, per essere le k_n decrescenti e per $r < 1$,

$$\frac{\eta^{(n)}(r)}{n!} < \frac{k_n}{(1-r)^{n+1}};$$

inoltre dalla (8) risulta

$$|a_n| < m \frac{t_n}{k_n}, \quad \text{onde} \quad |a_{n-1}| < m \frac{t^{n-1}}{k_{n-1}} < m \frac{t^{n-1}}{k_n},$$

e quindi:

$$|a_n| + n\,|a_{n-1}| + \binom{n}{2} |a_{n-2}| + \dots + |a_0| < m \frac{(t+1)^n}{k_n}.$$

L'espressione (9) risulta dunque inferiore a

$$\frac{m\,(t+1)^n\, r^n}{(1-r)^n},$$

e quindi, per $r < 1/(t+2)$, al termine generale di una progressione convergente. Sostituendo ora l'elemento φ nella (6), questa serie risulterà uniformemente convergente per $|x| < r$, e perciò sarà trasformabile in una serie di potenze che non potrà differire da $\Sigma\, c_n\, a_n\, x^n$.

40. — Dalle considerazioni dei due paragrafi precedenti risulta stabilito in ogni caso un campo S', contenuto entro S, per il quale è valida l'operazione U definita dalle (1). Ma se si considera una funzione non appartenente ad S, ad esempio x^ϱ per ϱ non intero positivo, le formule (1) non saranno applicabili, e l'operazione U, in quanto è definita da quella formula, non avrà alcun significato per una tale funzione. Però l'espressione (6), che in S' coincide colle (1), può conservare significato anche fuori di S. Siamo dunque condotti a considerare la (6) come definizione dell'operazione U in un campo più esteso di quello in cui valeva la definizione (1) originaria (§ 5), e a dire campo di validità S'' della U così estesa l'insieme delle funzioni analitiche che, sostituite in (6), la rendono uniformemente convergente in tutta un'area connessa nel piano della variabile x,

quest'area potendo o no contenere il punto $x = 0$. Evidentemente S' fa parte di S''.

41. — Per dare subito un'applicazione di questa estensione dell'operazione U, supponiamo il sistema dei coefficienti a_n tale che la serie $\Sigma \Delta^n a_0 . x^n$ sia convergente in un cerchio di raggio $|z| > 1$. Fatta allora $\varphi(x) = x^\varrho$, la serie (6) diviene:

$$U(x^\varrho) = x^\varrho \sum_{r=0}^{\infty} \Delta^n a_0 \frac{\varrho(\varrho - 1) \dots (\varrho - n + 1)}{1.2.3 \dots n}, \tag{10}$$

e per l'ipotesi fatta sulle a_n, la serie che qui figura nel secondo membro è una funzione intera di ϱ, tale da assumere i valori $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ per $\varrho = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$ [1]. Sotto le medesime ipotesi per le a_n, si ha

$$U(\log x) = a_0 \log x + b,$$

dove

$$b = \Sigma (-1)^n \frac{\Delta^n a_0}{n}.$$

42. — La proprietà delle operazioni U di essere commutabili con xD (§ 34) e che si conferma sulla serie (6), permette pure di ottenere il risultato dell'operazione stessa in uno spazio più esteso di S. Questa osservazione può servire a determinare la forma, ad esempio, di $U(x^\varrho)$; si ha infatti

$$U(xDx^\varrho) = xDU(x^\varrho),$$

ossia, posto $U(x^\varrho) = \lambda(x, \varrho)$, viene

$$U(\varrho x^\varrho) = x \frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, \varrho), \quad \varrho \lambda = x \frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

da cui

$$\lambda(\varrho, x) = a(\varrho) x^\varrho,$$

dove $a(\varrho)$ è una funzione di ϱ che per i valori interi $\varrho = n$ prende i valori a_n dati nelle (1).

---

(1) Essa coincide precisamente, come è facile verificare, collo sviluppo che si ottiene formando per mezzo della formula d'interpolazione di NEWTON estesa all'infinito dal signor BENDIXSON (Acta. T. IX, 1886) la funzione di ϱ che per $\varrho = 0, 1, 2, \dots$ assume ordinatamente i valori $a_0, a_1, a_2, \dots$.

43. — La trasformata di un'operazione U mediante l'operazione C definita al § 30 (operazione il cui effetto è di fornire la funzione generatrice di una data determinante) è un'operazione di moltiplicazione. Infatti, l'operazione C trasforma xD nella moltiplicazione M_x (§ 30) ed U è commutabile con xD. Inoltre, mediante una trasformazione un gruppo commutabile si muta in un gruppo commutabile (§ 10): onde il gruppo delle operazioni U, commutabile con xD, viene trasformato da C nel gruppo delle operazioni commutabili con M_x, le quali (§ 14) non sono altro che le moltiplicazioni.

44. — Diamo per ultimo un'altra espressione delle operazioni U pure fondata sull'osservazione che esse sono commutabili con xD. Ricordiamo perciò [1] che se A e B sono due operazioni distributive commutabili ed A ha una sola radice nel campo di validità di B, si ha per B uno sviluppo a coefficienti costanti ordinato per le potenze intere e positive di A:

$$B = k_0 + k_1 A + k_2 A^2 + \dots .$$

Ne viene che un'operazione U, poichè è commutabile con xD che ha per sola radice la costante, ammetterà uno sviluppo della forma:

$$U(\varphi) = k_0 \varphi + k_1 xD \varphi + k_2 \overline{xD}^2 \varphi + \dots + k_n \overline{xD}^n \varphi + \dots , \tag{11}$$

che non è difficile ricondurre alla serie (6), ed il cui campo di validità sarà costituito dalle funzioni φ che ne rendono uniformemente convergente il secondo membro.

II. — Risoluzione di un notevole sistema di infinite equazioni lineari ad infinite incognite.

45. — Lo sviluppo trovato nel paragrafo precedente per le operazioni U permette di risolvere in modo assai semplice un notevole sistema di infinite equazioni lineari ad infinite incognite, e

(1) *Sulle operazioni distributive commutabili con una operazione data,* Atti della R. Accad. di Torino, 23 giugno 1895.

precisamente il sistema

$$k_0 + k_1 n + k_2 n^2 + \dots + k_\nu n^\nu + \dots = a_n, \tag{12}$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots),$$

dove $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ sono numeri dati, e $k_0, k_1, \dots, k_n, \dots$ incognite da determinarsi.

Allo scopo, definiamo un'operazione U mediante le formule (1), dove per le a_n si prendano i secondi membri del sistema (12). Avremo per questa U uno sviluppo della forma (11), in cui, facendo $\varphi = x^n$, e poichè $\overline{x\,D}^m\, x^n = n^m x^n$, viene immediatamente

$$U(x^n) = (k_0 + k_1 n + k_2 n^2 + \dots + k_\nu n^\nu + \dots)\, x^n,$$

onde

$$k_0 + k_1 n + k_2 n^2 + \dots = a_n.$$

Il sistema (12) sarà dunque risoluto quando si sia trovato lo sviluppo sotto la forma (11) dell'operazione U definita da $U(x^n) = a_n x^n$.

46. — A determinare questo sviluppo osserviamo che si ha:

$$xD \log^m x = m \log^{m-1} x, \dots, \overline{x\,D}^m \log^m x = m!, \quad \overline{x\,D}^{m+1} \log^m x = 0,$$

dove con $\log^m x$ s'intende la m^{sima} potenza del logaritmo. Sostituendo, pertanto, nello sviluppo (11), a φ la funzione $\log^m x$, si ottiene:

$$\begin{aligned} U(\log^m x) &= k_0 \log^m x + m\, k_1 \log^{m-1} x + \\ &\qquad + m\,(m-1)\, k_2 \log^{m-2} x + \dots + m!\, k_m. \end{aligned} \tag{13}$$

Ma dallo sviluppo di U sotto la forma (6), cioè

$$U(\varphi) = b_0 + b_1 x \varphi + b_2 \frac{x^2}{1.2} \varphi'' + \dots, \tag{6}$$

in cui

$$b_0 = a_0, \quad b_n = \Delta^n a_0 = a_n - n\, a_{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} - \dots + (-1)^n a_0,$$

dal quale segue immediatamente

$$a_n = b_0 + n\, b_1 + \binom{n}{2} b_2 + \dots + b_n,$$

viene, sostituendo $\log^m x$ al posto di φ,

$$U(\log^m x) = b_0 \log^m x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} \frac{x^n \, d^n \log^m x}{d x^n}. \tag{14}$$

Si formino ora le derivate successive di $\log^m x$, le quali hanno la forma

$$\frac{d^n \log^m x}{d x^n} = \frac{1}{x^n} (m \, p_{n1} \log^{m-1} x +$$

$$+ m(m-1) \, p_{n2} \log^{m-2} x + \dots + m! \, p_{nm}),$$

dove $p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nm}$ sono coefficienti numerici fra cui sono nulli quelli per i quali è $n < m$. Sostituendo in (14) ed ordinando secondo le potenze del logaritmo, viene:

$$U(\log^m x) = b_0 \log^m x +$$

$$+ \sum_{h=1}^{m-1} m(m-1)\dots(m-h+1) \left\{ p_{h,h} \frac{b_h}{h!} + p_{h,h+1} \frac{b_{h+1}}{(h+1)!} + \dots \right\} \log^{m-h} x.$$

Il confronto di questo sviluppo con (13) dà:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = b_0 , \\ k_1 = p_{11} \, b_1 + p_{21} \dfrac{b_2}{2!} + p_{31} \dfrac{b_3}{3!} + \dots , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ k_m = p_{mm} \dfrac{b_m}{m!} + p_{m+1,m} \dfrac{b_{m+1}}{(m+1)!} + p_{m+2,m} \dfrac{b_{m+2}}{(m+2)!} + \dots , \end{array} \right. \tag{15}$$

e queste formule risolvono il sistema. La validità degli sviluppi (15) è subordinata alla condizione che $\log^m x$ si trovi nel campo di validità dello sviluppo di U sotto la forma (16).

47. — Le formule (15) ci dànno le $k_0, k_1, k_2, \dots$ in funzione delle $b_0, b_1, b_2, \dots$, di cui è nota l'espressione in funzione delle $a_0, a_1, a_2, \dots$, e viceversa. Si possono quindi prendere come arbitrarie le b_n al posto delle a_n. Si faccia in particolare $b_n = z^n$, onde

$a_n = (1+z)^n$, e lo sviluppo (6) diverrà:

$$U(\varphi) = \varphi + z\,x\,\varphi' + \frac{z^2\,x^2}{1.2}\varphi'' + \dots,$$

ossia, supposto x non singolare per φ e inoltre z abbastanza piccolo,

$$U(\varphi) = \varphi\,(x + x\,z).$$

Preso x diverso da zero, $\log^m x$ si trova dunque nel campo di validità di questa U, e la (14) non è altro che lo sviluppo di $\log^m (x + x\,z)$ in serie di potenze di z. Ma si ha

$$\log^m (x + x\,z) = \log^m x + \sum_{h=1}^{m-1} \binom{m}{h} \log^h (1+z).\log^{m-h} x.$$

Paragonando con la (13) viene

$$k_h = \frac{1}{h\,!} \log^h (1+z),$$

e poichè i coefficienti numerici p_{hh}, $p_{h+h}, \dots$ sono indipendenti dalla scelta delle b_n, risulta che essi non sono altro che i coefficienti dello sviluppo di $\dfrac{1}{h\,!}\log^h (1+z)$ in serie di potenze di z. Da quanto precede si conclude ancora che le serie dei secondi membri delle (15) sono convergenti e risolvono il problema se le b_n sono tali che $\Sigma\, b_n t^n$ converga in un cerchio di raggio maggiore di uno La soluzione del problema proposto al § 45 si ha dunque nei seguenti termini:

Abbiasi il sistema di equazioni lineari, nelle infinite incognite k_0, k_1, $k_2, \dots$,

$$k_0 + k_1\,n + k_2\,n^2 + \dots = a_n, \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \dots),$$

e le a_n *siano tali che, fatto* $b_n = \Delta^n a_0$, *la serie* $\Sigma\, b_n\, t^n$ *risulti convergente in un cerchio di raggio maggiore dell'unità. I valori delle incognite sono dati da*

$$k_m = p_{m,m} \frac{b_m}{m!} + p_{m+1,m} \frac{b_{m+1}}{(m+1)\,!} + \dots,$$

dove $p_{m,\nu}$ *è il coefficiente di* z^ν *nello sviluppo di* $\dfrac{1}{m\,!}\log^m (1+z)$ *in serie di potenze di* z.

