

CORRADO SEGRE

CORRADO SEGRE

Sulle curve normali di genere p dei vari spazi (Estratto di lettera al Prof. E. Bertini)

Rend. R. Ist. Lombardo Scienze Lett., Vol. **21** (1888), p. 523–528

in: Corrado Segre, *Opere*, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. 119–124

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_1_119>

X.

SULLE CURVE NORMALI DI GENERE p
DEI VARI SPAZI

Estratto di lettera al Prof. E. BERTINI.
«Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere», Rendiconti,
serie II, vol. XXI, 1888, pp. 523-528.

Ella ricorderà che nell'estate dell'anno scorso, discorrendo insieme intorno ad una teoria sintetica delle curve degli spazi superiori, osservavamo che per giungere ad essa converrebbe anzitutto stabilire il teorema fondamentale di CLIFFORD per una via più sintetica di quelle già note. Pochi mesi dopo mi riuscì di risolvere quella questione, grazie alla seguente formola (a mio avviso molto generale e feconda, e sulla quale mi permetto perciò richiamare l'attenzione di Lei), che io diedi nella Nota: *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi* (Rend. Acc. Lincei, Ottobre 1887 [p. 114 di questo volume]).

Abbiasi in uno spazio qualunque una varietà ad r dimensioni d'ordine N , luogo di una ∞^1 di genere P di spazi S_{r-1} ; sia segnata su essa una curva semplice d'ordine n e genere p , la quale ne incontri ogni S_{r-1} generatore in k ($\geq r$) punti e s'indichi con z (≥ 0) il numero di quegli S_{r-1} in cui r fra i k punti della curva appartengono ad un S_{r-2} . Sarà in generale:

$$(1) \quad \frac{k(k-1)}{r(r-1)} N - kP = \frac{k-1}{r-1} n - p - k + 1 - z \binom{k-2}{r-2}.$$

Questa formola comprende come caso particolarissimo la proposizione seguente: data su una curva d'ordine n e genere p un'involuzione razionale di grado r (cioè una serie razionale semplicemente infinita di gruppi di r punti, tale che ogni punto appartenga ad un sol gruppo) tale che gli r punti di un suo gruppo siano in generale indipendenti, la varietà ad r dimensioni che è luogo degli S_{r-1} con-

giungenti i vari gruppi di punti dell'involuzione sarà d'ordine $n - p - r + 1$ (ed anche minore, in casi particolari). Ne segue che, se quella curva appartiene ad uno spazio di più che r dimensioni, sarà: $r < n - p$.

Ciò premesso, osservo che il teorema di CLIFFORD (Phil. Trans., 1878, p. 681) si può enunciare così: una curva di genere p e d'ordine $n > 2p - 2$ non può appartenere ad uno spazio di più che $n - p$ dimensioni. Per dimostrarlo è chiaro che basta provare che quella curva non può appartenere ad un S_{n-p+1} (chè, ove appartenesse ad uno spazio superiore, basterebbe proiettarla su quello); e siccome, in caso contrario, proiettandola su un S_p (1) da $n - 2p + 1$ suoi punti, si otterrebbe (se non era già $n = 2p - 1$) una curva di genere p e d'ordine $2p - 1$, così basta dimostrare che non può una siffatta curva appartenere ad un S_p . Per $p < 3$ ciò è evidente. Per $p = 3$, supposto che esistesse una curva di 5^o ordine e genere 3 appartenente ad S_3 , le quadriche passanti per otto suoi punti fissi vi determinerebbero un'involuzione di 2^o grado razionale (giacchè nessuna di esse potrebbe contener la curva), il che non può accadere, in causa della proposizione enunciata. Infine, supposto $p > 3$, ed ammesso che una curva di genere p e d'ordine $2p - 1$ appartenga ad un S_p , proiettandola su un piano da $p - 2$ suoi punti si avrebbe una curva piana di genere p e d'ordine $p + 1$, dotata in conseguenza di $p(p - 3)/2 > 0$ punti doppi; quindi per $p - 2$ punti qualunque della prima curva si potrebbe condurre un S_{p-2} che la incontri in p punti. Ma allora il fascio degli S_{p-1} passanti per quell' S_{p-2} determinerebbe un'involuzione razionale di grado $p - 1$ sulla curva d'ordine $2p - 1$; il che, per la proposizione ricordata, è assurdo (2).

