Corrado Segre

Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque

Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **19** (1883-84), p. 355–372

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. 1–16

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_1_1>

I.

SULLE RIGATE RAZIONALI IN UNO SPAZIO LINEARE QUALUNQUE

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino »,
vol. XIX, 1883-84, pp. 265-282.

In alcune ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, i cui risultati esporrò prossimamente, mi fu necessario studiare le superficie rigate a 2 dimensioni d'ordine n dello spazio ad $n+1$ dimensioni. Tali rigate sono sempre razionali e possono esser generate come luogo delle rette d'intersezione degli S_n (spazi lineari ad n dimensioni) corrispondenti di n fasci proiettivi, e da tal punto di vista esse furono già studiate dal Veronese nel § 4 della 5ª parte di un suo importante lavoro (1). Però pel mio scopo occorreva risolvere quest'altra questione: quante specie di tali rigate vi siano dal punto di vista proiettivo, vale a dire quando è che due tali rigate si possono trasformare proiettivamente l'una nell'altra. Il Veronese dalla generazione accennata dedusse che tutte quelle rigate sono tra loro proiettivamente identiche (2) e perciò diede ad esse il nome di rigate *normali*: invece, prendendo un altro modo di generazione delle rigate stesse, mi riuscì facile lo scorgere che quella conclusione non era rigorosa, poichè al contrario (escludendo il gruppo dei coni) vi sono $(n-1)/2$ oppure $n/2$ gruppi di tali rigate (secondo che n è impari o pari) in modo che due rigate si possono trasformare proiettivamente l'una nell'altra solo quando appartengono allo stesso gruppo. Di questi vari gruppi di rigate poi trovai diverse proprietà, la cui esposizione costituisce l'oggetto di questa Nota.

(1) *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens,* Math. Ann., XIX, pp. 161-234.

(2) Loc. cit., p. 228: *Daher müssen alle eigentlichen* $R_1 - F_2^{n-1}$ *des* R_n *projectivisch gleichberechtigt sein.*

Le rigate razionali di ordine n degli spazi lineari di numero di dimensioni minore di $n+1$ si possono ottenere mediante proiezioni da quelle considerate appartenenti allo spazio ad $n+1$ dimensioni. Perciò anche in quegli spazi le rigate razionali formeranno vari gruppi, le cui proprietà si dedurranno da quelle dei gruppi di rigate di cui sono le proiezioni. In particolare si ottengono così delle proprietà delle rigate razionali dello spazio ordinario, rigate che vennero specialmente studiate dal Clebsch (3), il quale ne diede una distinzione in gruppi, coincidente affatto con quella che io qui ne trovo. Il Clebsch si era occupato specialmente della rappresentazione di quelle rigate su un piano: pensai che questa rappresentazione si potesse pure ottenere proiettando le rigate dello spazio ad $n+1$ dimensioni su un piano ed infatti, resa univoca con un semplice artifizio la proiezione di quelle rigate su un piano, ottenni con quei mezzi semplicissimi, che costituiscono appunto il metodo del proiettare, tutte le rappresentazioni piane date dal Clebsch insieme colle loro varie proprietà. Il confronto tra il metodo analitico tenuto dal Clebsch per giungere ai suoi risultati e quello geometrico semplicissimo qui usato è assai interessante e potrà servire a provare sempre più al lettore l'utilità dell'uso della geometria degli spazi a quante si vogliano dimensioni per lo studio dello spazio ordinario.

Per non allungare troppo questa Nota ho omesso di approfondire ulteriormente la teoria delle rigate razionali ed altre teorie affini a questa; le mie ricerche su questo argomento potranno formare oggetto di altri lavori.

I.

Proprietà generali delle F_2^n rigate in un S_{n+1}.

1. Consideriamo in uno spazio lineare ad $n+1$ dimensioni una superficie rigata a 2 dimensioni d'ordine n, F_2^n, la quale supporremo non sia contenuta in uno spazio lineare di meno che $n+1$ dimensioni e che inoltre non si scinda in superficie d'ordine inferiore. Da queste ipotesi segue che un S_n qualunque taglierà in generale F_2^n secondo una curva d'ordine n non degenere e non contenuta in ispazi lineari a numero di dimensioni minore di n, cioè secondo

---

(3) *Ueber die geradlinigen Flächen vom Geschlechte* $p=0$. Math. Ann., V, pp. 1-26.

una curva razionale *normale* per un S_n [4]. Quindi la nostra rigata, avendo le sue generatrici corrispondenti univocamente ai punti in cui tagliano una tal curva, sarà anch'essa razionale.

Nel caso in cui tutte le generatrici passassero per un punto, la rigata sarebbe un *cono* razionale d'ordine n: noi escluderemo d'or innanzi questo caso, poichè le proprietà di questi coni si trovano immediatamente considerandoli come provenienti dal proiettare una curva normale d'ordine n dello spazio ad n dimensioni da un punto posto fuori di questo.