48. — La risoluzione del sistema (12) mediante le (15) dà anche la soluzione di un'altra questione. Riprendiamo i due sviluppi (6) e (11) dell'operazione U. Ammettendo ancora che $\Sigma\, b_n t^n$ abbia un raggio di convergenza maggiore dell'unità, dalla (6) si avrà:

$$U(x^\varrho) = \left\{ b_0 + b_1\,\varrho + b_2 \binom{\varrho}{2} + \ldots \right\} x^\varrho ,$$

e la serie

$$a(\varrho) = b_0 + b_1\,\varrho + b_2 \binom{\varrho}{2} + \ldots$$

è convergente assolutamente ed uniformemente in tutto il piano ϱ e quindi è sviluppabile in serie di potenze di ϱ. Ma questa serie si ha immediatamente facendo $\varphi = x^\varrho$ nella (11), che diviene

$$U(x^\varrho) = (k_0 + k_1\,\varrho + k_2\,\varrho^2 + \ldots)\, x^\varrho .$$

Si trova dunque che fra le b_n ed i coefficienti dello sviluppo di $a(\varrho)$ in serie di potenze di ϱ passano le relazioni (15).

Talchè *fra i coefficienti k_n dello sviluppo di una funzione trascendente intera in serie di potenze di ϱ ed i coefficienti b_n del suo sviluppo in serie di fattoriali $\binom{\varrho}{n}$ passano le relazioni* (15), *equivalenti alle*

$$k_0 + k_1\, n + k_2\, n^2 + \ldots = b_n + n\, b_{n-1} + \binom{n}{2} b_{n-2} + \ldots + b_0 .$$

III. — Operazioni normali d'ordine superiore.

49. — Diremo *operazione normale d'ordine* m l'operazione distributiva A definita, nello spazio S delle serie di potenze, mediante le equazioni:

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A\,(x^n) = (a_{n0} + a_{n1}\, x + a_{n2}\, x^2 + \ldots + a_{nm}\, x^m)\, x^n , \\ & \qquad\qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned} \right.$$

Questa operazione si esprime mediante una serie ordinata secondo le potenze del simbolo di derivazione, nel modo ricordato al § **3.** Indicando con $\Delta^m a_{0,r}$ la differenza finita m^{sima}:

$$\Delta^m a_{0,r} = a_{m,r} - m\, a_{m-1,r} + \binom{m}{2} a_{m-2,r} - \ldots + (-1)^m a_{0,r} ,$$

lo sviluppo in serie di A si ottiene immediatamente sotto la forma:

$$(17) \qquad A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Delta^n (a_{00} + a_{01} x + \dots + a_{0m} x^m) \varphi^{(n)}.$$

50. — L'applicazione termine a termine dell'operazione A ad una serie di potenze $\varphi(x) = \Sigma k_n x^n$, astraendo per ora dalla questione della convergenza, dà, ordinando il risultato per le potenze di x,

$$A(\varphi) = \Sigma g_n x^n = \psi(x),$$

dove i coefficienti g_n sono legati ai k_n dalle relazioni:

$$(18) \qquad \begin{cases} g_0 = a_{00} k_0, \\ g_1 = a_{10} k_1 + a_{01} k_0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g_n = a_{n0} k_n + a_{n-1,1} k_{n-1} + a_{n-2,2} k_{n-2} + \dots + a_{n-m,m} k_{n-m}. \end{cases}$$

Ora, la dipendenza espressa da queste formule fra i due sistemi di coefficienti k_n e g_n, è un'operazione distributiva che indicheremo con Φ, e precisamente una forma lineare alle differenze d'ordine m applicata alla funzione k_n dell'indice n. Questa operazione Φ non è altro se non la trasformata di A mediante l'operazione C definita al § **30**, cioè $\Phi = C A C^{-1}$. Usando il simbolo θ di CASORATI, la forma Φ si scrive:

$$\Phi = a_{n0} + a_{n-1,1} \theta^{-1} + a_{n-2,2} \theta^{-2} + \dots + a_{n-m,m} \theta^{-m}.$$

51. — La somma di due operazioni normali del medesimo ordine è una operazione normale dello stesso ordine. La somma di due operazioni normali di ordine diverso ha l'ordine di quella di ordine maggiore.

52. — Il prodotto di due operazioni normali degli ordini m ed m' è una operazione normale dell'ordine $m + m'$. L'insieme delle operazioni normali forma dunque un gruppo; non forma invece un gruppo, eccettuato per il caso di $m = 0$, l'insieme delle operazioni normali di un dato ordine.

53. — Cerchiamo se un'operazione normale può ammettere radici nello spazio S. Si dovranno perciò determinare valori di $k_0, k_1, \dots, k_n, \dots$

tali che sia:

$$(19)\qquad \begin{cases} a_{00}\,k_0 = 0\,, \\ a_{10}\,k_1 + a_{01}\,k_0 = 0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n0}\,k_n + a_{n-1,0}\,k_{n-1} + \dots + a_{n-m,m}\,k_{n-m} = 0\,, \end{cases}$$

il che richiede che sia nullo almeno uno dei coefficienti a_{n0}. Supponendo tutti i coefficienti a_{n0} differenti da zero, come faremo d'ora in avanti, l'operazione A è una operazione *non degenere* nello spazio S, e quindi in questo spazio la sua inversa A^{-1} è a determinazione unica.

L'equazione generale del sistema (19) è la $\Phi = 0$. Si può soddisfare a questa equazione, dal valore $n = m$ in avanti, dando valori arbitrari a $k_0, k_1, \dots, k_{m-1}$, e si ottiene così una serie di potenze ω per la quale $A(\omega)$ si riduce ad un polinomio razionale intero arbitrario di grado $m - 1$ in x.

54. — Consideriamo in particolare un'operazione normale di primo ordine definita da:

$$(20)\qquad A(x^n) = (a_n - b_n\,x)\,x^n\,.$$

Per essa le formule (18) divengono:

$$(21)\qquad \begin{cases} g_0 = a_0\,k_0\,, \\ g_1 = a_1\,k_1 - b_0\,k_0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_n = a_n\,k_n - b_{n-1}\,k_{n-1}\,, \end{cases}$$

ed il sistema dei coefficienti k_n per i quali $A(\varphi)$ si riduce ad una costante (che si può senz'altro prendere uguale all'unità) è, ferma sempre l'ipotesi (§ 53) delle a_n diverse da zero,

$$(22)\qquad k_n = \frac{b_0\,b_1 \dots b_{n-1}}{a_0\,a_1 \dots a_{n-1}\,a_n}\,;$$

in altri termini, la serie di potenze (della cui convergenza ci si occuperà più avanti)

$$\omega(x) = \frac{1}{a_0} + \frac{b_0}{a_0 a_1} x + \frac{b_0 b_1}{a_0 a_1 a_2} x^2 + \ldots, \tag{23}$$

è la soluzione, nello spazio S, dell'equazione $A(\varphi) = 1$.

55. — È possibile dare una scomposizione delle operazioni normali sotto forma di un prodotto i cui fattori sono in parte operazioni normali d'ordine nullo, in parte moltiplicazioni per binomi della forma $z - x$. Cominciando dalle operazioni del primo ordine, dico che, se A è una tale operazione definita dalle (20), si può scomporla nel prodotto

$$A = U_1 M_{z-x} U, \tag{24}$$

dove U, U_1 sono due operazioni normali di ordine nullo, ed M_{z-x}, secondo la notazione stabilita al § 4, è la moltiplicazione per il binomio $z - x$, essendo z un numero arbitrario.

All'uopo scriviamo le equazioni di definizione (1) delle U, U_1 nella seguente forma:

$$U(x^n) = p_n x^n, \quad U_1(x^n) = q_n x^n;$$

ne viene, dalla (24),

$$A(x^n) = p_n (z q_n - q_{n+1} x) x^n;$$

ora, scrivendo che queste relazioni coincidono colle (20), avremo

$$z p_n q_n = a_n, \quad p_n q_{n+1} = b_n,$$

che servono a determinare le successioni p_n, q_n. Si ottiene

$$q_n = q_0 z^n \frac{b_0 b_1 \ldots b_{n-1}}{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}, \tag{25}$$

e da questa

$$p_n = \frac{1}{q_0} \cdot \frac{a_0 a_1 \ldots a_{n-1} a_n}{z^{n+1} b_0 b_1 \ldots b_{n-1}}. \tag{26}$$

In tal modo è operata la scomposizione dell'operazione di primo ordine A nella forma (24). I sistemi di numeri p_n, q_n sono determinati all'infuori della costante arbitraria q_0. Si noti infine che la serie

$\omega(x)$ che soddisfa alla $A(\varphi) = 1$, dipende dai soli coefficienti della U, poichè la (23) si può scrivere facendo $q_0 = 1/z$,

$$\omega(x) = \frac{1}{p_0} + \frac{x}{p_1 z} + \frac{x^2}{p_2 z^2} + \dots . \tag{27}$$

56. — Una decomposizione analoga alle (24) è possibile per ogni operazione normale d'ordine qualunque m. Dimostriamo dapprima che essendo A un'operazione normale d'ordine m, si può determinare un'operazione normale Y d'ordine $m-1$ ed un'operazione U d'ordine nullo in modo tale che sia

$$A = Y M_{z-x} U ,$$

dove z è un numero dato. Sia infatti A definito dalle (16); Y sia definita dalle

$$Y(x^n) = (y_{n0} + y_{n1} + \dots + y_{n,m-1} x^{m-1}) x^n ,$$

ed U dalle

$$U(x^n) = x^n / q_n ,$$

dove $y_{n,\nu}$ e q_n sono da determinarsi. Verrà

$$Y M_{z-x} U (x^n) = \frac{x^n}{q_n} \Big[z y_{n,0} + (x y_{n,1} - y_{n+1,0}) x + $$
$$ + (z y_{n,2} - y_{n+1,1}) x^2 + \dots - y_{n+1,m-1}) x^m \Big] ;$$

scrivendo ora che queste coincidono con le equazioni (16) che definiscono le A, si dovrà porre:

$$\left\{\begin{array}{l} z y_{n,0} = q_n a_{n,0}, \\ z y_{n,1} - y_{n+1,0} = q_n a_{n,1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z y_{n,m-1} - y_{n+1,m-2} = q_n a_{n,m-1}, \\ \qquad\qquad - y_{n+1,m-1} = q_n a_{n,m}. \end{array}\right. \tag{28}$$

Dalle m prime fra queste relazioni si deduce subito:

$$(28') \quad \begin{cases} y_{n0} = \dfrac{q_n \, a_{n0}}{z}, \\[2ex] y_{n,1} = \dfrac{q_n \, a_{n1}}{z} + \dfrac{q_{n+1} \, a_{n+1,0}}{z^2}, \\[2ex] \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\[2ex] y_{n,m-1} = \dfrac{q_n \, a_{n,m-1}}{z} + \dfrac{q_{n+1} \, a_{n+1,m-2}}{z^2} + \dots + \dfrac{q_{n+m-1} \, a_{n+m-1,0}}{z^m}, \end{cases}$$

e quindi dall'ultima:

$$(29) \quad a_{n+m,0} \, q_{n+m} + z \, a_{n+m-1,1} \, q_{n+m-1} + \dots + z^{m-1} \, a_{n+1,m-1} \, q_{n+1} + \\ + z^m \, a_{n,m} \, q_n = 0 .$$

Ora questa è un'equazione lineare alle differenze [1], dell'ordine m, che determina q_n; ottenute queste, si hanno dalle (28') le y_{n0}, $y_{n1}, \dots, y_{n,m-1}$ in funzione delle a_{ni}, ed è quindi operata la scomposizione cercata.

