Corrado Segre

Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques (II partie, Surfaces réglées algebriques)

Math. Annalen, Vol. **34** (1889), p. 1–25

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. 125–151

XI.

RECHERCHES GÉNÉRALES SUR LES COURBES ET LES SURFACES RÉGLÉES ALGÉBRIQUES

« Mathematische Annalen », Band XXXIV, 1889, pp. 1-25.

II[e] Partie (1).

Surfaces réglées algébriques.

Bien que les recherches qui suivent aient été pour la plupart achevées lors de l'apparition de la 1[e] Partie de ce travail, (comme il était dit dans son introduction) cependant le retard dans la publication de cette 2[e] Partie (retard causé par des raisons de santé qui m'ont aussi empêché de faire certains développements du thème que j'aurais désirés) a permis d'y ajouter des résultats nouveaux qui la rendront un peu moins incomplète.

On y trouvera des propositions très-générales sur les surfaces réglées de genre et ordre quelconques. Elles sont obtenues par la méthode si féconde de la projection étendue aux espaces supérieurs. Cependant ici, de même qu'en d'autres recherches récentes sur la géométrie projective à plusieurs dimensions, il ne s'agit pas (j'ajoute cela pour celui qui ne serait pas au courant des progrès que cette branche des mathématiques est en train de faire, surtout en Italie) de faciles extensions aux espaces supérieurs de résultats qui pour l'espace ordinaire soient déjà connus. Au contraire il s'agit de résoudre des questions qui, même pour celui-ci, sont nouvelles et non dépourvues d'intérêt ni de difficulté ; et en introduisant les espaces

---

(1) Voir la I[e] Partie (*Courbes algébriques*) à p. 203 et suiv. du t. XXX de ces Annales [qui a p. 80]. On y trouvera des citations de travaux précédents et l'explication de certaines dénominations contenues dans celui-ci. (Dans les renvois aux différents n[os] de la I[e] Partie je les ferai précéder par l'indication I.) — Je bornerai toujours la recherche aux surfaces réglées *irréductibles* : lorsqu'une telle surface se réduit à un *cône* on le dira expressément.

de toutes les dimensions on n'a pas seulement l'avantage de la plus grande généralité, mais encore celui de pouvoir se servir dans toute sa force d'un instrument que ne possède pas celui qui veut se borner à l'espace ordinaire : c'est-à-dire la considération des êtres d'un espace comme projections de ceux des espaces supérieurs.

Parmi les applications qu'on verra ici de ces idées je citerai surtout une distinction des surfaces réglées en deux espèces, qui a la plus grande importance pour la géométrie de ces surfaces, et la détermination pour chaque surface réglée (avec quelques conditions) de toutes les courbes de chaque ordre qui en rencontrent une fois toutes les génératrices. Mais c'est surtout aux méthodes que je prie le lecteur de vouloir faire attention ; car pour les applications il verra que j'en ai laissé de côté une foule qui se présentent naturellement et que je souhaite de voir faire par d'autres.

Propositions fondamentales sur les surfaces réglées et sur leurs courbes.

1. *Lorsqu'une courbe algébrique est tracée sur une surface réglée algébrique, les ordres et les genres de ces deux variétés sont liés par une relation très-importante* (²). Soient n l'ordre et p le genre de la surface réglée F, ν l'ordre et π le genre de la courbe γ, dont nous supposerons pour plus de simplicité qu'elle soit une courbe *simple* pour F ; nommons en outre k le nombre, que nous supposerons > 1, des points de rencontre de γ avec chaque génératrice de la surface. La formule de correspondance de M. ZEUTHEN, appliquée à la correspondance $(1, k)$ entre la série de genre p des génératrices de F et la série de genre π des points de γ, en y faisant correspondre deux éléments lorqu'ils s'appartiennent, donne pour le nombre y des génératrices de F qui sont tangentes à γ l'expression

(1) $$y = 2(\pi - 1) - 2k(p - 1).$$

(²) J'ai donné cette relation, avec la démonstration qui suit et les premières des conséquences que nous en tirerons, dans la Note *Intorno alla geometria su una rigata algebrica* (Rend. Acc. Lincei, 1887) ; mais (comme je l'ai déjà remarqué là) le cas particulier où la surface réglée est un cône avait déjà été trouvé par M. STURM (Math. Ann., XIX, p. 487). En substituant à la surface réglée une variété (de genre p et ordre n) de ∞^1 S_r, c'est-à-dire une $S_r - F_{r+1}$, contenant la courbe, on a une relation plus générale et très-féconde que j'ai donnée peu après (dans les mêmes Rendiconti) avec quelques applications dans la Note *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi* (Le due Note qui citate si trovano a p. 110 ed a p. 114 di questo volume (N. d. R.)].