2. Ogni S_n taglia la F_2^n in una curva normale d'ordine n, oppure in una curva d'ordine $k < n$ incontrata da tutte le generatrici ed in $n - k$ generatrici; ma non può la curva d'intersezione scindersi in due o più curve propriamente dette, altrimenti la rigata si scinderebbe in altre rigate, le cui generatrici taglierebbero rispettivamente quelle varie curve. Possiamo aggiungere che ogni curva di ordine $m \leq n$ contenuta nella superficie è una curva normale dello spazio ad m dimensioni, vale a dire, non sta in uno spazio di minor numero μ di dimensioni: infatti se stesse in un tale spazio, siccome tutte le generatrici dovrebbero tagliare quella curva, si potrebbe per lo spazio stesso e per $n - \mu$ punti della superficie posti fuori di esso e su generatrici diverse far passare un S_n, il quale conterrebbe le $n - \mu$ generatrici passanti per quei punti ed inoltre la curva d'ordine m e quindi taglierebbe la superficie in una curva composta d'ordine $n + m - \mu > n$, il che non può essere se quell'S_n non contiene tutta la superficie. — La stessa dimostrazione prova che anche quando la curva d'ordine m si scinde in più generatrici ed una curva semplice *direttrice*, essa non può appartenere ad uno spazio di meno che m dimensioni.

Come applicazione di quest'ultima proposizione abbiamo che ogni curva semplice d'ordine $\leq n$ contenuta nella superficie, taglia ciascuna generatrice in un punto solo.

3. Immaginiamo condotto un S_n per un certo numero di generatrici della F_2^n: esso taglierà ancora questa superficie in una curva, la quale potrà decomporsi in altre generatrici ed una curva d'or-

---

(4) V. Clifford, *On the classification of Loci* (Phil. Trans., 1878, pp. 663-681, od anche Math. Papers, pp. 305-329, e Veronese, Loc. cit., n. 35 e seg.

dine inferiore, ma certamente conterrà sempre una curva semplice *direttrice*, vale a dire incontrata da tutte le generatrici della rigata, perocchè ciascuna generatrice incontra quell'S_n. Siccome per un S_n la condizione di passare per una data generatrice equivale alle due condizioni di passare per due punti di questa, così possiamo assoggettare un S_n alla condizione di passare per $(n+1)/2$ generatrici, se n è impari, e per $n/2$ generatrici se n è pari. Allora l'intersezione di quell'S_n colla nostra rigata conterrà oltre ad un certo numero di generatrici una curva semplice normale, il cui ordine sarà al più uguale ad $(n-1)/2$, ovvero ad $n/2$. Concludiamo dunque che: *Ogni* $\mathrm{F}_2^{\mathrm{n}}$ *rigata dello spazio lineare ad* $\mathrm{n}+1$ *dimensioni contiene almeno una curva normale, il cui ordine non supera* $(\mathrm{n}-1)/2$ *ovvero* $\mathrm{n}/2$ *secondochè* n *è dispari o pari.*

II.

Distinzione delle rigate considerate in gruppi.

4. Al risultato ora ottenuto aggiungiamo che la F_2^n non può contenere due curve semplici direttrici, i cui ordini m', m'' siano tali che $m'+m''<n$, poichè altrimenti ogni generatrice dovendo incontrarle entrambe, la rigata sarebbe contenuta in un $S_{m'+m''+1}$ condotto per gli $S_{m'}$, $S_{m''}$ contenenti quelle curve. Di qui segue che se una F_2^n contiene una direttrice il cui ordine m sia $\leq (n-1)/2$ se n è impari, ovvero $< n/2$ se n è pari, essa non contiene altra direttrice semplice il cui ordine sia inferiore ad $n-m$ e quindi in particolare nessun'altra direttrice il cui ordine sia pure $\leq (n-1)/2$, ovvero $< n/2$. Se poi, per n pari, la F_2^n contiene una direttrice il cui ordine sia $= n/2$, essa non conterrà alcuna curva direttrice d'ordine inferiore, ma potrà però contenere (e contiene effettivamente, come vedremo) altre curve dello stesso ordine. Queste osservazioni ci mostrano dunque che: *in ogni spazio ad* $\mathrm{n}+1$ *dimensioni, le rigate di ordine* n *sono di diverse specie, ben distinte tra loro, a seconda dell'ordine della direttrice minima* (vale a dire d'ordine minimo) *che esse contengono, quest'ordine potendo variare da* 1 *ad* $(n-1)/2$ *ovvero ad* $n/2$.

Chiameremo una rigata dell'm esimo *gruppo* quando la sua direttrice minima è dell'ordine m. Quindi le rigate del 1^0 gruppo hanno per direttrice minima una retta, quelle del 2^0 gruppo una conica, quelle del 3^0 gruppo una cubica e così via. Nello spazio a numero pari di dimensioni, cioè per n impari, vi sono $(n-1)/2$ gruppi: l'ultimo ha per direttrice minima una curva normale d'ordine $(n-1)/2$. Nello spazio a numero impari di dimensioni vi sono $n/2$ gruppi: il gruppo $(n/2)$esimo ha per direttrici minime delle curve d'ordine $n/2$.

A questi gruppi di rigate si potrebbe aggiungere il gruppo dei coni, che noi abbiamo escluso dai nostri ragionamenti e pel quale l'ordine della curva minima è 0, poichè tutte le generatrici passano per un punto.