In questa scomposizione intervengono m costanti arbitrarie, introdotte dall'integrazione dell'equazione (29): come tali si possono prendere, ad esempio, i valori iniziali $q_0, q_1, \dots, q_{m-1}$ del sistema delle q_n.

57. — È facile ora dimostrare che l'operazione normale A di ordine m è decomponibile in un prodotto della forma:

$$(30) \quad A = U_m \, M_{z_m - x} \, U_{m-1} \, M_{z_{m-1} - x} \dots U_1 \, M_{z_1 - x} \, U_0,$$

dove $U_0, U_1, \dots, U_m$ sono operazioni normali d'ordine nullo, e z_1, $z_2, \dots, z_m$ sono numeri dati. Infatti, per il caso di $m = 1$ il teorema è già stato dimostrato al § **55**. Supposta vera per l'ordine $m - 1$, la proposizione si estende immediatamente al caso dell'ordine m; infatti, se A è dell'ordine m, essa si scompone, per il paragrafo precedente, nella forma

$$A = Y \, M_{z_1 - x} \, U_0 ;$$

---

[1] Si noti che questa equazione (29) coincide colla $\Phi = 0$ del § **50**; basta cambiare q_n in $k_n \, z^n$; l'equazione che determina il sistema q_n non è dunque altro che quella che si ottiene uguagliando a zero la trasformata $C \, A \, C^{-1}$ di A mediante l'operazione C del § **30**.

ma per Y vale la scomposizione

$$Y = U_m M_{z_m - x} \ldots U_1,$$

onde, sostituendo, si ottiene A sotto la forma del prodotto (30). Le arbitrarie che si introducono in questo modo sono $m(m+1)/2$.

Inoltre, dalle formule (30) si ha immediatamente la decomposizione in prodotto dell'inversa di A, cioè:

$$A^{-1} = U_0^{-1} M_{1/(z_1 - x)} U_1^{-1} \ldots U_m^{-1} M_{1/(z_m - x)} U_m^{-1}. \tag{31}$$

58. — Preso U_0 in modo che sia

$$U(x^n) = x^n / q_n,$$

dove q_n è un integrale della (29) cioè della equazione $\Phi = 0$, il metodo del § 56 permette di determinare la Y. Come applicazione, se abbiamo ad esempio l'operazione normale di secondo ordine definita da

$$A(x^n) = (a_n + b_n x + c_n x^2) x^n,$$

e poniamo $M_{z_1 - x} U_0 = A_1$, $U_2 M_{z_2 - x} U_1 = A_2$, fissato l'integrale dell'equazione

$$\Phi = a_{n+2} q_{n+2} + z_1 b_{n+1} q_{n+1} + z_1^2 c_n q_n = 0,$$

che compare nelle equazioni di definizione di U_0, resta determinato A_1, ed allora le equazioni (28) del § 56 determinano A_2 senza ambiguità. Essendo $A = A_2 A_1$, si può dire che si è così ottenuto il quoziente (a sinistra) di A per A_1.

CAPITOLO III.

Uso delle operazioni normali nel togliere singolarità alle funzioni.

I. — Il teorema di Hadamard. Operazioni semplici.

59. — Stabiliamo dapprima due notazioni che, per ragione di brevità, useremo in ciò che segue:

a) Con $[a]$ indicheremo il cerchio del piano della variabile x, il cui centro è nel punto $x = 0$ ed il cui raggio è $|a|$.

b) Quando ciò non possa dare luogo ad equivoci, colla stessa scrittura $\alpha(x)$ si rappresenterà tanto una serie di potenze di x, quanto il ramo di funzione che nasce dalla continuazione analitica di questa serie in tutta la *stella* di centro (¹) che le compete.

60. — Ricordiamo ora un importante teorema recentemente dato dal Signor HADAMARD (²). Esso si può enunciare come segue:

« Date le serie di potenze

$$\alpha(x) = \Sigma\, a_n\, x^n\,, \quad \varphi(x) = \Sigma\, k_n\, x^n,$$

la serie

$$\psi(x) = \Sigma\, a_n\, k_n\, x^n\,,$$

rappresenta una funzione analitica che ha per punti singolari quelli soli della forma $x = u_p\, v_q$, essendo u_p i punti singolari della funzione analitica definita da $\alpha(x)$ e v_q quelli della funzione definita da $\varphi(x)$. »

La dimostrazione di questo teorema, fondata sulla considerazione di un integrale definito curvilineo, è stata poi ripresa, semplificata ed in qualche punto completata dal Sig. BOREL (³) il quale fa anche rilevare che se si riguarda la funzione $\alpha(x)$ come fissa, la $\varphi(x)$ come presa arbitrariamente nell'insieme S_0, la $\psi(x)$ si può riguardare come risultato di un'operazione distributiva determinata, individuata da $\alpha(x)$ ed applicata a $\varphi(x)$. Poco dopo, io ho notato (⁴) che questa operazione è di quelle che nel presente lavoro si sono dette normali d'ordine nullo, ed ho anche indicato come alla dimostrazione del teorema di HADAMARD si potesse giungere senza fare uso della considerazione di integrali curvilinei.

61. — Data la serie, di S_0,

$$\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n, \tag{1}$$

si può, mediante i suoi coefficienti a_n, definire un'operazione U ponendo

$$U(x^n) = a_n\, x^n. \tag{2}$$

(¹) Secondo la definizione del MITTAG-LEFFLER, Acta, T. XXIII, p. 47.

(²) Comptes Rendus, T. CXXIV, p. 492 (1897)); Acta Math., T. XXII, p. 55 (1898).

(³) Bulletin de la Soc. Math. de France, T. XXVI, p. 238, 1898.

(⁴) Rendiconti dell'Accad. di Bologna, 19 febbraio 1899.

Applicando quest'operazione alla serie $\varphi = \Sigma\, k_n\, x^n$, si ottiene come risultato la serie

$$(3) \qquad U(\varphi) = \psi\,(x) = \Sigma\, a_n\, k_n\, x^n,$$

pure appartenente ad S_0 e le cui singolarità in tutto il piano sono nei soli punti indicati dal teorema di HADAMARD ora citato (non essendo però escluso che, in casi particolari, qualcuno di questi punti possa anche non essere singolare).

62. — Ciò posto, ci occorrerà considerare operazioni U per le quali la funzione $\alpha(x)$ che serve a definirle — si noti che è

$$\alpha\,(x) = U\left(\frac{1}{1 - x}\right) \quad —$$

sia particolarmente semplice. Supporremo cioè che la funzione $\alpha(x)$ non abbia a distanza finita che il solo punto singolare $x = 1$, per modo che togliendo dal piano il prolungamento del segmento $0 \dots 1$, da 1 fino all'infinito, nel piano così tagliato la $\alpha(x)$ rimane priva di singolarità. Quando è tale la funzione $\alpha(x)$, dirò *semplice* l'operazione U corrispondente.

63. — Un'operazione semplice ha le seguenti proprietà:

a) Applicata alla funzione $\varphi(x)$, genera, per il teorema di HADAMARD, una funzione che è singolare *al più* nei punti stessi dove lo è $\varphi\,(x)$.

b) Il prodotto di due operazioni semplici è un'operazione semplice, cosicchè queste operazioni formano un gruppo.

Dimostreremo, nel paragrafo seguente, come esistano operazioni U semplici insieme alle loro inverse. Per tali operazioni si hanno le proprietà seguenti:

a) Applicandole ad una funzione $\varphi(x)$ si genera una funzione singolare in *tutti e soli* i punti in cui è singolare $\varphi(x)$: tali operazioni, nelle funzioni alle quali si applicano, non possono dunque nè aggiungere nè togliere singolarità.

b) Le operazioni semplici insieme alle loro inverse formano un gruppo.

64. — Per mostrare l'esistenza di operazioni le quali sono semplici unitamente alle loro inverse, consideriamo la forma differenziale lineare, d'ordine arbitrario m,

$$F(\varphi) = b_0 \varphi + b_1 x \varphi' + b_2 \frac{x^2}{1.2} \varphi'' + \ldots + b_m \frac{x^m}{m!} \varphi^{(m)}. \tag{4}$$

Questa forma ci dà un'operazione U per la quale è

$$U(x^n) = a_n x^n,$$

con

$$a_n = b_0 + n b_1 + \binom{n}{2} b_2 + \ldots + \binom{n}{m} b_m ;$$

le a_n sono cioè polinomi razionali interi di grado m rispetto all'indice n. Reciprocamente, ogni U le cui a_n sono tali polinomi si riduce, come risulta dalla formula (6) del § 37, ad una forma differenziale lineare del tipo (4). Supponiamo ora che le a_n siano diverse da zero per ogni valore intero positivo o nullo dell'indice. Siccome la $F\left(\frac{1}{1-x}\right)$ è una funzione razionale con il solo polo $x = 1$, la F è intanto un'operazione semplice. Inoltre, poichè le a_n sono diverse da zero, risulta dai principi generali della teoria delle equazioni differenziali lineari che l'equazione

$$F(\varphi) = \frac{1}{1-x}$$

ammette una soluzione regolare nell'intorno di $x = 0$, e che non ha singolarità a distanza finita altro che nel punto $x = 1$. Ciò equivale a dire che è tale la funzione $U^{-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$, cioè che U^{-1} è un'operazione semplice. La (4) definisce dunque un'operazione semplice, insieme alla propria inversa.

65. — Dimostrato nel paragrafo precedente che sono semplici insieme alla propria inversa quelle operazioni U in cui a_n è funzione razionale intera dell'indice, ne viene che sono tali anche le operazioni in cui $1/a_n$ è funzione razionale intera dell'indice. E poichè le operazioni che ammettono la proprietà indicata formano un gruppo, concluderemo :

Ogni operazione U, definita da $U(x^n) = a_n x^n$, dove a_n è una funzione razionale intera o fratta dell'indice n, non nulla nè infinita per valori interi positivi dell'indice stesso, è un'operazione semplice ed è tale la sua inversa.