D'un autre côté en appliquant l'ordinaire principe de correspondance à un faisceau de plans, si l'on est dans l'espace ordinaire, ou à un faisceau de S_{d-1} si l'on est dans S_d, en y considérant comme correspondants deux éléments qui aillent à deux points de γ placés sur une même génératrice de F, on a

$$(2) \qquad y + k(k-1)n + 2\delta = 2(k-1)\nu ;$$

où δ désigne le nombre (≥ 0) de ces points doubles de la courbe γ, dont chacun compte deux fois parmi les k intersections de celle-ci avec une génératrice de F: tels sont les points doubles de γ qui sont simples pour F, mais pas toujours ceux qui sont doubles aussi pour cette surface. En éliminant y entre les deux égalités (1) et (2), on a la relation cherchée, c'est-à-dire

$$(3) \qquad (k-1)\nu - \pi - \delta = \frac{k(k-1)}{2} n - k(p-1) - 1 .$$

2. Un cas particulier de cette formule ayant beaucoup d'importance pour la suite est celui où $k = 2$, c. à. d. où la courbe γ rencontre deux fois chaque génératrice de la surface réglée F; la relation devient alors

$$(4) \qquad \nu - \pi - \delta = n - 2p + 1 .$$

Elle donne l'ordre n de la surface réglée qui est le lieu des droites contenant les couples de points d'une involution du 2e dégré et de genre p sur une courbe d'ordre ν et genre π dont δ points doubles proviennent de la coïncidence de deux points conjugués de l'involution.

Sur une surface réglée donnée F d'ordre n et genre p on peut tracer une infinité de courbes qui en rencontrent deux fois les génératrices et pour lesquelles il n'y ait pas de points doubles de l'espèce δ définie au n⁰ 1; de telle sorte est, par exemple, lorsque F appartient à l'espace ordinaire, son intersection avec une quadrique qui ne lui soit tangente en aucun point. Si ν est l'ordre et π le genre d'une de ces courbes, on aura comme cas particulier de la (4)

$$(5) \qquad \nu - \pi = n - 2p + 1 .$$

3. Dans la suite nous entendrons toujours par p le genre des surfaces réglées que nous aurons à considérer et que nous désignerons par F^n lorsque nous voudrons représenter par n leur ordre. — Si l'on suppose qu'une courbe γ^ν_π tracée sur une F^n et de l'espèce considérée au n⁰ précédent (c. à. d. rencontrant deux fois les génératri-

ces de F et telle que $\delta = 0$) soit la projection d'une courbe de même ordre appartenant à un espace supérieur, l'involution de points de celle-ci qui a pour projection celle qui est déterminée sur γ par les génératrices de F sera évidemment aussi de l'espèce $\delta = 0$ et l'ordre de la surface réglée des droites qui en joignent les couples devra encore satisfaire à la relation (5), et sera par suite n encore; de sorte que la F^n que l'on avait sera la projection d'une autre surface réglée de même ordre, appartenant à l'espace supérieur.

Cela posé, rappelons (I., n$^{\text{os}}$ 4 et 5) qu'une γ_π^ν non spéciale est toujours la projection d'une courbe de même ordre appartenant à un $S_{\nu-\pi}$; tandis qu'une γ_π^ν spéciale a la propriété caractéristique d'être la projection d'une γ_π^ν appartenant à un espace de dimension $> \nu - \pi$: plus brièvement *l'espace normal* (3) pour une γ_π^ν est $S_{\nu-\pi}$ si elle n'est pas spéciale, et un espace supérieur à celui-là si elle est spéciale. Par suite la remarque précédente et la relation (5) nous conduisent aux propositions suivantes:

Chaque surface réglée de genre p *et ordre* n *qui appartienne à un espace inférieur à* S_{n-2p+1} *est la projection d'une surface réglée de même ordre appartenant à ce dernier espace* (4).

Il y a deux espèces bien différentes de surfaces réglées de genre p *et ordre* n: 1⁰ *celles qui ont pour espaces normaux des espaces de dimension* $> \mathrm{n} - 2\mathrm{p} + 1$, *c. à. d. celles qui appartiennent à de tels espaces et leurs projections ;* 2⁰ *les autres surfaces, c. à. d. celles qui n'appartiennent pas à des espaces supérieurs à* S_{n-2p+1} *ni sont projections de surfaces (toujours, bien entendu, du même ordre) appartenant à de tels espaces : celles-ci ont précisément pour espace normal un* S_{n-2p+1}, *et pour elles on a évidemment* $\mathrm{n} \geq 2\mathrm{p} + 2$.

---

(3) Lorsqu'une variété quelconque appartient à un S_d, ou bien est la projection d'une variété du même ordre qui appartienne à S_d, mais dans les deux cas *n'est pas* la projection d'une variété du même ordre appartenant à un espace supérieur à S_d, nous dirons que S_d est l'*espace normal* pour cette variété ; et dans le premier cas, c'est-à-dire lorsque la variété appartient à son espace normal, nous dirons qu'elle est *normale.*

(4) La première démonstration que j'aie trouvée de cette proposition fondamentale était tout-à-fait différente de celle-ci ; elle était l'extension de celle donnée pour $p = 1$ au n⁰ 5 des *Ricerche sulle rigate ellittiche* (citées dans la 1e Pe) et s'appuyait sur la considération de la F^n comme engendrée par les droites joignant les points correspondants de deux courbes en correspondance uniforme (ayant un certain nombre de points communs dont chacun se corresponde à soi-même). Mais comme elle était moins générale que celle donnée ci-dessus je crois inutile de la reporter ici.

Nous appellerons par analogie et pour cause de brièveté « *spéciales* » les surfaces réglées de la 1e espèce, « *non spéciales* » les autres ([5]). Ces dénominations se trouvent aussi justifiées par cette autre conséquence des choses dites: *Les courbes d'une surface réglée qui en rencontrent deux fois les génératrices et qui n'ont pas de points doubles de l'espèce* δ (*v.* n^0 1) *sont toutes spéciales lorsque la surface réglée est spéciale, et toutes non spéciales dans le cas opposé.*

Par exemple, lorsque $n < 2p + 2$ toutes les courbes tracées de cette façon sur une F^n seront spéciales, car cette surface même (appartenant à un espace de dimension $> n - 2p + 1$) est spéciale ([6]).