5. Consideriamo una F_2^n del gruppo m^{esimo} e diciamone γ^m la direttrice minima, d'ordine m. Se si conduce un S_n per un numero di sue generatrici superiore ad m, esso taglierà γ^m in più di m punti e quindi conterrà quella curva e non potrà perciò tagliare la superficie che in altre generatrici: ciò s'accorda col fatto già dimostrato che la F_2^n non può contenere curve semplici (direttrici) d'ordine inferiore ad $n-m$ all'infuori di γ^m. Ma se invece si conduce un S_n per sole m generatrici, allora la parte rimanente della sua intersezione colla rigata non si decomporrà più in generale: si può assoggettare quell'S_n a passare oltre che per quelle generatrici per $(n-2m+1)$ punti della rigata posti su altrettante nuove generatrici e fuori della γ^m, ed allora si sarà certi che l'intersezione non si decomporrà più ulteriormente, perchè se si decomponesse dovrebbe contenere ancora γ^m e le $m+(n-2m+1)$ generatrici, cioè un insieme d'ordine $n+1$, il che non può essere. Dunque l'intersezione dell'S_n così determinato colla rigata comprende oltre alle m generatrici una curva semplice d'ordine $n-m$ passante per gli $(n-2m+1)$ punti scelti ad arbitrio sulla rigata. D'altronde tenendo fisse quelle m generatrici e facendo variare quegli $(n-2m+1)$ punti, vale a dire quell'S_n passante per le m generatrici stesse, si otterranno come residui delle intersezioni della rigata con tali S_n *tutte* le C^{n-m} (curve normali d'ordine $n-m$) contenute nella superficie; perocchè ogni C^{n-m} di questa tagliando ciascuna delle m generatrici considerate starà sempre in un S_n con esse. Quindi la proposizione dimostrata che la F_2^n rigata del gruppo m^{esimo} non contiene curve d'ordine inferiore ad $n-m$ viene completata aggiungendo che: *ogni rigata del gruppo* $\mathrm{m}^{\mathrm{esimo}}$ *contiene però* $\infty^{\mathrm{n}-2\mathrm{m}+1}$ *curve d'ordine* $\mathrm{n}-\mathrm{m}$, *una qualunque delle quali è individuata dalla condizione di passare per* $(\mathrm{n}-2\mathrm{m}+1)$ *punti arbitrari della superficie.* Due qualunque di tali curve d'ordine $n-m$ si tagliano in $n-2m$ punti, poichè conducendo per l'una di esse un S_n, questo taglierà ancora la rigata in m generatrici e taglierà l'altra curva in $n-m$ punti, dei quali m sta-

ranno rispettivamente su queste e gli altri $n - 2m$ in conseguenza sulla prima curva (5).

In particolare per n pari ed $m = n/2$ noi vediamo che su una rigata d'ordine pari e del gruppo $(n/2)$esimo vi sono, non una sola, ma ∞^1 direttrici (minime) d'ordine $n/2$, come già avevamo asserito: per ogni punto della superficie ne passa una sola, e due qualunque di tali curve non hanno alcun punto comune. Esse si possono tutte ottenere come intersezione della rigata con un fascio di S_n, il cui sostegno è un S_{n-1} condotto per $n/2$ generatrici arbitrarie.

III.

Costruzione delle rigate e loro equazioni canoniche.

6. Ora siamo in grado di provare l'esistenza effettiva delle superficie dei vari gruppi, ossia di costruirle. Considerando in fatti la F_2^n del gruppo m esimo, si vede che l'S_{n-m} contenente una qualunque delle sue C^{n-m} non può avere una posizione particolare rispetto all'S_m contenente la direttrice minima γ^m, vale a dire non può avere punti comuni con esso, perocchè altrimenti per quell'S_{n-m} e questo S_m si potrebbe far passare uno spazio ad un numero di dimensioni $< n+1$ il quale conterrebbe necessariamente la superficie, il che non è, per ipotesi. Inoltre osserviamo che due curve semplici qualunque d'ordine $\leq n$ della superficie, ed in particolare la direttrice minima d'ordine m e ciascuna delle direttrici d'ordine $n - m$, sono punteggiate proiettivamente dalle generatrici, perocchè per ciascun punto di ogni curva passa sempre, come vedremo tra poco (v. alla fine del n⁰ 9), una sola generatrice, ed ogni generatrice taglia in un punto solo ciascuna curva (come osservammo alla fine del n⁰ 2). Inversamente abbiansi su due spazi lineari ad m ed $n - m$ dimensioni indipendenti tra loro, cioè non aventi punti comuni, due curve normali C^m, C^{n-m} punteggiate proiettivamente: le congiun-

(5) Cogli stessi ragionamenti si dimostrano le seguenti proposizioni: *Su ogni rigata d'ordine* n *del gruppo* m *esimo esistono, per* $0 \leq k \leq m$, ∞^{n-2k+1} *direttrici d'ordine* $n - k$ *in modo che per* $(n - 2k + 1)$ *punti arbitrari della superficie ne passa una determinata: tutte queste curve si possono ottenere come residuo dell'intersezione della rigata cogli* S_n *passanti per* k *sue generatrici fissate ad arbitrio.* — *Due direttrici degli ordini* $n - k'$, $n - k''$ *della superficie si tagliano in* $n - k' - k''$ *punti.* — Queste proposizioni possono servire di fondamento per una geometria sulla superficie.

genti dei punti corrispondenti avranno per luogo, com'è facile vedere, una rigata d'ordine n [6]. E se $m \leq n - m$, sarà la C^m la (od una) curva minima di quella rigata, laonde questa sarà una F_2^n rigata, non contenuta in ispazi di meno che $n + 1$ dimensioni, e del gruppo m esimo.

