Corrado Segre

Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi

Rend. della R. Acc. Naz. Lincei, Vol. **4** (1887), p. 149–153

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. 114–118

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_1_114>

IX.

SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE COMPOSTE DI UNA SERIE SEMPLICEMENTE INFINITA DI SPAZI (*)

« Atti della Reale Accademia dei Lincei », Rendiconti, serie quarta, vol. III, 1887 - 2º semestre, pp. 149-153.

---

1. In uno spazio a d dimensioni S_d abbiasi una varietà V ad $r+1\,(<d)$ dimensioni composta di una serie algebrica ∞^1 del genere p di spazi S_r, e sia n il suo ordine, cioè il numero dei suoi S_r incontranti un S_{d-r-1} qualunque. Supponiamo poi che sulla varietà V sia segnata una curva semplice γ d'ordine ν e genere π, la quale incontri ogni S_r generatore in $k\,(>r)$ punti; *per semplicità* faremo inoltre l'ipotesi che γ non abbia punti doppi (incl. le cuspidi) i quali non siano nello stesso tempo doppi per V, e che non vi siano spazi generatori di V in cui $r+1$ fra i k punti di γ stiano in spazi S_{r-2}, ma solo un certo numero $z\,(\geq 0)$ in ciascuno dei quali certi $r+1$ punti di γ appartengono ad un S_{r-1}. Ciò posto, fra i vari numeri così definiti relativi a V e γ ha luogo una relazione importante, che si ottiene paragonando tra loro due diverse espressioni del numero y degli spazi generatori di V tangenti a γ. Una di queste espressioni è fornita dalla formola del sig. ZEUTHEN (Math. Ann., III, p. 152), la quale, applicata alla corrispondenza $(1, k)$ fra gli S_r di V ed i punti di γ situati su essi, dà:

$$y = 2(\pi - 1) - 2k(p-1). \tag{1}$$

(*) Presentata dal Corrispondente D'OVIDIO.

L'altra, che debbo al sig. H. SCHUBERT (¹), è:

$$(2) \qquad y = 2\nu\,\frac{k-1}{r} - 2n\,\frac{k(k-1)}{r(r+1)} - 2z \Big/ \binom{k-2}{r-1}.$$

Eliminando y si ha la relazione cercata:

$$(3) \qquad \nu\,\frac{k-1}{r} - \pi = n\,\frac{k(k-1)}{r(r+1)} - kp + (k-1) + z \Big/ \binom{k-2}{r-1}.$$

Un caso particolare di essa ($r = 1$) si trova già in una Nota precedente, *Intorno alla geometria su una rigata algebrica* ([questi] Rendiconti, fasc. 1°, luglio 1887 [p. 110 di questo volume]).

2. Ponendo nella (3) $k = r + 1$ ed inoltre supponendo per semplicità $z = 0$ si ha in particolare:

$$(4) \qquad \nu - \pi = n - (r+1)\,p + r.$$

Dunque: data su una curva d'ordine ν e genere π appartenente ad uno spazio qualunque di dimensione $> r$ un'*involuzione di grado* $r+1$ *e del genere* p (vale a dire una serie semplicemente infinita e del genere p di gruppi di $r+1$ punti, tale che ogni punto appartenga ad un sol gruppo), l'ordine n della varietà luogo degli S_r congiungenti i vari gruppi di punti dell'involuzione è dato dalla formola (4).

Od anche: se in una forma algebrica semplicemente infinita di genere π esiste un'involuzione di grado $r+1$ e del genere p tale che in una serie *lineare* ∞^r di gruppi di ν elementi della forma vi siano n gruppi contenenti gruppi di quell'involuzione, avrà luogo la (4).

(¹) Questo chia.mo scienziato me ne dava per lettera la dimostrazione che qui riproduco con leggere modificazioni.

Abbiasi in S_d un sistema ∞^1 di forme, di cui ognuna si componga di k punti posti in uno stesso S_r ($k > r$); e s'imagini in ciascuna congiunti i k punti a 2 a 2 con rette, a 3 a 3 con piani,... in genere ad $i+1$ ad $i+1$ ($i < r$) con S_i. Indichiamo con x_0 il numero di quei gruppi del sistema che hanno uno dei k punti su un dato S_{d-1}, con x_1 il numero di quelli di cui una delle rette congiungenti incontra un dato S_{d-2}, ... in genere con x_i il numero di quelli nei quali vi è un S_i congiungente che incontra in un punto un S_{d-i-1} arbitrario; indichiamo infine con x il numero di quei gruppi del sistema il cui sostegno S_r incontra in un punto un dato S_{d-r-1}. Per ottenere r equazioni fra $x_0, x_1, \ldots x_{r-1}, x$ applichiamo il principio di corrispondenza di CHASLES ad un fascio di S_{d-1} considerando come corrispondenti due di questi spazi quando contengono due punti di uno stesso gruppo, e poi (successivamente per $i = 1, \ldots, r-1$) alla forma fondamentale costituita dagli ∞^1 S_{d-i-1} che in uno stesso S_{d-i} passano per un S_{d-i-2}

Si modificano facilmente questi enunciati se $z > 0$; bisogna in tal caso aggiungere il termine z al 2° membro della (4).