4. Une manière très-importante (bien que *particulière*) pour engendrer des surfaces réglées d'ordre n consiste à considérer les lieux des droites joignant les points correspondants de deux courbes d'ordres m, m' en correspondance uniforme, où $m + m' = n$. Lorsqu'une F^n peut être engendrée de cette façon, on reconnait facilement si elle est spéciale ou non par l'examen des dites courbes.

En effet si ces γ^m, $\gamma^{m'}$ peuvent être obtenues comme projections de courbes de mêmes ordres qui appartiennent resp. à S_h, $S_{h'}$, la surface sera projection d'une surface de même ordre engendrée par

([5]) On pourrait faire pour les surfaces réglées F^n de S_d une autre distinction en les considérant comme des *courbes* de genre p et ordre n de l'espace de dimension $d(d+1)/2 - 1$ auquel appartient la variété de dimension $2(d-1)$ dont les *points* sont les droites de S_d: on pourrait alors nommer *spéciale* ou *non spéciale* une telle F^n suivant qu'elle forme en ce sens une courbe spéciale ou non, c'est-à-dire suivant que spéciale ou non est la série linéaire de dimension $d(d+1)/2 - 1$ (en général) des groupes de n génératrices de la F^n déterminés par les différents *complexes linéaires de droites* de S_d. Mais cette distinction n'a pas pour notre but la même importance que celle faite ci-dessus. — Remarquons cependant que la considération des F^m de S_d comme *courbes* de l'espace de dimension $d(d+1)/2 - 1$ peut donner des résultats utiles sur les surfaces réglées: par exemple, en appliquant à ces *courbes* et à cet espace le théorème de CLIFFORD (I., n^0 4), ce qui déjà pour $d = 3$ donne quelques propositions particulières intéressantes.

([6]) Il faut remarquer que tout cône d'ordre n non rationnel, qu'il soit ou non spécial dans le sens de I., n^0 10, est toujours spécial considéré comme surface réglée et dans le sens des dénominations introduites ci-dessus (car son espace normal est S_{n-p+1} ou un espace supérieur): c'est là un petit inconvénient de ces dénominations.

Ajoutons dès à présent que dans la suite on verra que, pour n suffisamment grand par rapport à p, une F^n n'est spéciale que par exception. Ainsi (cfr. n^{os} 14,18) une surface réglée pour $p = 0$ n'est jamais spéciale, pour $p = 1$ l'est seulement si elle se réduit à un cône, pour $p = 2$ seulement si elle est un cône ou bien si elle a une droite directrice double, etc. etc.

des courbes de cette dernière espèce et ayant leurs espaces indépendants, surface qui en conséquence appartiendra à $S_{h+h'+1}$ (7). Pour prouver cela remarquons avant tout que l'S_i - cône d'ordre m qui projette la γ^m d'un S_i quelconque sera (à cause de l'hypothèse faite sur cette courbe) la projection d'un S_i - cône de même ordre appartenant à un S_{i+h+1} (v. I., n⁰ 10) et jouira par suite de la propriété (évidente pour ce second cône) de contenir une γ^m qui passe par $h+1$ points donnés arbitrairement sur lui. Cela posé, si l'espace auquel appartient la surface réglée est de dimension $d < h + h' + 1$, projetons par un $S_{h+h'-d}$ indépendant de cet espace les deux courbes γ^m et $\gamma^{m'}$ et sur les deux cônes projetants prenons (comme l'on voit facilement qu'on peut prendre) resp. deux groupes de $h+1$ et de $h'+1$ points qui tous ensemble soient indépendants : nous pourrons tracer sur ces cônes deux courbes resp. des ordres m et m' qui engendreront une F^n appartenant à un $S_{h+h'+1}$ (celui qui joint les $h+h'+2$ points nommés, c'est-à-dire qui joint l'S_d à l'$S_{h+h'-d}$) et ayant celle donnée pour projection.

Il est aussi évident que si les espaces S_h, $S_{h'}$ sont ceux normaux pour les courbes considérées des ordres m, m', l'espace $S_{h+h'+1}$ sera celui normal pour la surface réglée d'ordre n engendrée par celles-ci.

De là cette conséquence que: *si une* $\mathrm{F^n}$ *de genre* p *peut être engendrée au moyen de deux courbes d'ordres* m *et* n — m, — et si l'on considère comme *spéciale* la γ^m, même dans le cas indiqué dans la dernière note, lorsque $h > m - p$ (h désignant encore la dimension de l'espace normal pour cette γ^m), et analoguement pour la γ^{n-m}, — *la surface réglée sera spéciale lorsque l'une au moins de ces deux courbes est spéciale, non spéciale si ces courbes sont toutes les deux non spéciales.*

5. Nous aurons plus loin l'occasion de nous servir de cette remarque particulière. Mais en revenant aux considérations générales du n⁰ 3, considérons encore sur une F^n appartenant à S_d une courbe γ^ν de l'espèce considérée dans ce n⁰ : nous pouvons en tirer pour la F^n un nouveau résultat. En effet supposons que γ^ν soit la projection