In questo modo noi vediamo come si possano costruire le rigate d'ordine n dei vari gruppi dello spazio ad $n + 1$ dimensioni. Inoltre se si tien conto del fatto che le C^m (e le C^{n-m}) normali si possono tutte trasformare proiettivamente tra loro, risulta quasi immediatamente da quella costruzione che *tutte le rigate di uno stesso gruppo sono proiettivamente identiche tra loro,* vale a dire che *date in due spazi ad* n + 1 *dimensioni due rigate d'ordine* n *appartenenti allo stesso gruppo, si può* (in infiniti modi) *determinare un'omografia tra quegli spazi nella quale quelle rigate si corrispondano.*

7. Possiamo anche trovare una rappresentazione *canonica* e caratteristica di ciascun gruppo di superficie mediante equazioni. Siano $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{n+1}$ le coordinate di un punto nello spazio ad $n + 1$ dimensioni considerato; potremo evidentemente supporre che la direttrice minima γ^m di una superficie del gruppo m esimo sia rappresentata dalle equazioni:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \lambda, \quad x_2 = \lambda^2, \ \ldots, \ x_m = \lambda^m,$$
$$x_{m+1} = 0, \quad x_{m+2} = 0, \ldots, x_{n+1} = 0,$$

e che una C^{n-m} sia rappresentata da:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0, \ldots, x_m = 0,$$
$$x_{m+1} = 1, \quad x_{m+2} = \lambda, \ldots, x_{n+1} = \lambda^{n-m};$$

inoltre possiamo supporre che la corrispondenza proiettiva tra i punti delle due curve sia espressa dall'avere il parametro λ lo stesso valore per due punti corrispondenti di queste curve. Allora le coor-

[6] In fatti nello spazio ad $n + 1$ dimensioni che congiunge quell'S_m e quell'S_{n-m} per avere i punti d'intersezione di un suo S_{n-1} con quella rigata si può procedere come segue: ad un punto P della C^m corrisponde un punto della C^{n-m} il quale è congiunto all'S_{n-1} da un S_n tagliante la C^m in m punti P', e ciascuno di questi punti P' è congiunto all'S_{n-1} da un S_n tagliante la C^{n-m} in $n - m$ punti, a cui corrispondono altrettanti punti P della C^m; sicchè tra i punti P, P' di questa vi è una corrispondenza $(m, n-m)$ i cui $m + (n - m) = n$ punti uniti sono quelli pei quali partono generatrici della rigata secanti l'S_{n-1}, sicchè n saranno quelle generatrici, ossia quella rigata è realmente d'ordine n.

dinate di un punto qualunque della rigata, cioè di un punto posto su una congiungente di due punti corrispondenti, saranno:

$$x_0 = 1\,, \qquad x_1 = \lambda\,, \qquad x_2 = \lambda^2\,, \ldots, x_m = \lambda^m\,,$$

$$x_{m+1} = \mu\,, \quad x_{m+2} = \lambda\,\mu\,, \quad x_{m+3} = \lambda^2\,\mu\,, \ldots, x_{n+1} = \lambda^{n-m}\,\mu\,.$$

Tenendo fisso λ in queste formule e facendo variare μ si hanno tutti i punti di una generatrice, e variando anche λ si hanno tutti i punti della superficie. Dalle formule stesse poi si traggono le $n-1$ equazioni della superficie eliminando λ e μ: queste equazioni si possono scrivere come segue:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \ldots = \frac{x_{m-1}}{x_m} = \frac{x_{m+1}}{x_{m+2}} = \frac{x_{m+2}}{x_{m+3}} = \ldots = \frac{x_n}{x_{n+1}}\,,$$

od anche:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & . & x_{m-2} & x_{m-1} & x_{m+1} & x_{m+2} & . & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & . & x_{m-1} & x_m & x_{m+2} & x_{m+3} & . & x_{n+1} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Questo sistema di equazioni si può riguardare come caratteristico per le superficie rigate F_2^n del gruppo m esimo; esso ci mostra immediatamente ciò che avevamo già concluso dalla generazione geometrica, cioè che tutte queste superficie sono proiettivamente identiche fra loro.

IV.

Proprietà diverse.

8. Una C^n la quale sia secata da un $S_r\,(r < n)$ in più di $r+1$ punti o appartiene ad uno spazio a meno di n dimensioni oppure si scinde in curve d'ordine inferiore; poichè per quell'S_r e per altri $n-r-1$ punti della C^n posti fuori di esso si può in tal caso far passare un S_{n-1}, il quale taglia questa in più di $(r+1)+(n-r-1) = n$ punti e quindi la contiene o totalmente od in parte (7). Se ne deduce facilmente che se un $S_r\,(r < n)$ seca una rigata F_2^n dello spazio ad $n+1$ dimensioni in più di $r+1$ punti, esso la taglierà in una curva, perocchè un S_n passante per esso taglierà la superficie in una C^n avente comuni coll'S_r più di $r+1$ punti.

Consideriamo l'intersezione di un S_{n-1} colla rigata F_2^n del gruppo m esimo. In generale quest'intersezione si compone di n punti. Ma

(7) V. Veronese, Loc. cit., n. 49.

possiamo anche far passare l'S_{n-1} per k generatrici, se $2k \leqq n$. Allora a seconda che k supera o no il numero m, ordine della direttrice minima, si avranno due casi ben distinti. Se $k > m$, allora l'S_{n-1} contiene più di m punti della direttrice minima γ^m (cioè i punti di questa posti sulle k generatrici considerate) e quindi contiene questa stessa curva e per conseguenza non seca più la rigata in punti isolati, ma potrà secarla in altre generatrici. Se invece $k \leq m$, allora l'S_{n-1} non conterrà in generale γ^m: ma un S_n passante per esso conterrà oltre alle k generatrici considerate una curva d'ordine $n-k$ della rigata e questa curva taglierà quell'S_{n-1} in $n-k$ punti di cui k posti su quelle stesse generatrici ed $n-2k$ fuori di esse. Dunque per $k \leq m$ possiamo dire che ogni S_{n-1} contenente k generatrici della rigata la taglia ancora in $n-2k$ punti.