3. Abbiasi ora una varietà qualunque V ad $r+1$ dimensioni d'ordine n composta di una ∞^1 del genere p di S_r, e sia S_d lo spazio a cui essa appartiene. Si determini su essa una curva γ soddisfacente alle condizioni dei n[i] prec. Ciò è possibile in infiniti modi: tale sarà ad es. la curva d'intersezione di V con un S_{d-r-2} — cono (cono *di specie* $d-r-1$) a $d-r$ dimensioni d'ordine $r+1$ appartenente ad S_d, quando l'S_{d-r-2} che ne è sostegno non incontri V; perocchè questa curva sarà evidentemente incontrata da ogni S_r di V in $r+1$ punti i quali saranno sempre indipendenti, cioè non situati in un S_{r-1}, essendo essi le intersezioni dell'S_r con la curva razionale normale d'ordine $r+1$ secondo cui il cono considerato è tagliato da un S_{r+1} condotto ad arbitrio per l'S_r. Chiamando ν e π l'ordine ed il genere della curva γ avrà dunque luogo la relazione (4). D'altronde è noto che γ si può considerare come proiezione di un'altra curva γ' d'ordine ν e genere π appartenente ad un certo spazio di dimensione $\geq \nu - \pi$, quando S_d non sia precisamente questo spazio, e che se $d < \nu - \pi$ si può sempre considerare γ come proiezione di una curva γ' d'ordine ν e genere π appartenente ad

---

fisso, considerando come corrispondenti due S_{d-i-1} che incontrino due degli S_i costrutti appartenenti allo stesso gruppo ed uscenti da uno stesso S_{i-1}. Si ha così:

$$\begin{aligned}
2.1.(k-1).x_0 &= 1.2.x_1 + \alpha_1\\
2.2.(k-2).x_1 &= (k-1)(k-2).x_0 + 2.3.x_2 + \alpha_2\\
2.3.(k-3).x_2 &= (k-2)(k-3).x_1 + 3.4.x_3 + \alpha_3\\
2.4.(k-4).x_3 &= (k-3)(k-4).x_2 + 4.5.x_4 + \alpha_4\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
2.(r-1).(k-r+1).x_{r-2} &= (k-r+2)(k-r+1).x_{r-3} + (r-1).r\,x_{r-1} + \alpha_{r-1}\\
2.r.(k-r).x_{r-1} &= (k-r+1)(k-r).x_{r-2} + r(r+1)\binom{k}{r+1}.x + \alpha_r
\end{aligned}$$

dove con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ s'indicano le somme di certi multipli dei numeri delle degenerazioni esistenti nel nostro sistema di gruppi di punti. Ed eliminando da queste r equazioni $x_1, x_2, \ldots x_{r-1}$ si ha:

$$\binom{k}{r+1}.x = \binom{k-1}{r}.x_0 - \frac{1}{(r+1)!}[r.(k-2)\ldots(k-r).\alpha_1 +$$
$$+ (r-1).1!(k-3)\ldots(k-r).\alpha_2 + (r-2).2!(k-4)\ldots(k-r).\alpha_3 + \ldots + 1.(r-1)!\alpha_r].$$

Questa relazione è affatto generale. Ma se supponiamo che nel sistema non vi siano altri gruppi degenerati all'infuori di y gruppi nei quali due (soli) dei k punti coincidono e di z gruppi nei quali $r+1$ (soli) dei k punti appartengono

$S_{\nu-\pi}$. In ambi i casi l'involuzione di grado $r+1$ e genere p che su γ è determinata dagli S_r generatori di V sarà proiezione di una simile involuzione di γ', la quale sarà anch'essa tale che ognuno dei suoi gruppi di $r+1$ punti apparterrà ad un determinato S_r: il luogo di questi S_r sarà una varietà V' di genere p e d'ordine n ad $r+1$ dimensioni appartenente allo spazio di γ' ed avente V per proiezione. Dunque:

Ogni varietà algebrica ad $\mathrm{r}+1$ *dimensioni composta di una* ∞^1 *di* S_r *del genere* p *e d'ordine* $\mathrm{n} > (\mathrm{r}+1)\,\mathrm{p}$ *si può sempre ottenere come proiezione di una varietà simile (cioè avente gli stessi caratteri) appartenente ad uno spazio di dimensione* $\mathrm{n}-(\mathrm{r}+1)\,\mathrm{p}+\mathrm{r}$, *quando essa stessa appartenga ad uno spazio inferiore a questo. Ma una tale varietà può anche in certi casi appartenere ad uno spazio di dimensione* $> \mathrm{n}-(\mathrm{r}+1)\,\mathrm{p}+\mathrm{r}$, *od essere proiezione di una simile varietà appartenente ad un tale spazio* (²).