66. — Ho chiamato [1] *funzione analitica semplice* una funzione che a distanza finita è singolare in un solo punto, ad esempio $x = z$ (z differente da zero) per modo che togliendo dal piano il prolungamento da z all'infinito del segmento $0 \ldots z$, la funzione si riduce regolare ed uniforme nel piano così tagliato. Ogni tale funzione dà luogo ad una operazione semplice: se infatti $\Sigma a_n x^n$ è lo sviluppo della funzione nell'intorno di $x = 0$, l'operazione semplice in discorso è definita da

$$U(x^n) = a_n z^n x^n.$$

II. — Uso delle operazioni normali di primo ordine per togliere singolarità.

67. — Un'operazione normale di primo ordine è definita nello spazio S dalle relazioni, dove le a_n sono tutte diverse da zero,

$$A(x^n) = a_n x^n - b_n x^{n+1}; \tag{5}$$

abbiamo poi dimostrato (§ 55) che ogni tale operazione si può porre sotto la forma

$$A = U_1 M_{z-x} U, \tag{6}$$

dove U, U_1 sono operazioni normali d'ordine zero definite da

$$U(x^n) = p_n x^n, \quad U_1(x^n) = q_n x^n.$$

Nel presente articolo, daremo le proprietà di quelle operazioni A per le quali è possibile una scomposizione nella forma (6) tale che U ed U_1 siano operazioni semplici (§ 62), esse e le loro inverse: proprietà che conducono a risultati non indegni di nota circa le singolarità isolate delle funzioni analitiche.

68. — L'operazione A applicata ad una funzione analitica regolare nell'intorno $[r]$ di $x = 0$ genera una funzione analitica regolare *almeno* in quello stesso intorno. Ciò consegue immediatamente dalla forma (6) dell'operazione A e dall'essere U, U_1 operazioni semplici. Ci proponiamo ora la seguente questione:

---

[1] Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 16 marzo 1890.

Posto $A(\varphi) = \psi$, se φ è una serie di potenze il cui cerchio di convergenza è $[r]$, può ψ appartenere ad S_r (1)*, e sotto quali condizioni?*

La risposta a tale questione forma l'oggetto dei seguenti paragrafi.

69. — Poichè ogni costante appartiene ad S_r, cominciamo dal considerare l'equazione funzionale

$$A(\varphi) = 1, \tag{7}$$

dove φ è la funzione incognita. Una soluzione della (7) è data al § 55: essa è rappresentata dalla serie

$$\omega(x) = \frac{1}{p_0} + \frac{x}{p_1 z} + \frac{x^2}{p_2 z^2} + \ldots = z\, U^{-1}\left(\frac{1}{z - x}\right), \tag{8}$$

e poichè le a_n si sono supposte tutte diverse da zero, questa soluzione è unica nello spazio S. Ora, poichè U soddisfa alla condizione d'essere semplice insieme alla sua inversa, ne viene che la serie

$$\Sigma \frac{x^n}{p_n},$$

converge entro il cerchio $[1]$ ed ha sulla circonferenza il solo punto singolare $x = 1$; onde $\omega(x)$ è regolare entro $[z]$ ed ha sulla circonferenza il solo punto singolare $x = z$. Questa serie $\omega(x)$, che rappresenta una funzione analitica semplice, serve a rispondere affermativamente alla domanda posta in fine del § 68, poichè la serie stessa ω converge entro $[z]$, mentre $A(\omega)$ appartiene ad S_z.

70. — Si osservi che il fattore simbolico U_1 della A non ha alcuna importanza per la risoluzione dell'equazione funzionale (7): risoluta cioè per l'operazione $M_{z-x}\, U$, essa è risoluta per ogni operazione $U_i\, M_{z-x}\, U$, essendo U_i un'operazione qualunque d'ordine nullo.

Si osservi ancora che per avere la soluzione generale dell'equazione (7), basta aggiungere ad ω una radice qualunque di A; queste soluzioni non verranno però considerate per ora, poichè ci limitiamo qui alla considerazione di funzioni appartenenti ad S e, come si è già notato, A non ha radici in S.

(1) Ricordiamo che si è convenuto, al § 1, di indicare con S_z l'insieme delle serie di potenze il cui cerchio di convergenza è superiore a $|z|$.

71. — Poniamo ora la seguente definizione. Due serie di potenze $\varphi = \Sigma\, k_n\, x^n$, $\varphi_1 = \Sigma\, k'_n\, x^n$, aventi lo stesso cerchio di convergenza $[r]$, si diranno *egualmente singolari* sulla circonferenza [1] di quel cerchio, quando esista una costante c tale che la serie $\varphi - c\,\varphi_1$ abbia un cerchio di convergenza maggiore di $[r]$, cioè appartenga ad S_r.

La condizione affinchè φ, φ_1 siano egualmente singolari è che esistano due numeri positivi m ed r', con $r' > |r|$ e tali che sia, da un valore n_1 di n in poi,

$$|k_n - c\,k'_n| < \frac{m}{r'^n}\,.$$

È chiaro che ogni operazione U semplice insieme alla sua inversa, trasforma due serie egualmente singolari in due serie egualmente singolari.

Si ha immediatamente che due serie egualmente singolari con una terza sono egualmente singolari fra loro.

72. — Se $\varphi(x)$ è una serie di potenze convergente entro $[z]$ ed egualmente singolare sulla circonferenza colla soluzione ω dell'equazione (7), $A(\varphi)$ appartiene ad S_z. Infatti, esiste per ipotesi una costante k tale che

$$\varphi = k\,\omega + \varrho\,,$$

dove ϱ è una serie di S_z; ne viene

$$A(\varphi) = k + A(\varrho),$$

e siccome $A(\varrho)$ appartiene ad S_z, la proposizione è dimostrata. Questa funzione $\varphi(x)$ risponde dunque alla questione posta al § 68.

Reciprocamente, tutte le funzioni che rispondono a quella questione sono egualmente singolari con ω, e quindi fra di loro. Sia infatti φ una serie di potenze avente $[r]$ per cerchio di convergenza, ed $A(\varphi) = \varrho$ appartenga ad S_r; vi apparterrà anche $U_1^{-1}(\varrho) = \varrho_1$,

---

[1] Quando ciò non possa generare equivoco, si ometteranno le parole: *sulla circonferenza*. La definizione di serie di potenze egualmente singolari è stata introdotta in una Nota che ho pubblicata nei *Rendic. dell'Accad. di Bologna* (30 gennaio 1898).

e si avrà:

$$\varphi = A^{-1}(\varrho) = U^{-1} M_{1/(z-x)} U_1^{-1}(\varrho) = U^{-1}\left(\frac{\varrho_1}{z-x}\right).$$

Per l'ipotesi che U^{-1} è operazione semplice, risulta da questa ultima eguaglianza che φ e $\varrho_1/(z-x)$ sono singolari negli stessi punti; ma φ non converge oltre il cerchio $[r]$, mentre ϱ_1 converge entro un cerchio maggiore, perciò deve necessariamente essere $|r| = |z|$ e ϱ, ϱ_1 appartengono ad S_z. Ciò posto, ϱ_1 convergendo in un cerchio maggiore di $[z]$, viene

$$\varrho_1(x) = \varrho_1(z) + (z-x)\,\varrho_2(x),$$

dove anche ϱ_2 appartiene ad S_z. Ne risulta

$$\varphi = U^{-1}(\varrho_2(x)) + \varrho_1(z)\, U^{-1}\left(\frac{1}{z-x}\right);$$

ma $U^{-1}(\varrho_2(x)) = \varrho_3(x)$, dove ϱ_3 appartiene ad S_z; inoltre è

$$\omega(x) = z\, U^{-1}\left(\frac{1}{z-x}\right),$$

onde, indicando con c la costante $z\,\varrho_1(z)$, viene:

$$\varphi = \varrho_3 + c\,\omega,$$

cioè φ *è* singolare come ω, c. d. d. .

73. — Dai paragrafi precedenti risulta che, data un'operazione normale di primo ordine i cui fattori U, U_1 siano semplici insieme alle loro inverse, resta stabilita una speciale singolarità nel punto z, singolarità definita dalla serie

$$\omega(x) = U^{-1}\left(\frac{1}{z-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{p_n z^{n+1}},$$

la quale serie definisce una funzione regolare in tutto il piano tagliato sul prolungamento del segmento $0 \ldots z$, fra z ed ∞. L'operazione A *ha la proprietà di fare sparire la singolarità così definita;* cioè, se φ è regolare in $[z]$ e singolare sulla circonferenza come ω, $A(\varphi)$ è regolare oltre $[z]$; e, reciprocamente, ogni funzione la cui singolarità è tolta da A risulta singolare in z come lo è la ω.

Inversamente, data una funzione *semplice*

$$\omega(x) = \Sigma \frac{x^n}{p_n z^n},$$

col solo punto singolare z a distanza finita, la funzione $\Sigma\, x^n/p_n$ sarà semplice con il solo punto singolare $x = 1$, e per il teorema di HADAMARD sarà tale, in generale [1], anche $\Sigma\, p_n x^n$. In tale caso U, definita da

$$U(x^n) = p_n x^n,$$

sarà un'operazione semplice insieme alla sua inversa, e la singolarità della $\omega(x)$ sarà tolta dall'operazione di primo ordine $A = M_{z-x}\, U$.

74. — Ricordando le relazioni date al § 55 fra le $a_n, b_n,$ coefficienti delle $A(x^n)$, e le p_n, q_n coefficienti rispettivi in $U(x^n)$, $U_1(x^n)$, le quali relazioni sono

$$z\, p_n\, q_n = a_n\,, \quad p_n\, q_{n+1} = b_n, \tag{9}$$

si trova che la serie $\omega(x)$, che dà il tipo delle singolarità che l'operazione A è suscettibile di togliere, si scrive:

$$\omega(x) = z\, q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_0\, b_1 \dots b_{n-1}}{a_0\, a_1 \dots a_n}\, x^n\,. \tag{10}$$

75. — Applicando l'operazione A ad una serie di potenze $\varphi(x) = \Sigma\, k_n x^n$, si ottiene una serie di potenze $\psi(x) = \Sigma\, g_n x^n$ i cui coefficienti g_n sono legati ai k_n dalle relazioni

$$g_0 = k_0\, a_0, \quad g_n = a_n k_n - b_{n-1}\, k_{n-1}\,.$$

La g_n è dunque data dall'applicazione di una forma lineare alle differenze del primo ordine sulla funzione di n, k_n; indicando questa forma con

$$\Pi(k_n) = a_n k_n - b_{-1}\, k_{n-1}, \tag{11}$$

essa è (§ 50) la trasformata di A mediante l'operazione C definita al

---

[1] BOREL, Nota citata del « Bulletin de la Soc. Mathém. », introduzione.