9. Di qui si può anche dedurre una proposizione più generale. Posto $r \leq n-1$ si può sempre per k generatrici ed $r-2k+1$ punti della rigata far passare un S_r: orbene se $k \leq m$ non esiste un S_r il quale contenga oltre a k generatrici della rigata più di $r-2k+1$ punti di essa posti fuori di queste (a meno che esso contenga inoltre una curva passante per questi punti). In fatti se esistesse un tale S_r si potrebbe far passare per esso e per altri $n-r-1$ punti della rigata un S_{n-1} il quale verrebbe così a contenere, oltre alle k generatrici, più di $(r-2k+1)+(n-r-1) = n-2k$ punti, il che vedemmo non poter accadere. — Se poi fosse $k > m$ si vedrebbe come per gli S_{n-1} che un S_r passante per k generatrici conterrebbe necessariamente γ^m e quindi non potrebbe più tagliare la rigata che in altre generatrici. Si può assoggettare un S_r passante per γ^m a contenere altri $r-m$ punti della rigata e quindi a tagliarla ancora nelle $r-m$ generatrici passanti per questi punti. Ed $r-m$ è anche il numero massimo delle generatrici contenute in un S_r passante per γ^m, poichè un S_r non può (n^0 2) tagliare la rigata in una curva (semplice o composta) d'ordine superiore ad r.

Dunque indicando ancora con r il numero delle dimensioni di uno spazio lineare contenente k generatrici, noi vediamo che per $k > m$ si ha $r \geq k+m$, sicchè k generatrici in tal caso stanno in un S_{k+m}. Ora k rette stanno sempre in un S_{2k-1}; quindi noi vediamo che, se $k > m+1$, k generatrici qualunque della rigata sono legate tra loro giacendo in uno stesso S_{k+m}; ma per $k = m+1$ (e per ogni valor di k minore di questo) esse sono indipendenti tra di loro.

In particolare: 2 generatrici qualunque non stanno mai in un piano e quindi non passano mai per uno stesso punto (proposizione di cui già dovemmo far uso al n^0 6); 3 generatrici stanno in un S_4 per le rigate del 1^0 gruppo (cioè per $m = 1$) ma sono tra loro indipendenti per le rigate degli altri gruppi; 4 generatrici stanno in un S_5 per le rigate del 1^0 gruppo, in un S_6 per quelle del 2^0 gruppo, e sono indipendenti tra loro per quelle degli altri gruppi; e così via.

V.

Rigate razionali in ispazi qualunque e loro diverse rappresentazioni piane.

10. Ogni F_2^n rigata dello spazio ad $n+1$ dimensioni si può proiettare univocamente da un punto su un S_n, da un S_1 su un S_{n-1}, in generale da un S_r su un S_{n-r} (essendo $r < n-2$). Se questo S_r di proiezione non ha posizione particolare rispetto alla F_2^n si ottiene per proiezione una nuova rigata razionale a 2 dimensioni d'ordine n, ma appartenente ad un S_{n-r}, ed è chiaro che viceversa ogni tal rigata dell'S_{n-r} si può considerare come proiezione di una F_2^n rigata dell'S_{n+1}. Tutte queste rigate degli S_{n-r} formano così vari gruppi, come quelle dello spazio ad $n+1$ dimensioni, a seconda dell'ordine della direttrice *semplice* minima che esse posseggono, e le loro proprietà si possono ottenere appunto mediante queste proiezioni dalle proprietà viste di quelle rigate di cui sono le proiezioni. Ad esempio dai teoremi dimostrati al n^0 5 abbiamo che su ogni rigata razionale d'ordine n in uno spazio qualunque, la quale abbia per direttrice semplice minima una curva d'ordine m, si può per $k \leq m$ far passare per $n-2k+1$ punti arbitrari della superficie una determinata curva razionale d'ordine $n-k$; se k' e k'' non superano m, due curve razionali degli ordini $n-k'$, $n-k''$ della superficie si tagliano in $n-k'-k''$ punti.

In particolare se le F_2^n rigate dello spazio ad $n+1$ dimensioni si proiettano da un S_{n-3} su un S_3, cioè sullo spazio ordinario, si avranno le rigate razionali ordinarie, di cui con questa proiezione si potranno studiare tutte le proprietà. Così una gran parte delle proposizioni viste finora per quelle F_2^n si applicheranno immediatamente alle rigate razionali ordinarie ([8]).

([8]) La distinzione che così si ottiene delle rigate razionali dello spazio or-

11. Oltre alle proiezioni così considerate delle F_2^n, le quali sono tutte univoche, possiamo considerare le proiezioni delle F_2^n da un S_{n-2} su un S_2, cioè su un piano: una tale proiezione in generale non è più univoca poichè ogni S_{n-1} proiettante taglia la F_2^n in n punti e quel piano invece in un punto solo. Tuttavia si può rendere la proiezione generalmente univoca facendo passare l'S_{n-2} di proiezione per un numero conveniente di punti e di generatrici della F_2^n, e noi otterremo in questo modo la rappresentazione univoca piana non solo della F_2^n, ma anche delle sue proiezioni dianzi considerate, vale a dire di tutte le rigate razionali d'ordine n dei vari spazi e particolarmente di quelle dello spazio ordinario.