(7) Dans cette proposition, de même que dans la suite, γ^m peut indiquer une courbe d'ordre a multiple suivant ϱ où $m = \varrho a$; la courbe nommée de même ordre m, dont elle est projection, peut présenter le même fait ou bien aussi être une courbe simple. Analoguement pour la $\gamma^{m'}$.

d'une $\gamma^{\nu+1}$ appartenant à S_{d+1} faite par un point P' de cette nouvelle courbe: on en déduit que la F^n sera projection d'une surface réglée F^{n+1} d'ordre $n+1$ passant simplement par P'. La tangente à $\gamma^{\nu+1}$ en P' et la génératrice $\mathbf{g}'$ de F^{n+1} passant par P' et rencontrant encore $\gamma^{\nu+1}$ en un point G' auront pour traces sur S_d resp. deux points P et G de γ^ν qui seront les projections des points P' et G' de $\gamma^{\nu+1}$ et qui seront joints par une génératrice $\mathbf{p}$ de F^n.

Or supposons que la F^n, et par suite chacune des γ^ν susdites, ne soit pas spéciale, et que l'on donne arbitrairement sur cette surface un point comme point G. Sur une de ces γ^ν qui passe par G soit P le point *conjugué* de G (c. à. d. placé avec G dans une même génératrice de la F^n). La γ^ν pourra être considérée d'une infinité de manières comme la projection d'une $\gamma^{\nu+1}$ non spéciale appartenant à S_{d+1} faite par l'un P' de ses points dans lequel la tangente à cette courbe soit la droite $P'P$: cela résulte du n^0 12 de la I^e P^e (et pourrait cesser de valoir si la γ^ν, et par suite la F^n, était spéciale). Par suite on pourra toujours considérer la F^n non spéciale comme projection d'une F^{n+1} non spéciale appartenant à S_{d+1} de telle manière que la trace sur S_d de la génératrice de cette nouvelle surface qui passe par le centre de projection soit un point G donné arbitrairement sur la F^n.

Maintenant en répétant pour la F^{n+1} de S_{d+1} ce que l'on a fait pour la F^n de S_d, seulement en substituant à G un point de la F^{n+1} dont la projection sur la F^n soit un autre point donné arbitrairement sur celle-ci; et en remontant ainsi successivement à S_{d+1}, S_{d+2}, S_{d+3}, ..., on arrive à la proposition suivante:

Chaque F^n *non spéciale appartenant à* S_d *peut être considérée d'une infinité de manières comme la projection d'une* F^{n+l} *non spéciale appartenant à* S_{d+l} *faite par* l *de ses points tels que les* l *génératrices de cette nouvelle surface qui en sortent se projettent suivant* l *points donnés arbitrairement sur la* F^n [8].

6. Tandis que lorsqu'une F^n est considérée comme projection d'une autre F^n les ordres des courbes correspondantes sur les deux surfaces sont égaux et le problème de la détermination de toutes

---

[8] Du n^0 3 découle aussi une autre proposition qu'il convient de remarquer. Comme la γ^ν que l'on obtient en projetant une $\gamma^{\nu+1}$ spéciale par l'un de ses points est toujours spéciale, il s'ensuit qu'*en projetant une surface réglée spéciale par* (un et par suite aussi par) *un nombre quelconque de ses points on obtient toujours une surface réglée spéciale.*

les courbes d'un ordre donné est le même sur les deux F^n, même chose n'arrive plus dans les projections introduites dernièrement.

Une F^n soit la projection d'une F^{n+1} faite par un point P' et soient, comme au n^0 précédent, $\mathbf{g}'$ la génératrice de la F^{n+1} qui passe par P', G sa trace sur la F^n et $\mathbf{p}$ la génératrice de celle-ci qui passe par cette trace, et qui sera évidemment la projection de la génératrice de F^{n+1} infiniment voisine à $\mathbf{g}'$, c. à. d. la trace du plan tangent à cette surface dans le centre de projection P'. Alors les points de F^{n+1} infiniment voisins de P' auront pour projections les différents points de $\mathbf{p}$, tandis que les points de F^n infiniment voisins de G seront les projections de différents points de $\mathbf{g}'$. Par suite une courbe quelconque d'ordre ν de la F^{n+1} qui ait en P' un point multiple d'ordre a et qui rencontre encore $\mathbf{g}'$ en b autres points, de sorte qu'elle rencontre chaque génératrice de cette surface en $a+b$ points, aura pour correspondante sur la F^n une courbe d'ordre $\nu - a$ qui en rencontre $a+b$ fois chaque génératrice mais qui a en G un point multiple suivant b; et réciproquement une telle courbe de la F^n correspond à une courbe de la dite espèce de la F^{n+1}. En particulier une courbe de la F^n appuyée simplement aux génératrices de celle-ci est la projection: d'une courbe de la F^{n+1} d'ordre supérieur de 1 unité et passant par P' si elle ne passe pas par G, et au contraire d'une courbe de même ordre ne passant pas par P' si elle passe par G. Par voie de successives élévations, et en appliquant la dernière proposition du n^0 préc., on en tire entre autres le résultat suivant:

On peut toujours considérer une F^n *non spéciale comme projection d'une* F^{n+1} *non spéciale faite par* 1 *de ses points* (*quel que soit* 1) *de telle façon que chaque courbe d'ordre* m *qui rencontre simplement les génératrices de la* F^n *et qui passe par* 1 *points donnés arbitrairement sur celle-ci soit la projection d'une courbe du même ordre* m *de la* F^{n+1}.