§ 30, cioè $\Pi = C A C^{-1}$. Sostituendo alle a_n, b_n, le loro espressioni (9) nelle p_n, q_n, la Π si scrive ancora

$$\Pi(k_n) = q_n (p_n z k_n - p_{n-1} k_{n-1}). \tag{12}$$

76. — Condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie di potenze $\varphi(x) = \Sigma k_n x^n$, di cui $[z]$ è il cerchio di convergenza, sia singolare come $\omega(x)$ sulla circonferenza, è che, per i valori dell'indice n superiori ad un numero dato n, sia

$$\left| \frac{p_n}{p_{n+1} z} k_n - k_{n+1} \right| < \frac{m \eta^n}{|z|^n}, \tag{13}$$

essendo m ed η due numeri positivi ed $\eta < 1$; oppure, ciò che torna lo stesso, che sia, per $n > n_1$,

$$\left| \sqrt[n]{\frac{p_n}{p_{n+1}} z k_n - k_{n+1}} \right| < a < \frac{1}{|z|}; \tag{13'}$$

la condizione (13) equivale ancora alla diseguaglianza

$$\left| \frac{b_n}{a_{n+1}} k_n - k_{n+1} \right| < \frac{m \eta^n}{|z|^n}. \tag{13''}$$

La condizione enunciata è *necessaria*. Infatti, sia $\varphi(x)$ singolare come $\omega(x)$, sulla circonferenza del cerchio $[z]$: esisterà un numero c tale che

$$\varphi(x) - c\, \omega(x)$$

sia una serie $\varrho(x)$ di S_z; il coefficiente di x^n in $\varrho(x)$, cioè

$$k_n - c \frac{b_0 b_1 \dots b_{n-1}}{a_0 a_1 \dots a_n},$$

sarà, in valore assoluto, inferiore ad un'espressione della forma $\frac{m_1 \eta^n}{|z|^n}$, $\eta < 1$; perciò sarà anche

$$\left| k_{n+1} - c \frac{b_0 b_1 \dots b_n}{a_0 a_1 \dots a_{n+1}} \right| < \frac{m_2 \eta^n}{|z|^n},$$

e quindi

$$\left| \frac{b_n}{a_{n+1}} k_n - k_{n+1} \right| < \frac{(m_1 + m_2) \eta^n}{|z|^n},$$

che equivale alla condizione (13″), cioè alla (13).

La condizione è *sufficiente.* Se infatti i coefficienti k_n della serie $\varphi(x) = \Sigma\, k_n x^n$ soddisfano alla (13), ne verrà

$$|\, p_n k_n - z\, p_{n+1} k_{n+1} \,| < \frac{m\, |\, p_{n+1} \,|\, \eta^n}{|\, z \,|^{n-1}},$$

e poichè la serie $\Sigma \frac{p_n}{z^n} x^n$ converge entro il cerchio $[z]$, la serie

$$\psi(x) = \Sigma\, (p_n k_n - z\, p_{n+1} k_{n+1})\, x^n$$

convergerà in un cerchio maggiore, cioè apparterrà ad S_z. E siccome la serie $\psi(x)$ non differisce sostanzialmente da $U_1^{-1} A(\varphi)$, la quale ha le singolarità negli stessi punti in cui le ha $A(\varphi)$, concludiamo che $A(\varphi)$ appartiene ad S_z, c. d. d. .

77. — Il noto teorema del Sig. DARBOUX [1], che dà la condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie di potenze convergente entro $[z]$ abbia sulla circonferenza, come sola singolarità, un polo semplice, si deduce immediatamente dal teorema del paragrafo precedente facendovi $p_n = 1$. La condizione (13) si riduce a

$$\left| \sqrt[n]{\frac{k_n}{z} - k_{n+1}} \right| < a < \frac{1}{|\, z \,|},$$

per $n > n_1$. Inoltre, da

$$\left| \, k_n - c\, \frac{b_0\, b_1 \ldots b_{n-1}}{a_0\, a_1 \ldots a_n} \, \right| < \frac{m_1\, \eta^n}{|\, z \,|^n}$$

si deduce, nel caso attuale,

$$|\, k_n z^n - c \,| < m_1\, \eta^n, \quad \eta < 1,$$

onde

$$\lim_{n=\infty} k_n z^n = c,$$

e queste sono appunto le condizioni date dal DARBOUX.

78. — L'operazione A applicata ad una serie di potenze $\varphi = \Sigma\, k_n x^n$ riproduce dunque una serie di potenze avente in generale

---

[1] Journal de Mathématiques, S. III, T. IV, 1878. Vedasi a questo proposito il notevole riassunto del Sig. OSGOOD, Bulletin of the Americ. Math. Society, S. II, T. V, pag. 59.

lo stesso cerchio di convergenza della serie φ, ed un cerchio maggiore solo quando $\varphi(x)$ converge in $[z]$ ed ha in z la singolarità definita da $\omega(x)$. Applicata dunque ad una serie ϱ di S_z, la A produce una serie ϱ_1 pure di S_z. Ma i coefficienti di ϱ_1 non sono totalmente arbitrari; essi verificano una relazione necessaria. Si ha infatti (§ 75):

$$A(\varphi) = \Sigma\, g_n\, x^n,$$

con

$$g_n = \Pi(k_n) = q_n\,(p_n\, z\, k_n - p_{n-1}\, k_{n-1}).$$

Ne viene

$$g_n/q_n = k_n\, p_n\, z - k_{n-1}\, p_{n-1}, \quad g_0/q_0 = k_0\, p_0\,,$$

da cui

$$\frac{g_0}{q_0} + \frac{g_1}{q_1} z + \dots + \frac{g_n}{q_n} z^n = k_n\, p_n\, z^{n+1}.$$

Ma $\Sigma\, k_n\, x^n$ è per ipotesi un elemento di S_z, e perciò z^n appartiene all'interno del suo cerchio di convergenza; lo stesso accade anche per $\Sigma\, k_n\, p_n\, x^n$, e perciò:

$$\lim_{n=\infty} k_n\, p_n\, z^{n+1} = 0\,.$$

Ne viene che i coefficienti g_n della serie $\varrho_1 = A(\varphi)$ soddisfano alla condizione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n\, z^n}{q_n} = 0, \text{ ossia } g_0 + \frac{a_0}{b_0} g_1 + \frac{a_0\, a_1}{b_0\, b_1} g_2 + \frac{a_0\, a_1\, a_2}{b_0\, b_1\, b_2} g_3 + \dots = 0. \tag{14}$$

Si noti che la funzione z^n/q_n, che figura nel termine generale della serie ϱ_1, è l'integrale dell'equazione $\overline{\Pi}(k_n) = 0$, dove $\overline{\Pi}$ è la forma alle differenze *aggiunta* (¹) di Π.

79. — Passiamo ora a cercare l'effetto prodotto dall'inversa A^{-1} dell'operazione A applicata ad un elemento di S_0. In questo insieme, come sappiamo, la A^{-1} è a determinazione unica. Sia $\varrho(x)$ una serie di S_z, e $\varrho = \Sigma\, g_n\, x^n$.

Dalla (6) segue

$$A^{-1} = U^{-1}\, M_{1/(z-x)}\, U_1^{-1},$$

(¹) Vedasi la mia Nota: *Sull'operazione aggiunta,* Rendiconti dell'Accademia di Bologna, 17 aprile 1898, (§ 11).

e perciò

$$(15)\qquad A^{-1}(\varrho) = U^{-1}\left\{\frac{1}{z-x}\left(\frac{g_0}{q_0} + \frac{g_1}{q_1}x + \frac{g_2}{q_2}x^2 + \dots\right)\right\}.$$

La $U_1^{-1}(\varrho)$ è pure una serie di S_z; invece $1/(z-x)$ ammettendo uno sviluppo in serie convergente entro $[z]$, lo stesso sarà della funzione soggetta all'operazione U^{-1} nel secondo membro della (15), e lo stesso ancora sarà di $A^{-1}(\varrho)$, il cui sviluppo è

$$(16)\qquad A^{-1}(\varrho) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{g_0}{q_0} + \frac{g_1 z}{q_1} + \frac{g_2 z^2}{q_2} + \dots + \frac{g_n z^n}{q_n}\right)\frac{x^n}{p_n z^{n+1}}.$$

Vi sarà eccezione nel solo caso che la serie

$$U_1^{-1}(\varrho) = \Sigma\, g_n x^n/q_n,$$

ammetta uno zero per $x = z$, cioè sotto la condizione

$$(14)\qquad \frac{g_0}{q_0} + \frac{g_1 z}{q_1} + \frac{g_2 z^2}{q_2} + \dots = 0;$$

in questo solo caso $A^{-1}(\varrho)$ apparterrà ad S_z.

80. — Dal paragrafo precedente risulta che l'operazione A^{-1} applicata ad una serie di S_z dà una serie che, in generale, non converge oltre al cerchio $[z]$. L'operazione A^{-1} *introduce* dunque una singolarità sulla circonferenza $[z]$, e siccome questa singolarità è *tolta* da A, così essa è quella singolarità isolata nel punto $x = z$ il cui tipo è dato dalla serie

$$\omega(x) = \frac{1}{a_0} + \frac{b_0 x}{a_0 a_1} + \frac{b_0 b_1 x^2}{a_0 a_1 a_2} + \dots .$$

Fra le operazioni A^{-1} la più semplice è la divisione per $x - z$, che *introduce* nella serie di S_z un polo di primo ordine. In questo caso

$$A(x^n) = z\, x^n - x^{n+1};$$

$a_n = z$, $b_n = 1$, e $\Sigma \dfrac{x^n}{z^{n+1}}$ dà il tipo della singolarità introdotta.

Risulta ancora dal paragrafo precedente che in quelle serie di S_z i cui coefficienti soddisfano alla relazione (14), la A^{-1} non introduce singolarità. Questa condizione (14), dimostrata sufficiente, è anche necessaria, poichè si è visto al § 78 che se ϱ è una serie di S_z, $A(\varrho)$ soddisfa coi suoi coefficienti alla relazione (14): onde inversamente se $A(\varrho)$ non soddisfa a tale condizione, ϱ non può appartenere ad S_z.

La condizione (14) va dunque riguardata come una estensione della condizione di divisibilità di una serie di potenze per il binomio $x-z$, al quale essa si riduce nel caso semplice $A = M_{x-z}$. Concludendo:

L'operazione A^{-1} applicata ad una serie di S_z vi introduce in generale una singolarità rappresentata dalla $\omega(x)$. Condizione necessaria e sufficiente perchè questa singolarità non si introduca, è che i coefficienti g_n della serie soddisfino alla condizione (14).

81. — Per dare un'applicazione di quanto precede, consideriamo la forma differenziale lineare, dell'ordine m,

$$F(\varphi) = (h_0 - k_0 x)\varphi + (h_1 - k_1 x) x \varphi' + \dots + \frac{1}{m!}(h_m - k_m x) x^m \varphi^{(m)}. \tag{17}$$

L'equazione $F(\varphi) = 0$ appartiene ad un tipo che è stato studiato dal Sig. GOURSAT (¹). Applicando la F ad x^n, si ottiene

$$F(x^n) = \left\{ h_0 + n\, h_1 + \dots + \binom{n}{m} h_m \right\} x^n - \left\{ k_0 + n\, k_1 + \dots + \binom{n}{m} k_m \right\} x^{n+1},$$

ed F è quindi un'operazione normale del primo ordine, del tipo (5), in cui

$$a_n = h_0 + n\, h_1 + \dots + \binom{n}{m} h_m, \quad b_n = k_0 + n\, k_1 + \dots + \binom{n}{m} k_m;$$

gli a_n, b_n sono dunque polinomi razionali interi in n, del grado m, che noi supporremo diversi da zero per i valori interi positivi di n. Reciprocamente, ogni operazione del tipo (5) in cui a_n, b_n sono razionali interi di grado m in n è una forma differenziale lineare del tipo (17).