(1) Da questo ragionamento sarebbero dunque esclusi i casi di $p = 0$ e $p = 1$; ma si vede subito direttamente in un modo notissimo che una curva irriduttibile d'ordine n non può appartenere ad un S_{n+1} e che, se appartiene ad S_n , essa sarà razionale: il che esaurisce quei casi.

(2) Se avessi voluto dimostrare il teorema con la restrizione $n > 2p - 1$ (che è quella dell'enunciato di CLIFFORD, ma che è eccessiva), non sarebbe stato necessario l'artificio usato per ultimo e sarebbe stato sufficiente, proiettata la curva di genere p e d'ordine n di S_{n-p+1} da $n - 2p$ suoi punti su S_{p+1} , considerare sulla curva d'ordine $2p$ che così si otterrebbe l'involuzione razionale di gruppi di p punti determinata dagli S_p passanti per p suoi punti fissi. — Ella osserverà inoltre che, sia nel ragionamento che sopra ho fatto, sia in qualche altra considerazione che poi farò, rimane qualche punto da approfondire.

Il massimo spazio a cui possa appartenere una curva di genere p e d'ordine $n > 2p - 2$ è dunque S_{n-p} ; e credo facile dimostrare la esistenza effettiva di curve (*normali*) corrispondenti a quel massimo mediante considerazioni sintetiche. Ma quando $n \leq 2p - 2$ il valore massimo di d , sì che esista una curva di genere p e d'ordine n appartenente ad S_d credo non sia ancor stato determinato che nell'ipotesi che la curva abbia *moduli generali* (v. il mio lavoro sulle curve nei Math. Ann., XXX [qui a p. 80]). Però si può ottenere, senza mettere alcuna restrizione sulla natura dei moduli, un limite superiore per d (in generale *non* raggiunto) ripetendo per la curva che ora consideriamo in S_d il ragionamento fatto dianzi. Se per $d - 2$ suoi punti si può condurre un S_{d-2} che ne contenga altri due punti, gli S_{d-1} passanti per esso determineranno sulla curva un'involuzione razionale di grado $n - d$; sicchè se $n - d < d$, cioè $n < 2d$, sarebbe $n - d < n - p$, cioè $d > p$. Dunque considerando solo le curve degli spazi $S_p, S_{p-1}, S_{p-2}, \dots$, si ha che $2d \leq n$. — Osservi che anche questa proposizione si trova nella Memoria di CLIFFORD.

In particolare si deduce che per $n = 2p - 2$ il massimo valore di d è $d = p - 1$. Tali curve di genere p e d'ordine $2p - 2$ appartenenti ad S_{p-1} sono veramente, come dice CLIFFORD, « la rappresentazione geometrica naturale delle funzioni abeliane generali di genere p », e da questo punto di vista furono già usate da vari geometri, come i sigg. WEBER, NÖTHER ed HURWITZ (quest'ultimo nella sua recente Nota: *Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen*, Götting. Nachrichten, 1887). Ma mi pare che molte ricerche si potrebbero ancor fare su esse, specialmente per via geometrica. Ad esempio è ben noto che, se $p > 3$, una curva siffatta sta in $(p - 2)(p - 3)/2$ quadriche (a $p - 2$ dimensioni) linearmente indipendenti, ma vi sono nel sistema lineare di quadriche passanti per essa certi *coni di specie* $p - 4$, che forse non furono finora osservati e che io otterrei nel modo seguente. Proiettando la curva su un piano da $p - 3$ suoi punti si vede che per questi passano $p(p - 3)/2$ spazi S_{p-3} ognuno dei quali contiene altri due punti della curva. Gli S_{p-2} passanti per un tale S_{p-3} determinano dunque sulla curva un'involuzione razionale di grado $p - 1$. Quindi, per una proposizione (v. a p. 219 [qui a p. 97] del mio lavoro già citato dei Math. Ann., XXX) che discende subito da un noto teorema di RIEMANN, ogni gruppo di $p - 1$ punti di quell'involuzione starà in un S_{p-3} . E l'ordine N della varietà a $p - 2$ dimensioni luogo di questi $\infty^1 S_{p-3}$ sarà tale che, applli-