Ce résultat nous sera utile dans l'étude des courbes appuyées simplement aux génératrices d'une surface réglée: courbes qui sont les seules dont nous nous occuperons dorénavant et que nous indiquerons brièvement par le nom de « *directrices* » ([9]).

([9]) Ajoutons seulement à propos des autres courbes tracées sur une F^n que les relations (1) et (2) du n^0 1 pourraient conduire à des remarques sur elles assez importantes. Ainsi on en tire: $\pi \geq k(p-1)+1$ et $2\nu \geq kn$. Donc *pour* $k>1$ *les courbes d'ordre minimum d'une* F^n *seraient celles pour lesquelles* $\mathrm{k}=2$, $\nu = n$, (d'où $y=\delta=0$) *et* $\pi = 2p-1$.

Sur les courbes directrices d'une surface réglée: courbes minima.

7. *Soit* F^n *une surface réglée appartenant à* $S_{n-p-i+1}$ *et ayant une courbe directrice d'ordre* m *appartenant à un* S_h (*où* $h \leq n - p -$ $- i$) (*) ; *alors si*

$$n \geq 2p + 2i + 2h - m + 1\,, \tag{1}$$

on aura

$$m \leq h + i\,. \tag{2}$$

Dans cet énoncé l'on peut entendre que l'S_h ne rencontre F^n que suivant la γ^m nommée, mais que cette courbe peut fort bien se composer d'un certain nombre (≥ 0) de génératrices et d'une courbe irréductible (simple ou multiple pour la surface). — La démonstration de cette proposition, qui trouvera dans la suite plusieurs applications, est fort simple. Les S_{n-p-i} qui passent par l'S_h rencontrent encore la F^n suivant une série linéaire de dimension $n - p - i - h$ de groupes de $n - m$ génératrices variables, et l'on peut prendre arbitrairement sur la surface $n - p - i - h$ génératrices comme éléments d'un tel groupe, car par elles et l'S_h passe (au moins) un S_{n-p-i}. Or (cfr. I., n^0 2) cette série serait certes spéciale s'il était

$$n - p - i - h > (n - m) - p \quad \text{c'est-à-dire} \quad m > h + i\,;$$

on pourrait donc dans ce cas lui appliquer le théorème de Riemann et Roch (cfr. loc. cit.), en force duquel le nombre des génératrices que l'on pourrait prendre arbitrairement comme éléments d'un groupe serait tout au plus $(n - m) - (n - p - i - h)$: par suite l'on aurait

$$n - p - i - h \leq (n - m) - (n - p - i - h)\,,$$

ou

$$n \leq 2p + 2i + 2h - m\,,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse (1). Ainsi dans cette hypothèse on ne peut pas avoir $m > h + i$: la relation (2) est donc prouvée.

Il est bon de remarquer que le théorème reste encore vrai si au lieu de la condition (1) on pose l'une quelconque des deux suivantes

$$n \geq 2p + i + h\,, \tag{1'}$$

$$n \geq m + 2p - 1\,, \tag{1''}$$

(*) Si legga $h < n - p - i$; se no, sostituendo in (1), verrebbe $m \geq n + 1$; onde F^n starebbe in $S_h = S_{n-p-i}$ (N. d. R.).

car l'une quelconque de celles-ci, combinée avec l'hypothèse

$$m > h + i\,,$$

donnerait précisément la relation (1), qui est contraire, comme nous l'avons vu, à cette hypothèse [10].

8. Le théorème de RIEMANN et ROCH peut encore être appliqué utilement dans les hypothèses du n^0 précédent et si $i \leq p - 1$ à une autre série de groupes de génératrices de la F^n, c'est-à-dire à la g_m^h des groupes de génératrices qui sortent des points d'intersection des S_{h-1} contenus dans S_h avec la directrice γ^m appartenant à celui-ci. Cette série est certainement spéciale si

$$m \leq h + p - 1\,,$$

condition qui, pour $i \leq p - 1$, est satisfaite à cause du théorème précédent si les hypothèses de celui-ci, c. à. d. (1), ou (1′), ou (1″), ont lieu ; et comme on peut évidemment prendre sur la surface réglée h génératrices arbitraires comme éléments d'un groupe de cette série, l'on devra avoir: $h \leq m - h$, c. à. d.

(3) $$m \geq 2h \text{ [11]}.$$

Cette relation, comparée à la (2), donne

(4) $$h \leq i\,.$$

On peut voir facilement dans quelles surfaces se présente le cas extrême de la (3), c. à. d. $m = 2h$. Par exemple, en appliquant une remarque de M. NÖTHER (*Raumcurven*, théor. III″.) à la g_{2h}^h déjà considérée, nous aurons que si la F^n n'est pas hyperelliptique on aura alors $h \geq p - 1$ et par suite: $h = p - 1$, $m = 2p - 2$. C'est ce qui arrivera toujours si la γ^{2h} est irréductible, car étant spéciale elle ne pourra pas être hyperelliptique. Si au contraire la γ^{2h} se réduit à une courbe multiple de la F^n, comme elle appartient à S_h, elle ne pourra être qu'une courbe rationnelle normale d'ordre h double pour la F^n qui alors sera certainement hyperelliptique.

---

[10] Si dans le théorème de ce n^0 l'on entend par m l'ordre de la partie irréductible de la courbe directrice qui appartient à S_h (dans le sens général de la note au n^0 4), c'est-à-dire si l'on n'y considère plus les génératrices qui peuvent se trouver sur S_h comme faisant partie de la γ^m, il sera encore vrai *à fortiori*.