Ciò posto, indicando con z il rapporto h_m/k_m, risulta dai principi sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari che l'equazione

$$F(\varphi) = \varrho,$$

(¹) Ann. de l'École Normale, S. II, T. XII, 1883.

dove ϱ è una serie di S_z, ammette una sola soluzione regolare nell'intorno di $x = 0$ e precisamente entro $[z]$, colla sola singolarità $x = z$ sulla circonferenza. L'operazione F^{-1} introduce e l'operazione F toglie codesta singolarità.

Poniamo ora
$$F = U_1 M U,$$
con
$$U(x^n) = p_n x^n, \qquad U_1(x^n) = q_n x^n;$$
ne risulterà (§ 55)
$$q_n = \frac{b_0 b_1 \dots b_{n-1}}{a_0 a_1 \dots a_{n-1}} z^n, \quad p_n = \frac{a_0 a_1 \dots a_{n-1} a_n}{b_0 b_1 \dots b_{n-1}} \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Dico che queste operazioni U, U_1 ammettono la proprietà di essere semplici, esse e le loro inverse. Considerando infatti
$$U^{-1}\left(\frac{1}{z-x}\right) = \frac{1}{a_0} + \frac{b_0 x}{a_0 a_1} + \frac{b_0 b_1 x^2}{a_0 a_1 a_2} + \dots = \omega(x),$$
ed applicando l'operazione F, viene:
$$F(\omega(x)) = U_1 M_{z-x} U U^{-1}\left(\frac{1}{z-x}\right) = 1,$$
quindi, per il ricordato teorema sulle equazioni differenziali lineari, $\omega(x)$ ha un'unica singolarità a distanza finita, per $x = z$. Ne viene che $U^{-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ avrà un'unica singolarità per $x = 1$ a distanza finita, ed U^{-1} è quindi un'operazione semplice. Ma l'operazione U dà ancora
$$U\left(\frac{1}{1-x}\right) = \Sigma \frac{a_0 a_1 \dots a_n}{b_0 b_1 \dots b_{n-1}} \frac{x^n}{z^{n+1}} = \tilde{\omega}(x).$$

Applicandole l'operazione F_1 definita da
$$F_1(1) = z - a_1 x, \quad F_1(x^n) = b_{n-1} z x^n - a_{n+1} x^{n+1}, \ (n = 1, 2, 3, \dots),$$
che è pure una forma differenziale lineare del tipo (17) col punto singolare $x = 1$, troveremo $F_1(\tilde{\omega}(x)) = z a_0$; ne viene che $\tilde{\omega}(x)$ ammette il solo punto singolare $x = 1$ a distanza finita, e quindi anche U è un'operazione semplice.

Analogamente risulta dalla forma dei coefficienti q_n ed $1/q_n$ che U_1 e la sua inversa sono operazioni semplici, talchè la F è un caso particolare dell'operazione A studiata nei §§ 67 e seguenti.

82. — Dal paragrafo precedente risulta che se a_n, b_n sono polinomi razionali interi di grado m in n, la serie

$$\omega(x) = \Sigma \frac{b_0\, b_1 \dots b_{n-1}}{a_0\, a_1 \dots a_n}\, x^n, \quad \left(\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = z\right),$$

definisce una funzione analitica avente nel piano x la sola singolarità $x = z$ a distanza finita. Se una serie $\varphi(x) = \Sigma\, k_n\, x^n$, avente $[z]$ come cerchio di convergenza, sarà singolare come $\omega(x)$ sulla circonferenza $[z]$, la F corrispondente toglierà la singolarità alla $\varphi(x)$; in altri termini, dovranno i coefficienti k_n verificare la condizione necessaria e sufficiente:

$$|a_n\, k_n - b_{n-1}\, k_{n-1}| < m\, \eta^n / |z|^n,$$

dove m ed η sono numeri positivi ed è $\eta < 1$. L'operazione F toglie quindi, e la F^{-1} introduce, in generale, la singolarità rappresentata da $\omega(x)$; però, F^{-1} non introduce questa singolarità in una serie di S_z, quando i coefficienti g_n della serie soddisfano alla condizione (14):

$$g_0 + g_1 \frac{a_0}{b_0} + g_2 \frac{a_0\, a_1}{b_0\, b_1} + \dots = 0,$$

in cui il primo membro è una serie di funzioni razionali di n.

III. — Uso delle operazioni normali d'ordine superiore nel togliere singolarità.

83. — Consideriamo un'operazione normale P di ordine m, definita nell'insieme S dalle relazioni

$$P(x^n) = a_{n,0}\, x^n + a_{n,1}\, x^{n+1} + \dots + a_{n,m}\, x^{n+m}. \tag{18}$$

Abbiamo dimostrato al § 57 che una simile operazione si può presentare sotto forma del prodotto

$$P = U_m\, M_{z_m - x}\, U_{m-1} \dots U_1\, M_{z_1 - x}\, U_0, \tag{19}$$

dove $U_0, U_1, \dots, U_m$ sono operazioni normali d'ordine nullo, definite in S da:

$$U_i\,(x^n) = p_{in}\, x^n, \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \dots, m, \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}.$$

Faremo ora le seguenti ipotesi:

a) che si siano trovati numeri opportuni $z_1, z_2, \ldots, z_m$ per i quali le operazioni U che figurano nella scomposizione (19) siano semplici insieme alle loro inverse;

b) che sia $|z_1| < |z_2| < \ldots < |z_m|$. La z_m, che ha il modulo massimo, verrà indicata semplicemente con z; S_z rappresenterà ancora l'insieme delle serie di potenze di z il cui raggio di convergenza è superiore a $|z|$; infine si userà la lettera ϱ, affetta o no da indici, per indicare le serie di S_z.

84. — Sotto le ipotesi del paragrafo precedente, l'operazione P applicata ad una serie di potenze φ di cui $[r]$ è il cerchio di convergenza, dà una serie ψ di potenze il cui cerchio di convergenza non può essere inferiore ad $[r]$, ma può, in alcuni casi, essere maggiore. Quando ciò accada, l'operazione P avrà per effetto di *togliere le singolarità della $\varphi(x)$ sulla circonferenza r.* Ci proponiamo di vedere quali singolarità possono effettivamente venire tolte dalla P.

A quest'uopo, sia posto:

$$A_1 = M_{z_1-x}\, U_0, \; A_2 = M_{z_2-x}\, U_1, \quad \ldots, \; A_m = U_m\, M_{z_m-x}\, U_{m-1},$$

onde

$$P = A_m\, A_{m-1} \ldots A_2\, A_1. \tag{20}$$

La formula (20) ci dà così una scomposizione di P in un prodotto di m operazioni normali del primo ordine, della forma di quelle precedentemente studiate (§§ 67 e seg.). Sappiamo pertanto che ad ogni operazione A_i corrisponde una serie di potenze ω_i, la quale soddisfa all'equazione

$$A_i\,(\omega_i) = 1\,;$$

posto

$$U_i\,(x^n) = p_{i,n}\, x^n,$$

la serie ω_i è data da

$$\omega_i\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{p_{i-1,n}\, z_i^n}, \tag{21}$$

e rappresenta una funzione analitica che a distanza finita ha per solo punto singolare $x = z_i$; l'operazione A_i^{-1} introduce e la A_i fa sparire questa singolarità (§ 80). Consideriamo ora le funzioni:

$$\begin{cases} \pi_1 = \omega_1, \quad \pi_2 = A_1^{-1}\,(\omega_2), \\ \pi_3 = A_1^{-1}\, A_2^{-1}\,(\omega_3), \quad \ldots, \; \pi_m = A_1^{-1}\, A_2^{-1} \ldots A_{m-1}^{-1}\,(\omega_m). \end{cases} \tag{22}$$

Dico che la funzione π_i ammette a distanza finita al più i singolarità isolate nei punti $z_1, z_2, \ldots, z_i$. Infatti, la π_1 non differisce da ω_1 ed ammette la sola singolarità z_1 a distanza finita. La ω_2 ammette la sola z_2 ed è quindi una serie di S_{z_1}; applicandovi la $A_0^{-1} = U_0^{-1} M_{1/(z_1-x)}$, non s'introduce altra singolarità che quella in z_1, e quindi π_2 ha (al più) sole singolarità isolate in z_1 e z_2 a distanza finita. Analogamente per $\pi_3, \ldots, \pi_i$.

85. — Applicando ora la operazione P ad una serie di potenze della forma

$$\varphi(x) = c\, \pi_i(x) + \varrho,$$

dove ϱ, come è stabilito, è una serie di S_z, avremo, per la (20),

$$P(\varphi) = c\, A_m A_{m-1} \ldots A_2 A_1 (\pi_i) + P(\varrho);$$

ora $P(\varrho)$ è una serie ϱ_1, e, poichè

$$\pi_i = A_1^{-1} A_2^{-1} \ldots A_{i-1}^{-1} (\omega_i) \quad \text{ed} \quad A_i(\omega_i) = 1,$$

viene

$$P(\varphi) = c\, A_m A_{m-1} \ldots A_{i+1} (1) + \varrho_1.$$

In questo secondo membro il primo termine è un polinomio razionale intero in x, al più del grado $m - i$; il secondo termine è una serie di S_z, onde $P(\varphi)$ è una serie di S_z: cioè P toglie le singolarità che π_i ammette entro il cerchio $[z]$. Se ne conclude che *l'operazione P toglie le singolarità rappresentate dalle funzioni π_1, $\pi_2, \ldots, \pi_m$: cioè, essendo $c_1, c_2, \ldots, c_m$ costanti arbitrarie, la P applicata a*

$$c_1 \pi_1 + c_2 \pi_2 + \ldots + c_m \pi_m + \varrho \tag{23}$$

dà una serie ϱ.

Si avverta che $P(\pi_m) = 1$, e che $P(\pi_{m-i})$ è un polinomio di grado i in k, a coefficienti facilmente calcolabili.

86. — Reciprocamente a quanto è dimostrato nel paragrafo precedente, sia φ una serie di potenze cui P tolga la singolarità in $[z]$; vale a dire la φ non sia una serie ϱ, ma sia tale la $P(\varphi)$. Dico che φ deve essere della forma (23). Se infatti è $P(\varphi) = \varrho$, ne viene

$$P^{-1}(\varrho) = A_1^{-1} A_2^{-1} \ldots A_m^{-1} (\varrho) = \varphi;$$

ora $A_m^{-1}(\varrho)$ non può avere singolarità in $[z]$ se non nel punto z_m, e sarà (§ 80):

$$A_m^{-1}(\varrho) = c\,\omega_m + \varrho_1 ;$$

da questa:

$$A_{m-1}^{-1} A_m^{-1}(\varrho) = c\,A_{m-1}^{-1}(\omega_m) + c_1\,\omega_{m-1} + \varrho_2 ,$$

$$A_{m-2}^{-1} A_{m-1}^{-1} A_m^{-1}(\varrho) = c\,A_{m-2}^{-1} A_{m-1}^{-1}(\omega_m) + c_1\,A_{m-1}^{-1}(\omega_{m-1}) + c_2\,\omega_{m-2} + \varrho_3 ,$$

e così via. Tenuto conto delle (22), si ottiene

$$P^{-1}(\varrho) = c\,\pi_m + c_1\,\pi_{m-1} + \ldots + c_{m-1}\,\pi_1 + \varrho_{m+1} ,$$

c. d. d..