cando la formola (1) e riducendo, si avrà :

$$N + \frac{z}{p-1} = 2;$$

donde si trae : $z = 0$ ed $N = 2$. Dunque *ciascuno* di quei gruppi di $p - 1$ punti è tale che $p - 2$ qualunque dei suoi punti sono indipendenti, cioè appartengono all' S_{p-3} cui appartiene il gruppo; ed il luogo di questi $\infty^1 S_{p-3}$ è una quadrica, la quale avrà evidentemente per spazio doppio (se $p > 4$) l' S_{p-5} d'intersezione di due di quegli S_{p-3} , e sarà quindi un cono di specie $p - 4$ avente quell' S_{p-5} per sostegno. Oltre a quella serie di $\infty^1 S_{p-3}$ seganti la curva in ∞^1 gruppi di $p - 1$ punti, quel cono quadrico ne conterrà un'altra serie analoga (di cui farà parte l' S_{p-3} da cui sono partito), sì che, mentre due spazi della stessa serie s'incontrano solo nel sostegno S_{p-5} del cono, due spazi di serie diverse s'incontrano in un S_{p-4} , cioè stanno in un S_{p-2} . Le due serie ∞^1 di gruppi di $p - 1$ punti della curva poste su quelle due serie di S_{p-3} sono serie (*speciali*) *residue* l'una dell'altra. Proiettando dal sostegno del cono su un S_3 , la curva si proietta in una curva d'ordine $2p - 2$ situata su una quadrica ordinaria ed incontrata da tutte le rette di questa in $p - 1$ punti.

La curva normale di genere p e d'ordine $2p - 2$ dello spazio S_{p-1} può servire assai utilmente per uno studio sintetico degli enti ∞^1 di genere p dotati di trasformazioni univoche in sè stessi; e ciò perchè una trasformazione univoca di quella curva in sè stessa è sempre parte di una trasformazione lineare, cioè di un'*omografia* di quello spazio (v. Math. Ann., XXX, p. 209, n° 7) ⁽³⁾. Quest'*omografia*, come quella trasformazione univoca della curva, sarà necessariamente periodica; quindi le proprietà delle omografie cicliche di S_{p-1} serviranno ad ottenere proprietà di quella curva normale, e per conseguenza di quegli enti. Veda ad esempio con qual semplicità si otterrebbero proprietà delle involuzioni di 2° grado di qualunque genere.

La curva considerata γ ammetta un'involuzione di 2° grado di genere P : le coppie di punti coniugati in questa involuzione saranno omologhi in un'*omografia involutoria* di S_{p-1} . Diciamo S_i ed

⁽³⁾ [V. p. 87 di questo volume] Naturalmente vanno esclusi gli enti iperellittici, poichè la detta curva non può esser iperellittica; ma per lo studio sintetico dell'*iperellitticità* Ella sa come possano giovare le curve normali d'ordine $> 2p - 2$.