[11] Dans le cas où la γ^m serait une courbe irréductible, simple pour la surface, cette relation (3) s'obtiendrait directement en appliquant à cette courbe d'ordre m et genre p appartenant à S_h un théorème de CLIFFORD.

9. *Lorsque* n *est assez grand par rapport aux autres nombres que nous avons introduits au* n^0 7, *la* F^n *qu'on y considérait peut être engendrée au moyen de la* γ^m *et d'une* γ^{n-m} (12). — En supposant qu'un S_{n-p-i} contienne une γ^{n-m} de la F^n, il rencontrera encore cette surface suivant un groupe de m génératrices sortant des points de rencontre de la γ^m avec l'S_{h-1} d'intersection de l'S_{n-p-i} avec S_h. Ainsi pour trouver sur la F^n ses γ^{n-m} on doit chercher à mener par un groupe de m génératrices, qui sortent des points de rencontre de la γ^m avec un S_{h-1} de S_h, un S_{n-p-i} *qui ne contienne pas* γ^m, *c. à. d.* S_h. L'hypothèse où cela serait impossible reviendrait à dire que chacun des S_{h+m-1} qui contiennent de tels groupes de m génératrices contient aussi S_h. Supposons qu'il en soit réellement ainsi et considérons $(h+i-m+1)$ groupes de m génératrices de l'espèce nommée et autant de S_{h+m-1} qui les contiennent respectivement; comme ceux-ci passent tous par S_h, on pourra mener par eux un $S_{h'}$, où

$$h' = h + (h + i - m + 1)(m - 1),$$

c'est-à-dire

$$h' = m(h + i - m + 2) - i - 1,$$

pourvu que ce nombre soit $\leq n - p - i$, c. à. d. que

$$n \geq m(h + i - m + 2) + p - 1.$$

Cet $S_{h'}$ contiendra une courbe directrice de la F^n composée de la γ^m et d'un nombre de génératrices $\geq m(h + i - m + 1)$, de sorte qu'en nommant m' l'ordre de cette courbe, on aura

$$m' \geq m(h + i - m + 2),$$

ou bien, puisque le second membre en y introduisant l'expression de h' se réduit à $h' + i + 1$,

$$m' > h' + i.$$

Or en appliquant le théorème du n^0 7 à cette $\gamma^{m'}$ de l'$S_{h'}$ on voit que ce résultat est impossible si on a

$$n \geq 2p + 2i + 2h' - m' + 1,$$

(12) Naturellement on prend ici γ^m dans le sens de la note à la fin du n^0 7, c. à. d. en laissant de côté les génératrices de la F^n qui pourraient par hasard se trouver dans S_h. De même on ne considère ici que des γ^{n-m} n'embrassant pas des génératrices.

condition qui se réduit à (ou est embrassée par)

(5) $$n \geq m(h+i-m+2)+2p-1\,,$$

qui absorbe celle qu'on avait posée précédemment. Donc lorsque la relation (5) est satisfaite, on est certain de pouvoir trouver sur la F^n des γ^{n-m} irréductibles qui avec la γ^m pourront servir à engendrer cette surface.

De cette proposition et de celle du n^0 4, en rappelant que l'une quelconque de ces γ_p^{n-m} est la projection d'une courbe de même ordre appartenant à S_{n-m-p}, nous tirons cette autre conséquence : que *si une* F^{n} *appartenant à* $\mathrm{S}_{\mathrm{n-p-i+1}}$ *a une courbe directrice d'ordre* m *appartenant à un* S_{h} *et si l'inégalité* (5) *est satisfaite et en même temps* $\mathrm{m} < \mathrm{h}+\mathrm{i}$, *la surface sera projection d'une* F^{n} *appartenant à l'espace supérieur* $\mathrm{S}_{\mathrm{n-p+h-m+1}}$ (*et ayant encore une directrice d'ordre* m *appartenant à un* S_{h}), *et même d'une* F^{n} *appartenant à un espace plus élevé* $\mathrm{S}_{\mathrm{n-p+h_1-m+1}}$ *si la courbe directrice nommée est projection d'une courbe de même ordre appartenant à un espace* $\mathrm{S}_{\mathrm{h_1}}$ *supérieur à* S_{h}.

10. Commençons par appliquer les résultats des derniers n^{os} aux surfaces réglées non spéciales. Si une F^n non spéciale est normale, c. à. d. appartient à S_{n-2p+1} (de sorte que dans ces n^{os} on doive mettre $i=p$) et si sur cette surface il y a une courbe directrice d'ordre m, qui appartienne à un S_h, je dis qu'on ne peut pas avoir $h > m-p$.

En effet la F^n non spéciale peut être considérée (n^0 6) (quel que soit un nombre $n' > n$) comme la projection d'une $F^{n'}$ appartenant à $S_{n'-2p+1}$ et ayant encore pour directrice une γ^m dont celle nommée est la projection. On peut prendre n' si grand que la condition (5) de notre dernière proposition soit satisfaite pour cette $F^{n'}$ et sa γ^m ; mais alors si l'on supposait que celle-ci appartint à un espace de dimension $> m-p$, ou bien qu'elle fût la projection d'une courbe de même ordre appartenant à un tel espace, la proposition citée montrerait que la $F^{n'}$ serait projection d'une surface de même ordre appartenant à un espace supérieur à $S_{n'-2p+1}$, et par suite qu'elle serait spéciale, tandis que la F^n qui en est la projection n'est pas spéciale: ce qui est absurde (v. la note à la fin du n^0 5).