Ricordando (n⁰ 8) che un S_{n-1} passante per k generatrici contiene $n - 2k$ punti di F_2^n, se k non supera l'ordine m della direttrice minima, cioè se $0 \leq k \leq m$, noi vediamo che il modo più generale per rendere univoca la proiezione su un piano consiste nel prendere l'S_{n-2} di proiezione in modo che passi per k generatrici g_r ed $n - 2k - 1$ punti P_i della superficie, il che si può sempre fare (*), scegliendo anzi queste generatrici e questi punti completamente ad arbitrio. Allora ogni S_{n-1} passante per l'S_{n-2} così fissato conterrà in generale ancora 1 punto della superficie, vale a dire questa verrà proiettata univocamente.

12. Un S_n proiettante, cioè passante per l'S_{n-2} di proiezione, taglierà la F_2^n nelle k generatrici g_r fisse di quell'S_{n-2} e quindi ancora in una curva normale d'ordine $n - k$ passante pegli $n-2k-1$ punti P_i; tali curve normali della F_2^n corrispondono dunque alle

---

dinario in vari gruppi a seconda dell'ordine della direttrice minima è dovuta al Clebsch (Memoria citata). Questi fa poi ancora un'altra distinzione la quale corrisponde a questa per dualità: i vari sottogruppi che così si vengono ad avere entro ciascun gruppo si potranno ottenere col nostro metodo dando all'S_{n-3} di proiezione le varie posizioni notevoli che esso può avere rispetto alla F_2^n. Osserviamo ancora che questa posizione può esser tale che una direttrice della F_2^n venga proiettata secondo una retta (basta perciò che questa curva stia in un S_{n-1} passante per quell'S_{n-3}) la quale verrà così ad essere direttrice della rigata proiezione, ma direttrice *multipla*, sicchè non bisognerà considerarla come la direttrice minima (*semplice*). Questo esempio, il quale spiega la causa della restrizione posta nel testo coll'aggettivo *semplice* per la direttrice minima, può anche servire di illustrazione all'osservazione fatta dal Clebsch (loc. cit., p. 9) che una direttrice semplice di un certo ordine può degenerare in una direttrice multipla d'ordine inferiore, senza che perciò si debba porre la rigata in un gruppo d'ordine inferiore.

(*) Tranne quando $k = m = n/2$, com'è detto al n⁰ 17 (N. d. R.).

rette del piano. Un S_n qualunque taglia la F_2^n in una C^n incontrata in $n - k$ punti da ciascuna di quelle curve. Dunque: *La rappresentazione piana che così si ottiene delle rigate razionali d'ordine* n *dei vari spazi e in particolare dello spazio ordinario è dell'ordine* n — k *e quindi se* m *è l'ordine della direttrice semplice minima di una tal rigata, la rappresentazione dell'ordine più basso che così se ne ottenga è dell'ordine* n — m.

Ricordando le proprietà viste (V. la nota al n⁰ 5) per $k \leq m$ delle C^{n-k} contenute nella F_2^n, noi vediamo che la rappresentazione piana considerata si può intendere ottenuta in quest'altro modo: per $n - 2k - 1$ punti fissi P_i della rigata passano ∞^2 C^{n-k} sì che una qualunque è individuata dandone altri due punti e due qualunque di tali curve si tagliano in un punto. Facendo dunque corrispondere univocamente quelle ∞^2 curve alle rette di un piano (il che si può fare scegliendo ad arbitrio le 4 curve corrispondenti a 4 rette date del piano, con che la corrispondenza viene determinata) si faranno anche corrispondere univocamente i punti della superficie e del piano.

13. Vediamo come si rappresentano sul piano le generatrici della F_2^n (e quindi delle sue diverse proiezioni). La C^{n-k} passante pegli $n - 2k - 1$ punti fissi P_i e per 2 punti posti su una stessa generatrice dovrà tagliare questa in quei 2 punti e quindi (n⁰ 2) si scinderà nella generatrice stessa e nella C^{n-k-1} passante per gli $n - 2k - 1$ punti P_i. Come vedemmo (n⁰ 5) se questi punti si sono presi nel modo più generale, esiste una C^{n-k-1} passante per essi e la quale non si scinde (purchè però sia k diverso da m). Tale curva sta in un S_{n-k-1} avente comuni coll'S_{n-2} di proiezione quegli $n - 2k - 1$ punti P_i e inoltre altri k punti delle k generatrici g_r e quindi $n - k - 1$ punti indipendenti tra loro; sicchè quei due spazi staranno entrambi in un S_{n-1}, vale a dire si potrà condurre pell'S_{n-2} un S_{n-1} (proiettante) il quale conterrà la C^{n-k-1}. E come tutte le generatrici della F_2^n secano questa curva, così tutti gli S_n che le proiettano passeranno per l'S_{n-1}, cioè formeranno un fascio. Dunque: *Le generatrici delle rigate considerate saranno rappresentate sul piano dalle rette di un fascio il cui centro* ζ *corrisponde a tutti i punti di una curva razionale d'ordine* n — k — 1 *di quelle rigate.* Questa curva insieme colle varie generatrici forma il sistema delle curve razionali d'ordine $n - k$ che corrispondono alle rette del fascio ζ.