87. — Si avrà un esempio delle singolarità introdotte da P^{-1} risolvendo l'equazione funzionale

$$P(\omega) = b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + \ldots + b_{m-1}\,x^{m-1} , \tag{24}$$

rispetto alla funzione ω. Posto $\omega = \Sigma\,k_n\,x^n$ e $P(\omega) = \Sigma\,g_n\,x^n$, sappiamo dal § 50 che le relazioni fra le g_n e le k_n sono espresse da

$$g_0 = a_{00}\,k_0 ,\; g_n = \Phi(k_n) = a_{n0}\,k_n + a_{n-1,1}\,k_{n-1} + \ldots + a_{n-m,m}\,k_{n-m} . \tag{25}$$

Per la determinazione dei coefficienti k_n, cioè per la risoluzione dell'equazione proposta, si tratterà dunque semplicemente di risolvere l'equazione lineare alle differenze

$$\Phi(k_n) = 0 , \tag{26}$$

con le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} a_{00}\,k_0 = b_0 , \quad a_{10}\,k_1 + a_{01}\,k_0 = b_1 , \quad \ldots , \\ a_{m-1,0}\,k_{m-1} + a_{m-2,1}\,k_{m-2} + \ldots + a_{0,m-1}\,k_0 = b_{m-1} . \end{cases} \tag{27}$$

L'arbitrarietà dei coefficienti del secondo membro della (24) equivale a quella delle costanti nell'integrale della (26), e la determinazione delle une porta, linearmente, a quella degli altri.

88. — Abbiamo così ottenuto il seguente risultato:

Una serie $\Sigma\,k_n\,x^n$ i cui coefficienti soddisfano all'equazione lineare alle differenze, d'ordine m, $\Phi(k_n) = 0$, il cui primo membro è la *trasformata* $C P C^{-1}$ *di* P *mediante l'operazione* C *definita al* § 30, *rappresenta una funzione che ha entro il cerchio* $[z]$ *i soli punti singolari* $z_1, z_2, \dots, z_m$, *e le singolarità in questi punti sono tolte mediante l'applicazione della* P.

Si ha ancora che per la serie $\Sigma k_n x^n$, in discorso, il limite superiore dell'insieme derivato di $|\sqrt[n]{k_n}|$ è, in generale, $1/|z_1|$ e non è in nessun caso maggiore: potendosi ridurre, per una scelta opportuna delle $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}$, ad essere $1/|z_i|$, $(i > 1)$ (¹).

89. — Dalla scomposizione di P in fattori nella forma (20) segue che anche la sua trasformata $C P C^{-1} = \Phi$ si scompone nella forma

$$\Phi = \Pi_m \Pi_{m-1} \dots \Pi_2 \Pi_1, \tag{28}$$

dove Π_i è la forma lineare alle differenze, del primo ordine,

$$\Pi_i = z_i p_{i-1,n} k_n - p_{i-1,n-1} k_{n-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, m-1),$$

mentre è

$$\Pi_m = p_{m,n} (z_m p_{m-1,n} k_n - p_{m-1,n-1} k_{n-1}).$$

I coefficienti della soluzione ω dell'equazione (24) si ottengono dall'integrazione della equazione $\Phi = 0$; ora questa integrazione è ricondotta a quella delle forme Π_i di primo ordime, poichè indicando con

$$h'_n, \quad h''_n, \quad \dots, \quad h_n^{(m)}$$

gli integrali di $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0, \dots, \Pi_m = 0$ rispettivamente, si vede immediatamente che un sistema fondamentale di integrali di $\Phi = 0$ sarà dato da

$$k'_n = h'_n, \quad k''_n = \Pi_1^{-1}(h''_n), \quad k'''_n = \Pi_1^{-1} \Pi_2^{-1}(h'''_n), \quad \dots .$$

90. — Se si applica l'operazione P ad una serie ϱ si ritrova una serie ϱ_1. Ma quest'ultima ha coefficienti che soddisfano ad un certo numero di relazioni necessarie. Sia infatti k_n il coefficiente di

(¹) Cfr. POINCARÉ, Americ. Journal of Math., T. VII, 1885, (§ 2).

x^n in ϱ, e g_n quello di x^n in ϱ_1; si avrà:

$$g_n = \Pi_m \, \Pi_{m-1} \dots \Pi_2 \, \Pi_1 \, (k_n) .$$

Si ponga

$$\Pi_{m-1} \, \Pi_{m-2} \dots \Pi_1 \, (k_n) = g'_n ;$$

anche $\Sigma \, g'_n \, x^n$ sarà una serie ϱ, e si otterrà

$$g_n = \Pi_m \, (g'_n) ;$$

onde, in forza del § 78, se $t_n^{(m)}$ è l'integrale dell'equazione alle differenze $\overline{\Pi}_m = 0$, aggiunta di $\Pi_m = 0$, si avrà:

$$\Sigma \, g_n \, t_n^{(m)} = 0 . \tag{29}$$

Si ponga poi

$$\Pi_{m-2} \, \Pi_{m-3} \dots \Pi_1 \, (k_n) = g''_n ,$$

e si indichi con $\overline{\Pi}_i$ l'aggiunta di Π_i; considerando l'equazione $\overline{\Pi}_{m-1} \, \overline{\Pi}_m = 0$ (1), aggiunta di $\Pi_m \, \Pi_{m-1} = 0$, un sistema fondamentale dei suoi integrali risulti costituito da $t_n^{(m)}$, integrale di $\overline{\Pi}_m = 0$, e da un altro $t_n^{(m-1)}$: per quest'ultimo sarà

$$\overline{\Pi}_{m-1} \, \overline{\Pi}_m \, (t_n^{(m-1)}) = 0 ,$$

e siccome $t_n^{(m-1)}$ non annulla $\overline{\Pi}_m$, $\overline{\Pi}_m \, (t_n^{(m-1)})$ è integrale di $\overline{\Pi}_{m-1} = 0$. Ora è

$$g'_n = \Pi_{m-1} \, (g''_n) ,$$

onde, per il citato § 78, sarà:

$$\Sigma \, g'_n \, \overline{\Pi}_m \, (t_n^{(m-1)}) = 0 . \tag{30}$$

Ma per le proprietà dell'operazione aggiunta $\overline{K}$ di una forma lineare alle differenze K, si ha (2):

$$\Sigma \, K(a_n) \, b_n = \Sigma \, a_n \, \overline{K}(b_n) ,$$

---

(1) Nota citata: *Sull'operazione aggiunta,* § 6.

(2) Ibid., § 3.

onde la (30) si potrà scrivere

$$\Sigma\, \Pi_m\,(g'_n)\, t_n^{(m-1)} = 0\,,$$

ossia

$$\Sigma\, g_n\, t_n^{(m-1)} = 0\,.$$

Così continuando si vede che le g_n soddisfano alla relazione

(31) $$\Sigma\, g_n\, t_n = 0\,,$$

essendo t_n un integrale qualunque dell'equazione

(32) $$\overline{\Phi} = \overline{\Pi}_1\, \overline{\Pi}_2 \ldots \overline{\Pi}_m = 0\,,$$

aggiunta di $\Phi = 0$. Siccome tale integrale contiene m costanti arbitrarie, così la (31) equivale ad m relazioni indipendenti della stessa forma.

91. — Rimane ora da vedere che le serie $\Sigma\, g_n\, t_n$ del paragrafo precedente sono assolutamente convergenti, essendo t_n un integrale qualunque dell'equazione (32). Ciò si dimostrerà provando che è assolutamente convergente la serie $\Sigma\, g_n\, u_n$, dove g_n sono i coefficienti di una serie ϱ ed u_n l'integrale di una qualunque delle equazioni $\overline{\Pi}_i = 0$. Ora, se si ha in generale

$$\Pi(k_n) = (p_{n+1}\, k_{n+1}\, z_i - p_n\, k_n)\, q_n\,,$$

ne viene [1]

$$\overline{\Pi}(k_n) = p_n\,(q_{n-1}\, k_{n-1}\, z - q_n\, k_n)\,.$$

L'integrale di quest'ultima forma è $u_n = z_i^n / q_n$: per le proprietà di q_n, poichè $\Sigma\, g_n\, x^n$ converge in un cerchio maggiore di $[z_m]$, e $|z_i| \leq |z_m|$, segue che $\Sigma\, g_n\, u_n$ è assolutamente convergente.

92. — Dalle cose dette si conclude:

a) *L'applicazione dell'operazione P ad una serie ϱ di S_z produce una serie ϱ_1 di S_z; non però qualunque, poichè i coefficienti della ϱ_1 soddisfano ad m relazioni indipendenti della forma* (31).

---

[1] *Sull'operazione aggiunta*, § 11.

b) *L'applicazione di* P *ad una serie* φ *non appartenente ad* S_z *produce una serie di* S_z *se e soltanto se la funzione* φ *ammette entro* $[z]$ *i soli punti* $z_1, z_2, \dots, z_m$ *come punti singolari, con singolarità della forma* (23).

Di conseguenza:

c) *L'applicazione dell'operazione* P^{-1} *ad una serie* ϱ *di* S_z *produrrà in generale una serie non appartenente ad* S_z*; affinchè* φ *appartenga ad* S_z *devono necessariamente essere soddisfatte le condizioni* (31) *dai coefficienti di* ϱ.

d) *Queste condizioni sono anche sufficienti affinchè* $P^{-1}(\varrho)$ *sia una serie* ϱ_1. Infatti, sia $\varrho = \Sigma\, g_n\, x^n$ una serie i cui coefficienti soddisfino alla condizione (31) per ogni integrale t_n dell'equazione $\overline{\Phi} = 0$. Applicando dapprima a ϱ l'operazione A_m^{-1} si abbia

$$A_m^{-1}(\varrho) = \Sigma\, g'_n\, x^n = \lambda_1 .$$

Ne viene $A_m(\lambda_1) = \varrho$, ossia $\Pi_m(g'_n) = g_n$; ma poichè le g_n soddisfano alla (31) per ogni integrale di $\overline{\Phi} = 0$, sarà anche $\Sigma\, g_n\, t_n^{(1)} = 0$ per quell'integrale $t_n^{(1)}$ che annulla $\overline{\Pi}_m$. Perciò, per il teorema del § 80, A_m^{-1} applicata a ϱ non introduce singolarità, cioè λ_1 è una serie di S_z.

Considero ora $A_{m-1}^{-1}(\lambda_1) = \Sigma\, g''_n\, x^n = \lambda_2$. Dico che anche λ_2 è una serie di S_z. Infatti, per l'ipotesi fatta sulle g_n, sarà anche $\Sigma\, g_n\, t_n^{(2)} = 0$ per quell'integrale $t_n^{(2)}$ della (32) per il quale è nullo $\overline{\Pi}_{m-1}\, \overline{\Pi}_m$. Si ha cioè che

$$\overline{\Pi}_m(t_n^{(2)}) = s_n$$

è integrale di $\overline{\Pi}_{m-1} = 0$. Ma si può scrivere, per le proprietà delle operazioni aggiunte,

$$0 = \Sigma\, g_n\, t_n^{(2)} = \Sigma\, \Pi_m(g'_n)\, t_n^{(2)} = \Sigma\, g'_n\, \overline{\Pi}_m(t_n^{(2)}),$$

ossia

$$\Sigma\, g'_n\, s_n = 0 ;$$

onde è soddisfatta la condizione del teorema del § 80 perchè $A_{m-1}^{-1}\, \lambda_1 = \lambda_2$ sia una serie di S_z. Così continuando, si giunge alla conclusione che

$$A_{m-2}^{-1}\, A_{m-1}^{-1}\, A_m^{-1}(\varrho), \quad \dots, \quad A_2^{-1}\, A_3^{-1} \dots A_m^{-1}(\varrho),$$

ed infine $P^{-1}(\varrho) = A_1^{-1}\, A_2^{-1} \dots A_m^{-1}(\varrho)$, sono serie di S_z, c. d. d. .