Ainsi non seulement notre assertion est prouvée, mais en outre on voit que la γ^m de notre F^n non spéciale n'est pas la projection d'une courbe de même ordre qui appartienne à un espace supérieur à S_{m-p}. En appliquant encore une fois dans le cas d'une directrice multiple une dénomination déjà introduite à la fin du n^0 4, nous exprimerons ce résultat important brièvement ainsi: *une* F^n *non spéciale ne peut pas avoir de courbe directrice spéciale* [13]. — On verra plus tard qu'au contraire avec certaines restrictions, *toute* F^n *spéciale a une courbe directrice spéciale.*

Mais, en revenant à la considération d'une F^n qui appartienne à S_{n-2p+1}, si l'on applique à elle et à sa γ^m le théorème du n⁰ 7, on en tire (qu' elle soit ou non spéciale) que, lorsque

$$m \leq n - 2p + 1 ,$$

on doit avoir $h \geq m - p$. Si la surface n'est pas spéciale, en combinant ce résultat avec le précédent, on conclut qu'on aura précisément $h = m - p$. Il s'ensuit que *toute courbe directrice simple d'ordre* $\leq \mathrm{n} - 2\mathrm{p} + 1$ *d'une* F^n *normale non spéciale est une courbe normale non spéciale.*

11. Nous allons maintenant déterminer toutes les courbes directrices d'un ordre quelconque μ d'une F^n non spéciale; c'est-à-dire nous chercherons la dimension x du système de ces directrices γ^μ, et en outre le nombre (que nous appellerons *indice* de ce système de courbes tracées sur la F^n) de celles parmi ces γ^μ qui passent par x points arbitraires de la surface réglée.

Dans ce but nous pouvons supposer que la F^n soit normale, c'est-à-dire appartienne à S_{n-2p+1}. Une proposition vue à la fin du n⁰ 6 nous prouve que ces γ^μ de cette surface qui passent par les x points peuvent être considérées comme les projections de toutes les γ^μ qui sont directrices d'une F^{n+x} non spéciale appartenant à $S_{n+x-2p+1}$ et ayant la F^n pour projection. Or ces γ^μ de la nouvelle surface seront sur des $S_{\mu-p}$ contenus dans cet espace si

$$\mu \leq n + x - p ;$$

si l'on suppose qu'elles appartiennent à ces $S_{\mu-p}$, c'est-à-dire qu'elles soient normales (ce qui arrive nécessairement, à cause du n⁰ précédent, si

$$\mu \leq n + x - 2p + 1) ,$$

on pourra mener par ces espaces et $(n + x - \mu - p)$ points indépendants arbitrairement fixés autant d'espaces S_{n+x-2p} qui rencontreront encore la F^{n+x} suivant $(n + x - \mu)$ génératrices. On a donc pour ces derniers espaces, afin qu'ils passent par les points fixés et

(13) Par exemple, si une surface réglée a pour directrice double une courbe rationnelle d'ordre $< p$, elle sera spéciale.

qu'ils contiennent $(n+x-\mu)$ génératrices (non données), un nombre de conditions qui en général doit égaler $n+x-2p+1$ afin que le problème soit déterminé. Ainsi en général

$$(n+x-\mu-p)+(n+x-\mu)=n+x-2p+1,$$

d'où

$$x=2\mu-n-p+1. \tag{6}$$

En substituant cette valeur de x dans les conditions trouvées précédemment, elles deviennent

$$\mu \geq 2p-1, \qquad \mu \geq 3p-2; \tag{7}$$

mais nous verrons bientôt qu'elles ne sont pas nécéssaires pour la validité de notre résultat. Au contraire la formule (6) nous donne pour μ la condition

$$2\mu \geq n+p-1, \tag{8}$$

dont il faut tenir compte. Ainsi :

Pour une F^n *non spéciale les courbes directrices dont l'ordre* μ *est* $\geq E(n+p)/2$ *forment en général un système de dimension* $2\mu-n-p+1$.

Lorsque cette dimension se réduit à 0 ou à 1 l'on a ainsi la moindre valeur pour μ. Donc: *en général la surface a pour courbes du moindre ordre un certain nombre de courbes d'ordre* $(n+p-1)/2$, *ou bien une* ∞^1 *de courbes d'ordre* $(n+p)/2$, *suivant que l'une ou l'autre de ces deux expressions représente un nombre entier.* — Cependant il peut fort bien arriver que la surface ait des directrices d'ordre inférieur à ces nombres.

