Corrado Segre

Intorno alla geometria su una rigata algebrica

Rend. R. Acc. Naz. Lincei, Vol. **3** (1887), p. 3–6

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. 110–113

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_1_110>

VIII.

INTORNO ALLA GEOMETRIA SU UNA RIGATA ALGEBRICA (*)

« Atti della Reale Accademia dei Lincei », Rendiconti,
serie quarta, vol. III, 1887 - 2º Semestre, pp. 3-6.

1. Su una rigata d'ordine n e genere p abbiasi una curva γ d'ordine ν e genere π multipla secondo h e la quale incontri in k punti ogni generatrice. Il numero y delle generatrici tangenti a γ e quello η dei punti di γ per ciascuno dei quali escono due generatrici coincidenti, saranno dati dalle formole seguenti:

$$y = 2\nu h (k - 1) - k (k - 1) n \tag{1}$$

$$\eta - y = 2k (p - 1) - 2h (\pi - 1) . \tag{2}$$

La prima di queste formole si ottiene applicando il principio di corrispondenza ad un fascio di piani nel quale si considerino come corrispondenti due piani che vadano a due punti di γ posti su una stessa generatrice. La (2) risulta da una nota formola del sig. ZEUTHEN (1) applicata alla rigata ed alla curva, forme algebriche risp. dei generi p e π tra le quali esiste una corrispondenza (h, k), considerando come corrispondenti due loro elementi i quali si appartengano, corrispondenza tale che nelle due forme vi sono risp. y ed η coincidenze.

Se la curva γ ha dei punti doppi ed in particolare delle cuspidi, la dimostrazione data mostra immediatamente quali modificazioni occorrano nelle formole (1) e (2). Si vede pure che esse valgono qualunque sia lo spazio a cui appartiene la rigata. In partico-

---

(*) Presentata dal Corrispondente D'OVIDIO.

(1) Math. Ann., III, p. 152.

lare esse valgono anche se quello spazio è a due dimensioni, e si riferiscono allora a due curve di un piano, l'una di classe n e genere p, l'altra d'ordine ν e genere π.

2. Se γ è una curva semplice della rigata, vale a dire se $h = 1$, è chiaro che dovrà essere $\eta = 0$. Quindi sostituendo nelle formole (1) e (2) ed eliminandone y si avrà una relazione, che si può scrivere nel seguente modo:

$$\pi = (k-1)\nu + k(p-1) - \frac{k(k-1)}{2} n + 1 . \tag{3}$$

Questa formola, che pare non sia ancora stata data altrove, è di grande importanza per la geometria delle curve (semplici) tracciate su una rigata data; essa stabilisce per quelle curve, che incontrano ogni generatrice in un dato numero di punti, una relazione fra l'ordine ed il genere.

La dimostrazione data della (3) prova che essa vale pure se la rigata è un cono, purchè per k s'intenda allora il numero dei punti d'intersezione *variabili* di γ con le generatrici (sicchè il vertice del cono sia per γ multiplo secondo $\nu - nk$). La (3) dà allora una relazione dovuta al sig. STURM [2].

3. Ponendo nella (3) $k = 2$ essa diventa:

$$\nu - \pi = n - 2p + 1 . \tag{4}$$

Data su una curva γ d'ordine ν e genere π una *involuzione di 2° grado* (o [corrispondenza univoca] involutoria) *del genere* p, cioè una serie semplicemente infinita e del genere p di coppie di punti, l'ordine n della rigata generata dalle rette congiungenti le varie coppie di punti è legato a p da questa relazione (4) [3].

La stessa proposizione può anche enunciarsi nei seguenti termini: Sia data una forma algebrica (semplicemente infinita) di genere π con un'involuzione (di 2° grado) del genere p; se in una serie lineare semplicemente infinita di gruppi di ν elementi vi sono

(2) *Ueber das Geschlecht von Curven auf Kegeln,* Math. Ann., XIX, p. 487. Fu dalla lettura di questa Nota che mi venne l'idea di estendere la formola (3) a rigate algebriche qualunque.

(3) V. per le forme algebriche che ammettono trasformazioni univoche in sè stesse ed in particolare per quelle che ammettono delle involuzioni, l'importante lavoro del sig. HURWITZ nelle Götting. Nachrichten (Sitz. 5 Februar, 1887), nel quale si troveranno anche altre citazioni.

n gruppi contenenti coppie dell'involuzione, sarà: $\nu - n = \pi - 2p + 1$. (Ambi i membri, raddoppiati, esprimono il numero dei punti doppi dell'involuzione).