93. — L'operazione P definita dalle (18) ha dunque la proprietà di togliere da una funzione analitica un certo complesso di singolarità; la P^{-1} introduce invece queste singolarità quando essa si applichi ad una serie di S_z. Le condizioni (31), cui soddisfano i coefficienti di quelle serie di S_z nelle quali, per eccezione, la P^{-1} non introduce singolarità, sono analoghe alle condizioni di divisibilità di una serie per un polinomio, e si riducono a quelle condizioni quando tutte le operazioni U che fignrano nella (19) si riducono all'operazione identica.

94. — Siano ancora $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ le funzioni che definiscono le singolarità che P è suscettibile di togliere. Se si pone l'equazione funzionale, dove ϱ è una serie data,

$$P(\varphi) = \varrho, \qquad \text{oppure} \quad \varphi = P^{-1}(\varrho),$$

si avrà, per il § **86**,

$$\varphi = c_1 \pi_1 + c_2 \pi_2 + \ldots + c_m \pi_m + \varrho_1 .$$

L'applicazione di P ai due membri di questa eguaglianza darà un polinomio razionale intero di grado $m - 1$, più la funzione $P(\varrho_1) = \varrho_2$. Talchè

$$P(\varphi) = \varrho_2 + d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots + d_{m-1} x^{m-1} = \varrho .$$

La serie ϱ_2, essendo il risultato di $P(\varrho_1)$, sarà una serie i cui coefficienti soddisfano alle condizioni (31); tale è dunque anche

$$\varrho - (d_0 + d_1 x + \ldots + d_{m-1} x^{m-1}) .$$

Se dunque la serie data ϱ è, ad esempio, la $\Sigma\, h_n x^n$, si avrà

$$\varrho - (d_0 + d_1 x + \ldots + d_{m-1} x^{m-1}) =$$

$$= h_0 - d_0 + (h_1 - d_1) x + \ldots + (h_{m-1} - d_{m-1}) x^{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} h_n x^n ,$$

e dovrà essere, indicando con

$$t'_n, \quad t''_n, \quad \ldots, \quad t_n^{(m)}$$

un sistema fondamentale di integrali delle $\overline{\Phi} = 0$,

$$(h_0 - d_0)\, t_0^{(i)} + (h_1 - d_1)\, t_1^{(i)} + \dots + (h_{m-1} - d_{m-1})\, t_{m-1}^{(i)} + h_m\, t_m^{(i)} + \dots = 0,$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Queste equazioni servono a determinare i coefficienti $d_0, d_1, \dots, d_{m-1}$, e mediante questi (§ 85) le costanti $c_1, c_2, \dots, c_m$, cioè la parte singolare entro $[z]$ della $P^{-1}(\varrho)$.

IV. — Applicazione alle equazioni differenziali lineari.

95. — Come applicazione di quanto precede, consideriamo l'operazione rappresentata dal primo membro di un'equazione differenziale lineare del tipo di FUCHS, e che dicesi forma differenziale lineare normale. Per ottenere una semplificazione di scrittura che non altera la sostanza della questione, ci limiteremo al caso di una forma differenziale lineare, d'ordine qualunque q, a coefficienti trinomi, e sia:

$$F(\varphi) = \sum_{i=0}^{q} (h_i + h_i' x + h_i'' x^2) \frac{x^i}{i!} \varphi^{(i)}. \tag{33}$$

Si ha

$$F(x^n) = (a_n + a_n' x + a_n'' x^2)\, x^n, \tag{34}$$

dove

$$a_n = h_0 + h_1 n + h_2 \binom{n}{2} + \dots + h_q \binom{n}{q},$$

ed analoghe espressioni si hanno per a_n' ed a_n''. Si supporranno diversi da zero a_n ed a_n'' per $n = 0, 1, 2, \dots$; si supporranno ancora di modulo diverso le radici z e z' dell'equazione

$$h_q + h_q' x + h_q'' x^2 = 0,$$

e precisamente

$$|z'| < |z|.$$

I punti singolari dell'equazione differenziale lineare omogenea

$$F(\varphi) = 0 \tag{35}$$

saranno $x = 0$, z', z. L'equazione differenziale lineare non omogenea

$$F(\varphi) = c + c' x \tag{36}$$

avrà, nell'intorno del punto $x = 0$, un integrale (ed uno solo) sviluppabile in serie di potenze intere positive di x; sia $\omega(x\,;\, c, c')$ questo sviluppo, che convergerà in generale entro il cerchio $[z']$ ed eccezionalmente entro il cerchio $[z]$.

96. — Dico ora che è possibile determinare le costanti c, c' per modo che $\omega(x\,;\, c, c')$ rappresenti una funzione analitica semplice (§ 66) col solo punto singolare z' a distanza finita. Si ha, intanto,

$$\omega(x\,;\, c, c') = c\omega(x\,;\, 1, 0) + c'\omega(x\,;\, 0, 1).$$

Ora, nel piano della variabile x conduciamo un taglio lungo una linea l che vada da z' all'infinito senza passare per z nè penetrare entro il cerchio $[z']$; nel piano così tagliato $\omega(x\,;\, 1, 0)$ ed $\omega(x\,;\, 0, 1)$ sono funzioni analitiche singolari nel punto z, in cui la loro singolarità è rappresentata da

$$(x - z)^{\varepsilon}\, \eta(x), \tag{37}$$

essendo ε la radice non nulla dell'equazione determinante della (35) rispetto al punto z, e l'espressione (37) essendo l'integrale canonico relativo. Si avranno dunque, nell'intorno del punto z, per le funzioni $\omega(x\,;\, 1, 0)$ ed $\omega(x\,;\, 0, 1)$ i seguenti sviluppi:

$$\omega(x\,;\, 1, 0) = e\,(x - z)^{\varepsilon}\, \eta(x) + \mathscr{P}(x - z),$$

$$\omega(x\,;\, 0, 1) = e_1\,(x - z)^{\varepsilon}\, \eta(x) + \mathscr{P}_1(x - z),$$

essendo e ed e_1 due costanti e $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_1$ sviluppi in serie di potenze. Prese dunque $\bar{c}$ e $\bar{c}'$ per modo che sia

$$\bar{c}\, e + \bar{c}'\, e_1 = 0,$$

viene

$$\omega(x\,;\, \bar{c}, \bar{c}') = \bar{c}\, \mathscr{P}(x - z) + \bar{c}'\, \mathscr{P}_1(x - z);$$

abbiamo cioè un'equazione (36) che ammette un integrale il quale non ha più singolarità per $x = z$, Rappresenteremo quest' integrale $\omega(x; \overline{c}, \overline{c'})$ semplicemente con $\omega(x)$; la $\omega(x)$ è un ramo di funzione analitica che nel piano tagliato nel modo indicato non ha singolarità fuori di l, ed è quindi una funzione semplice. Come tale, essa caratterizza in generale (§ 73) una operazione normale di primo ordine $A_1 = M_{z'-x}\, U_0$, il cui effetto è di togliere la singolarità definita da $\omega(x)$ nel punto z'.

Ottenuta la A_1, riprendiamo la forma F e col metodo indicato al § 58 determiniamo l'operazione normale di primo ordine A_2 tale che sia

$$F = A_2\, A_1.$$

Intanto A_1 toglie la singolarità rappresentata da $\omega(x)$. Ma ogni altro integrale della (36) ha quella stessa singolarità in z': ne viene che se ω_1 è un altro integrale della (36) per valori arbitrari delle c, c', la $A_1(\omega_1) = \pi$ non sarà singolare se non nel punto z. Sarà dunque π una funzione semplice; ma

$$F(\omega_1) = A_2(\pi) = c + c'\, x,$$

non avendo singolarità a distanza finita, la singolarità di π in z è tolta da A_2. La forma differenziale lineare F è dunque scomposta, nel modo indicato dalla formula (20), in un prodotto di due fattori di cui il primo A_1 toglie la singolarità ω, il secondo la singolarità π; tale forma F appartiene cioè alla specie delle operazioni P studiate nei §§ 84 e seguenti.

97. — L'operazione C definita al § 30 trasforma l'operazione F nella $C\,F\,C^{-1} = \Phi$ data da

$$\Phi(k_n) = a_n\, k_n + a'_{n-1}\, k_{n-1} + a''_{n-2}\, k_{n-2},$$

forma lineare alle differenze di secondo ordine, i cui coefficienti sono polinomi in n del grado q. La sua forma aggiunta è

$$\overline{\Phi}(k_n) = a_n\, k_n + a'_n\, k_{n+1} + a''_n\, k_{n+2}.$$

Alla scomposizione di F in fattori A_1, A_2, corrisponde la scomposizione di Φ e di $\overline{\Phi}$ in prodotto di due forme lineari alle differenze del primo ordine. Sia r_n, r'_n un sistema fondamentale di integrali di $\overline{\Phi} = 0$: l'operazione F applicata ad una serie ϱ di S_z darà una serie di ϱ_1 pure di S_z i cui coefficienti g_n soddisferanno alle condizioni:

$$(38) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} g_n r_n = 0, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} g_n r'_n = 0.$$

Queste sono anche le condizioni sufficienti affinchè l'equazione differenziale lineare non omogenea $F(\varphi) = \varrho_1$ ammetta come soluzione una serie ϱ di S_z.

98. — Risulta da quanto precede che ogni funzione φ, singolare come un integrale dell'equazione (36), è tale che le sue singolarità sono tolte mediante l'applicazione dell'operazione F. Dico ora che, reciprocamente, se φ è una funzione alla quale la forma F tolga le singolarità che essa ammette entro $[z]$, queste singolarità sono quelle stesse dell' integrale $\omega(x\,;\,c, c')$ della (36). Infatti, essendo φ una serie di S_z, si abbia

$$F(\varphi) = \varrho = \Sigma\, g_n x^n.$$

O i coefficienti g_n soddisfano alle condizioni (38), e allora φ è una serie ϱ_1 di S_z, cioè non ha singolarità entro $[z]$. O esse non sono verificate; allora si possono determinare le costanti d e d' (§ **94**) in modo che sia

$$d\, r_0 + d'\, r_1 = \sum_0^{\infty} g_n r_n, \qquad d\, r'_0 + d'\, r'_1 = \sum_0^{\infty} g_n r'_n,$$

e alle (38) soddisferanno i coefficienti della serie $\varrho - d - d'x$. L'equazione

$$F(\varphi) = \varrho - d - d'x,$$

avrà dunque come integrale una serie ϱ_1; ma l'equazione

$$F(\varphi) = d + d'x$$

ha per integrale la $\omega(x\,;\,d, d')$; onde l'integrale della equazione proposta $F(\varphi) = \varrho$ sarà la funzione

$$\varphi = \varrho_1 + \omega(x\,;\,d, d'),$$

la quale ammette entro il cerchio $[z]$ la singolarità caratterizzata da $\omega(x\,;\,d, d)$.