14. Diremo per brevità *sezioni piane* di una superficie in uno spazio lineare ad un numero qualunque d di dimensioni quelle fatte in essa con degli spazi lineari a $d-1$ dimensioni contenuti in questo: allora nel proiettare la F_2^n da un S_r su un S_{n-r} si ottiene in questo una nuova rigata, le cui sezioni piane sono le proiezioni di un sistema lineare ad $n-r$ dimensioni di sezioni piane della F_2^n. Osservando che ogni sezione piana della F_2^n incontra ciascuna generatrice in un punto solo e taglia la C^{n-k-1} considerata in $n-k-1$ punti, pei quali passano altrettante generatrici (le quali non secano altrove la sezione stessa) avremo: *Le curve d'ordine* n — k *rappresentanti nel piano le sezioni piane delle rigate considerate hanno tutte un punto* (n — k — 1) *uplo in* ζ *(in generale con* n — k — 1 *tangenti distinte mobili). Se la rigata d'ordine* n *che si considera è nello spazio ad* n — r *dimensioni, quelle curve del piano le quali corrispondono alle sue sezioni piane sono inoltre soggette alla condizione di formare un sistema lineare ad* n — r *dimensioni.*

15. Oltre al punto ζ, che così si vede essere un punto fondamentale $(n-k-1)$ uplo nella rappresentazione piana considerata, vi sono in generale anche dei punti fondamentali semplici. Notiamo in fatti che per gli $n-2k-1$ punti fissi P_i della F_2^n posti sull' S_{n-2} di proiezione passano altrettante generatrici, le quali saranno evidentemente proiettate da quell' S_{n-2} mediante degli S_{n-1}, cioè in altrettanti punti p_i del piano, in guisa che a tutti i punti di una tal generatrice corrisponde nel piano uno stesso punto p_i, eccetto che al punto P_i della generatrice stessa al quale corrisponde sul piano un punto indeterminato della retta che è proiezione dell' S_2 tangente nel punto stesso P_i alla F_2^n: e siccome questo punto sta sulla C^{n-k-1} a cui corrisponde ζ, così gli corrisponderanno tutti i punti della retta ζp_i. Ora le sezioni piane della F_2^n tagliano le $n-2k-1$ generatrici considerate. Dunque le loro imagini passano per gli $n-2k-1$ punti p_i, sicchè *sul piano rappresentativo vi è un punto fondamentale* (n — k — 1) *uplo ed* n — 2k — 1 *punti fondamentali semplici.* Inoltre se la rigata razionale si considera in uno spazio ad $n-r$ dimensioni, le curve imagini delle sezioni piane sono ancora soggette, come già osservammo, ad altre condizioni lineari in modo da formare solo più un sistema ad $n-r$ dimensioni (9).

---

(9) In questo modo si hanno per ogni rigata razionale d'ordine n e la cui direttrice minima sia d'ordine m rappresentazioni piane degli ordini $n, n-1, \ldots, n-m$, le quali coincidono perfettamente per le rigate razionali dello spazio ordinario

È poi chiaro che in questa rappresentazione piana non vi sono altri punti fondamentali, sicchè solo gli $n-2k-1$ punti fissi P_i della rigata dànno luogo a punti fondamentali del piano in quanto che alla C^{n-k-1} passante per essi corrisponde il punto $(n-k-1)$ uplo ζ ed alle $n-2k-1$ generatrici passanti risp. per essi corrispondono i punti semplici p_i. Le k generatrici g_r della rigata giacenti nell' S_{n-2} di proiezione non producono singolarità nella rappresentazione piana, poichè le loro generatrici infinitamente vicine hanno proiezioni ben definite, sicchè ad esse corrispondono k rette ben definite passanti per ζ. Ciò concorda con quanto dicemmo alla fine del n⁰ 12 sulla possibilità di concepire questa rappresentazione piana all'infuori della proiezione come una corrispondenza tra le rette del piano e le C^{n-k} della F_2^n passanti pegli $n-2k-1$ punti P_i: così facendo non compaiono più quelle k generatrici g_r.

Al n⁰ 7 abbiamo incontrato una rappresentazione dei punti della rigata F_2^n mediante parametri, la quale si può considerare come caso particolare delle rappresentazioni piane ora ottenute geometricamente. Basta in fatti porre $\lambda = \eta/\xi$, $\mu = \zeta/\xi$ e allora le formule ivi incontrate ci dànno la rappresentazione dei punti della rigata nei punti (ξ, η, ζ) del piano: si vede così che questa rappresentazione è dell'ordine $n-m+1$ con un punto fondamentale $(n-m)$ uplo in $\xi = 0$, $\eta = 0$ e con $n-2m+1$ punti fondamentali semplici posti sulla retta $\zeta = 0$ ed infinitamente vicini al punto d'intersezione di questa retta colla $\xi = 0$. Questa rappresentazione è dunque un caso particolare di quella tra le nostre rappresentazioni che corrisponde all'assumere $k = m-1$.