Questo teorema si potrà riguardare come *fondamentale* in varie ricerche relative alla geometria su di una varietà della specie considerata. Le applicazioni già fatte del suo caso particolare $r=1$ alle rigate algebriche si possono estendere servendosi del teorema generale a varietà con r qualunque.

---

ad un S_{r-1}, sarà, come si scorge facilmente:

$$\alpha_1 = y\,,\ \alpha_2 = (k-2)\,y\,,\ \alpha_3 = \binom{k-2}{2} y\,,\ \alpha_4 = \binom{k-2}{3} y\,,$$

$$\ldots\ \alpha_{r-1} = \binom{k-2}{r-2} y\,,\ \alpha_r = \binom{k-2}{r-1} y + r\,(r+1)\,z\,;$$

sicchè sostituendo la relazione diverrà:

$$\binom{k}{r+1}.x = \binom{k-1}{r}.x_0 - \frac{1}{2}\binom{k-2}{r-1}.y - z\,,$$

ossia:

$$y = 2x_0\,\frac{k-1}{r} - 2x\,\frac{k\,(k-1)}{r\,(r+1)} - 2z \Big/ \binom{k-2}{r-1}.$$

Ponendo qui $x_0 = \nu$, $x = n$ si ha appunto la formola sopra usata.

(²) Dicendo che una varietà qualunque è *normale* per lo spazio cui essa appartiene, quando essa non può ottenersi come proiezione di una varietà dello stesso ordine appartenente ad uno spazio superiore (locuzione che pare conveniente introdurre), si può enunciare più brevemente questa proposizione così: *Le varietà composte di* ∞^1 S_r *di genere* p *e d'ordine* n *sono normali per spazi di dimensione* $\geq \mathrm{n}-(\mathrm{r}+1)\,\mathrm{p}+\mathrm{r}$.

4. È noto che una curva di genere p e d'ordine $n > 2p - 2$ non può appartenere ad uno spazio di dimensione $> n - p$; e da ciò segue subito più in generale che una $S_r - V_{r+1}^n$ (cioè una varietà d'ordine n, luogo di $\infty^1 S_r$) del genere p non può, se $n > 2p - 2$, appartenere ad uno spazio di dimensione $> n - p + r$. Invece esistono tali varietà appartenenti a qualunque spazio dato di dimensione $\leq n - p + r$; ma se quella dimensione supera $n - (r + 1)p + r$ le varietà presentano, per n abbastanza grande rispetto a p, delle particolarità notevoli che saranno studiate altrove. Qui mi limiterò al caso più semplice, cioè a quello delle varietà di genere $p > 0$ appartenenti a spazi di dimensione $> n - p$. Dico cioè che tali varietà, per n abbastanza grande, sono tutte coni. Più precisamente: *Una* $\mathrm{S}_r - \mathrm{V}_{r+1}^n$ *di genere* $\mathrm{p} > 0$ *appartenente ad un* S_{n-p+i} $(0 < \mathrm{i} \leq \mathrm{r})$, *se* $\mathrm{n} \geq 2\mathrm{p} + \mathrm{r} - \mathrm{i}$, *è sempre un cono di specie* i (comprendendo fra i coni di una specie quelli di specie superiore come casi particolari).

Se $i > 1$, la dimostrazione di questo teorema si riduce subito a quella del caso $i = 1$ segando la data varietà con un S_{n-p+1} e considerando la varietà sezione. Vi è dunque da dimostrare il solo caso di $i = 1$, cioè che una $S_r - V_{r+1}^n$ di genere $p > 0$ ed ordine $n \geq 2p + r - 1$ appartenente ad un S_{n-p+1} è sempre un cono (in generale di 1ª specie). Ora supposto che questo sia vero per una $S_{r-1} - V_r^{n-1}$ appartenente ad un S_{n-p} (vale a dire quando r ed n vengono diminuiti di un'unità), sarà pur vero per la $S_r - V_{r+1}^n$ appartenente ad S_{n-p+1}, giacchè segando questa varietà con un S_{n-p} (di questo spazio) passante per un suo S_r generatore si otterrà come intersezione residua una $S_{r-1} - V_r^{n-1}$, irriducibile in generale, ed appartenente all'S_{n-p} (chè altrimenti sarebbe $p = 0$), alla quale si potrà applicare l'ipotesi fatta. Ma la proposizione è vera per $r = 1$, cioè per le rigate, come già dimostrai altrove seguendo lo stesso concetto ora usato (*); dunque essa resta compiutamente stabilita.

(*) V. il n. 2 a p. 58 di questo volume (N. d. R.).