S_{p-i-2} gli assi di questa, dove i indica un numero ≥ 0 che determineremo. Le ∞^1 rette congiungenti quelle coppie s'appoggeranno su quegli assi e formeranno una rigata di genere P , il cui ordine, determinato mediante la formola (1), risulta $N = 2P + p - 3$. Quindi, se $P = 1$, quella rigata, appartenendo ad S_{p-1} ed essendo ellittica e d'ordine $p - 1$, sarà necessariamente un cono: onde l'omografia involutoria sarà una omologia armonica e si potrà porre $i = 0$. In generale poi, qualunque sia P , quella rigata d'ordine N avrà sugli assi della omografia due curve direttrici i cui ordini devono dare per somma N , giacchè i due assi e quindi anche quelle direttrici non hanno punti comuni. Siccome poi la curva data γ è normale per S_{p-1} , così normale dovrà pur essere la rigata per questo spazio, e quindi quelle sue direttrici saranno normali risp. per S_i ed S_{p-i-2} ; sicchè, supposto che esse siano semplici e per conseguenza del genere P , non potranno essere entrambe non speciali e però degli ordini $P + i$, $P + p - i - 2$, chè questi numeri darebbero per somma $N + 1$, ma dovranno invece essere, ad esempio, la prima speciale e d'ordine $P + i - 1$, e l'altra non speciale e d'ordine $P + p - i - 2$. La 1^a curva direttrice essendo speciale, dovrà essere $P + i - 1 \leq 2P - 2$; ossia:

$$i \leq P - 1.$$

D'altronde calcolando il numero dei punti d'intersezione di quella curva con γ si trova subito⁽⁴⁾ che esso vale $2(i - P + 1)$. Dunque non potrà essere $i < P - 1$, ma sarà precisamente:

$$i = P - 1; \text{ (5)}$$

ed inoltre si vede che quella curva direttrice speciale, od anche l' S_{p-1} cui essa appartiene, non incontra γ in alcun punto. Invece l'altra direttrice della rigata, ossia l'asse cui essa appartiene, incontra γ in $2(p - 2P + 1)$ punti, come risulta dalla formola della penultima nota (e come anche risulterebbe osservando che quei punti

(4) Si sa che in generale il numero dei punti d'incontro di due curve di ordini n, n' segnate su una rigata d'ordine N ed incontranti ogni generatrice risp. in k, k' punti è dato da: $kn' + k'n - kk'N$.

(5) Già nel lavoro che Le citai del sig. HURWITZ si trova, oltre ad un cenno sulla rappresentazione con integrali abeliani di una curva normale speciale di genere p e d'ordine $2p - 2$ dotata di una trasformazione univoca in sè stessa i cui ∞^1 cicli costituiscono una forma di genere P , un'osservazione analitica (p. 99 e 100), da cui si può dedurre che l'omografia ciclica di S_{p-1} contenente quella trasformazione ha un S_{P-1} fondamentale (di punti uniti).

sono i punti doppi dell'involuzione di genere P data su γ e determinandone il numero mediante la formola di corrispondenza del sig. ZEUTHEN). Ne segue :

$$2P \leq p + 1;$$

e però l'asse S_{P-1} su cui sta la curva direttrice speciale è superiore (in numero di dimensioni) all'altro asse S_{p-P-1} nel solo caso estremo in cui sia $2P = p + 1$, mentre l'ordine $2P - 2$ di quella 1^a direttrice non supera mai quello $p - 1$ della direttrice non speciale.

Ella vedrà subito come questi risultati si possano enunciare in tal forma analitica che più non vi compaja la curva γ , e come se si continuasse invece ad usar considerazioni geometriche su γ si potrebbero risolvere nuove questioni importanti che subito si affacciano alla mente.

Ella vedrà pure come la curva direttrice speciale appartenente ad S_{P-1} di genere P e d'ordine $2P - 2$ viene in certi casi sostituita da una curva razionale normale d'ordine $P - 1$ di quello spazio contata doppiamente, e cioè quando l'involuzione di genere P considerata su γ sia iperellittica: così se $P = 2$ questo fatto accade sempre e la rigata delle rette congiungenti le coppie di punti di γ coniugati in quell'involuzione ha una retta direttrice doppia.

Infine mi permetto farle notare come ricerche analoghe si potrebbero fare su certe superficie degli spazi superiori che costituiscono la miglior rappresentazione geometrica delle funzioni algebriche di due variabili, cioè sulle superficie le cui sezioni lineari sono rappresentate su una superficie d'ordine n dello spazio ordinario dalle sue intersezioni con le superficie aggiunte d'ordine $n - 4$. Di qualche questione su quest'argomento, a cui vado pensando da qualche tempo, spero di poterle scrivere più tardi.

Torino, Aprile 1888.