---

con quelle che il CLEBSCH nella Memoria citata deduceva successivamente l'una dall'altra mediante una serie di trasformazioni quadratiche del piano rappresentativo. Però quell'illustre scienziato cominciava col dare una rappresentazione piana d'ordine $n+1$ di quelle rigate: ora anche questa rappresentazione si può ottenere mediante la proiezione considerando la rigata razionale d'ordine n (dello spazio ordinario) come la proiezione su un tale spazio della rigata d'ordine $n+1$ dello spazio ad $n+2$ dimensioni fatta con uno spazio di proiezione (ad $n-2$ dimensioni) passante per un punto di questa rigata. Allora è chiaro che da questo punto e dalla generatrice passante per esso nascerà nella rappresentazione piana d'ordine $n+1$ della rigata d'ordine n un nuovo punto fondamentale semplice diverso dagli n che già si avevano. Anche la rappresentazione così ottenuta coincide dunque con quella data dal CLEBSCH. Essa fu pure accennata dal VERONESE (loc. cit., n. 55).

VI.

Rappresentazioni piane d'ordine minimo.

16. Occupiamoci ora più specialmente della rappresentazione piana d'ordine minimo delle nostre rigate, rappresentazione che si ottiene, come notammo, prendendo $k=m$ ordine della direttrice minima (salvo quando, n essendo pari, si ha $m=n/2$, caso che considereremo tra poco), e che è quindi d'ordine $n-m$. In tal caso vi è qualche modificazione da fare alle cose esposte, poichè la curva C^{n-k-1} d'ordine $n-k-1$ determinata dagli $n-2k-1$ punti P_i della F_2^n si decomporrà per $k=m$ nelle $n-2m-1$ generatrici passanti per gli $n-2m-1$ punti P_i e nella direttrice minima γ^m d'ordine m. Questa curva starà in un S_{n-1} coll' S_{n-2} di proiezione, poichè lo taglia in m punti (sulle m generatrici g_r contenute in quell' S_{n-2}), e in quell' S_{n-1} staranno pure quelle altre $n-2m-1$ generatrici, poichè esse tagliano sia l' S_{n-2} sia γ^m. Quindi sarà ancor vero che le generatrici della rigata saranno proiettate nelle rette del piano passanti per un punto ζ, ma questo sarà ora l'imagine della direttrice minima γ^m e nello stesso tempo di quelle $n-2m-1$ generatrici. Però al punto P_i di una di queste posto sull' S_{n-2} di proiezione corrisponde sul piano un punto indeterminato su una retta passante per ζ. — La sezione della F_2^n fatta con un S_n qualunque taglia γ^m in m punti pei quali passano generatrici mobili e taglia pure le $n-2m-1$ generatrici fisse. Dunque: *Le imagini delle sezioni piane delle rigate sono curve d'ordine* n — m *aventi in* ζ *un punto* (n — m — 1) *uplo in cui solo* m *tangenti sono mobili, mentre le altre* n — 2m — 1 *sono fisse e sono le rette che corrispondono ai punti* P_i *delle* n — 2m — 1 *generatrici considerate* [10]. — I punti p_i del piano i quali nelle rappresentazioni prima considerate corrispondevano alle generatrici passanti pei punti P_i vengono ad essere in questa rappresentazione minima infinitamente vicini al punto fondamentale ζ su direzioni determinate.

---

(10) Per lo spazio ordinario questa rappresentazione d'ordine minimo delle rigate razionali è appunto quella che fu studiata più accuratamente dal CLEBSCH e che lo condusse alla distinzione di quelle rigate in gruppi. È bello il vedere come i risultati da esso ottenuti con precedimento analitico vengano illuminati dal metodo da noi tenuto della proiezione: veggasi per esempio l'interpretazione dei punti fondamentali data dal CLEBSCH nel § 4 del suo lavoro (dove per confrontare coi nostri risultati basterà porre $m=\alpha-1$).

17. Abbiamo escluso il caso in cui, n essendo pari, si ha $m=n/2$, e quindi, come vedemmo (n^0 5), vi sono sulla superficie ∞^1 curve d'ordine $n/2$ e niuna curva d'ordine inferiore. In tal caso si vede che le varie proiezioni della F_2^n su un piano si possono ancora fare *purchè* però k si prenda minore di m, cioè di $n/2$. Quindi il massimo valor di k, cioè quello per cui la rappresentazione piana è d'ordine minimo, si ottiene prendendo, non più come negli altri casi $k=m$, ma bensì $k=m-1$, cioè $k=(n-2)/2$. Allora applicando le cose viste ai n^i 14 e 15 per k qualunque noi vediamo che alle sezioni piane della superficie corrispondono curve piane d'ordine $(n+2)/2$ aventi in ζ un punto $n/2$ uplo fisso (senza tangenti fisse) ed aventi inoltre un punto semplice fisso diverso da ζ. In questo caso l'S_{n-2} di proiezione contiene $(n-2)/2$ generatrici della rigata ed un punto P di questa fuori di esse: per questo punto passa una generatrice proiettata da quell' S_{n-2} mediante un S_{n-1} in quel punto fondamentale semplice p; questo S_{n-1} contenendo $n/2$ generatrici è sostegno di un fascio di S_n i quali tagliano la F_2^n oltre che in quelle generatrici nelle ∞^1 curve d'ordine $n/2$ che essa contiene. Dunque queste curve sono rappresentate sul piano dalle rette passanti pel punto fondamentale semplice p. Ma quella tra queste curve la quale passa pel punto P della F_2^n starà in un S_{n-1} proiettante ed avrà per imagine il punto fondamentale $n/2$ uplo ζ (11).

Torino, 31 Gennaio 1884.

---

(11) Anche per questo gruppo eccezionale di rigate razionali d'ordine pari i risultati da noi ottenuti qui e al n^0 5 coincidono per lo spazio ordinario con quelli trovati dal Clebsch (loc. cit., p. 9 e 11).