4. Abbiasi una rigata di genere p e d'ordine $n > 2p + 1$ in uno spazio inferiore ad S_{n-2p+1}. È facile determinare su essa una curva semplice γ che ne incontri in due punti ogni generatrice ed a cui si possa applicare la relazione (4): tale sarà ad es. l'intersezione della rigata con una quadrica, che non le sia tangente. Dicendo ν l'ordine e π il genere di γ avrà luogo la (4). Ora la curva γ si può considerare (4) come la proiezione di un'altra curva Γ dello stesso ordine e genere appartenente ad $S_{\nu-\pi}$ o ad uno spazio superiore, e la involuzione di genere p determinata su γ dalle generatrici della data rigata sarà la proiezione di una involuzione del genere p appartenente a Γ; le rette contenenti le coppie di quest'ultima involuzione formeranno (n. 3) una rigata dell'ordine n, che avrà per proiezione la data rigata e che apparterrà allo stesso spazio cui appartiene Γ. Concludiamo dunque: *Ogni rigata algebrica di genere* p *ed ordine* $\mathrm{n} > 2\mathrm{p} + 1$ *appartiene ad uno spazio di più che* $\mathrm{n} - 2\mathrm{p}$ *dimensioni, oppure è proiezione di una rigata dello stesso genere ed ordine appartenente ad un tale spazio.*

Questa proposizione, che fu già da me enunciata (con minor generalità) in un'altra Nota (5), riesce di grande utilità nello studio delle rigate, e specialmente, come allora osservai, nello studio delle curve tracciate su una rigata. Ma per tali applicazioni rimanderò ad un lavoro più diffuso che verrà presto pubblicato.

5. Riguardo alla geometria su una rigata accennerò ancora due proposizioni, assai facili a dimostrare, ma che quantunque molto importanti non so che siano state sinora rilevate.

Il numero delle intersezioni di due curve degli ordini ν, ν' tracciate (semplici) su una rigata d'ordine n e incontranti ogni generatrice di questa risp. in k, k' punti è: $k\nu' + k'\nu - nkk'$. Mediante la formola (3) questa espressione, quando k e k' siano > 1, diventa, chiamando p il genere della rigata e π, π' quelli delle due curve:

$$k + k' + \frac{k'}{k-1}\pi + \frac{k}{k'-1}\pi' - kk'\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k'-1}\right)p .$$

(4) V. VERONESE, *Behandlung* u. s. w., Math. Ann., XIX, p. 214.

(5) V. Atti Acc. Torino, XXII, febbraio 1887.

Quest'ultima formola avrà particolare importanza nello studio di quelle proprietà della rigata che si conservano per trasformazioni univoche le quali mutino le generatrici in generatrici.

Due rigate algebriche tra le cui generatrici si possa stabilire una corrispondenza univoca, si possono far corrispondere univocamente (punto a punto) in infiniti modi sì che tra le loro generatrici abbia luogo la corrispondenza supposta. In particolare una rigata qualunque d'ordine n e genere p ammette infinite trasformazioni univoche in sè stessa, tali che ogni generatrice si trasformi in sè stessa. I punti doppi di una tale trasformazione costituiscono un certo numero $g \geq 0$ di generatrici ed una curva γ d'ordine ν incontrante due volte ogni generatrice (potendo però γ ridursi ad una curva d'ordine $\nu/2$ incontrante una volta sola ogni generatrice, ma contata in tal caso doppiamente). Ad una sezione piana d'ordine n della rigata corrisponde allora una curva d'ordine $n' = g + \nu$, e le infinite curve che così si ottengono hanno $2(n' - n)$ punti d'intersezione fissi; questi punti *fondamentali* della trasformazione stanno su γ, e quelli analoghi della trasformazione inversa sono gli altri punti di γ situati sulle generatrici che passano per quelli. Date sulla rigata la curva doppia γ e la curva corrispondente ad una data sezione piana, la trasformazione univoca resta pienamente determinata, poichè della proiettività binaria che essa determina su una generatrice qualunque saranno noti i punti doppi e due punti corrispondenti.