12. Quant à l'indice du système des directrices d'un ordre quelconque, considérons celui du système d'ordre $\mu+1$, c'est-à-dire le nombre des directrices de cet ordre qui passent par $2(\mu+1)-n-p+1$ points arbitraires, et remarquons que, si l'on prend deux de ces points sur une même génératrice, ce nombre (pourvu qu'il reste fini) ne doit pas changer; mais alors évidemment toutes ces courbes se décomposent en cette génératrice et les directrices d'ordre μ qui passent par les $2\mu-n-p+1$ points restants. Il faut seulement ajouter que, lorsque la surface a pour courbe minima une courbe d'ordre m plus petit que le minimum trouvé, les points nommés doivent être pris hors de cette courbe, et celle-ci avec les génératrices qui passent par tous ces points ne doit former aucune

courbe d'ordre $\mu + 1$ (ou moindre); c. à. d. on doit avoir

$$m + 2\mu - n - p + 2 > \mu + 1 , \tag{9}$$

ou

$$\mu \geq n + p - m . \tag{10}$$

Donc sous cette condition l'indice du système de directrices d'ordre $\mu + 1$ est le même que celui des directrices d'ordre μ. Par suite: *l'indice du système des directrices d'ordre* $\mu \geq \mathrm{n} + \mathrm{p} - \mathrm{m}$ *est indépendant de* μ (14). — En particulier si la surface n'a pas de courbes minima particulières (c. à. d. faisant exception au théorème du n⁰ préc.) cet indice reste constant quel que soit μ, et il est égal au nombre des directrices (minima) d'ordre $(n + p - 1)/2$ lorsque cette expression représente un nombre entier.

En projetant la F^n de S_{n-2p+1} sur S_3 par $(n - 2p - 2)$ de ses points on obtient une F^{2p+2} et il est bien clair que cet indice nommé est le même que celui relatif à cette nouvelle surface; il s'ensuit qu'il ne dépendra pas de n, mais seulement de p (15). Donc: *L'indice du système des directrices d'ordre* μ *d'une* F^n *non spéciale est un nombre qui dépend seulement de* p *et non de* n *ni de* μ, *pourvu toutefois que la surface soit générale, ou bien pourvu que dans le cas où elle ne le serait pas, ayant pour directrice minima une courbe d'ordre* m, *on se borne aux valeurs de* $\mu \geq \mathrm{n} + \mathrm{p} - \mathrm{m}$.

13. Cette proposition vient à être confirmée par la recherche directe de cet indice. Les considérations du n⁰ 11 nous prouvent qu'il est le même que le nombre des γ^μ de la F^{n+x}, c'est-à-dire, à cause de (6), de la $F^{2\mu-p+1}$; pour celle-ci ces γ^μ sont, en force de (10), les courbes minima, car la γ^m de la F^n ne donne sur la nou-

---

(14) Il suit en outre de notre raisonnement que ce nombre est d'une unité plus grand que l'indice du système de directrices d'ordre $n + p - m - 1$.

(15) Pour $p = 0$ on sait bien que cet indice est 1. — Pour $p = 1$ la F^{2p+2} devient la surface réglée du 4e degré elliptique de l'espace ordinaire: on sait qu'elle a *deux* droites doubles pour directrices (γ^2) et cela nous prouve que l'indice cherché pour $p = 1$ est 2 (on voit d'ailleurs aussi facilement que 2 sont sur cette F^4 les γ^3 passant par deux de ses points et les γ^4 qui passent par quatre de ses points). — Pour $p = 2$ la recherche de l'indice se réduit à trouver sur une F^6 de genre 2 de l'espace ordinaire les courbes planes du 4e ordre passant par un point de la surface: on voit tout-de-suite (par exemple en projetant la surface par ce point sur un plan) qu'elles sont *quatre*. — C'est ainsi que de la considération des premières valeurs de p j'arrivai par induction à penser qu'en général l'indice cherché soit égal à 2^p: ce qui sera prouvé au n⁰ 13.

velle surface qu'une γ^{m+x}, et l'on a

$$m + x > \mu$$

à cause de (6) et (10). En projetant par les $(n + x - \mu - p) = \mu - 2p + 1$ points fixes du dit n⁰ 11 on voit que le nombre cherché est celui des γ^μ d'une $F^{2\mu-p+1}$ non spéciale appartenant à $S_{\mu-p+1}$: elles appartiennent, sous les conditions (7) de ce n⁰, à autant d'$S_{\mu-p}$ qui rencontreront encore cette surface suivant $\mu - p + 1$ génératrices. Donc ce nombre est celui des $S_{\mu-p}$ qui contiennent $\mu - p + 1$ génératrices de la $F^{2\mu-p+1}$. Or M. G. Castelnuovo a très-récemment établi [16] que le nombre des S_{s-1} qui contiennent s génératrices d'une F^r appartenant à S_s est

$$\binom{r-s+1}{s} - p\binom{r-s-1}{s-2} + \binom{p}{2}\binom{r-s-3}{s-4} - \binom{p}{3}\binom{r-s-5}{s-6} + \dots,$$

en s'arrêtant au premier terme nul. Il s'ensuit, en posant

$$r = 2\mu - p + 1, \qquad s = \mu - p + 1$$

que l'indice cherché est égal à

$$\binom{\mu+1}{\mu-p+1} - p\binom{\mu-1}{\mu-p-1} + \binom{p}{2}\binom{\mu-3}{\mu-p-3} - \dots,$$

expression qui (comme l'on voit sans difficulté par induction complète) tant que la 1ᵉ condition (7) a lieu se réduit à 2^p. Donc: *pour toute* F^n *non spéciale l'indice du système des directrices dont l'ordre* μ *satisfait aux conditions* (8) *et* (10) *est égal à* 2^p*; en particulier ce nombre est l'indice de tous les systèmes de directrices lorsque la surface n'a pas de courbe minima exceptionnelle.*

Dans le cas où la F^n aurait au contraire une courbe minima exceptionnelle γ^m, la recherche des directrices qui ne satisfont plus à la condition (10), c. à. d. dont l'ordre est $< n + p - m$, sera faite plus loin, après que nous aurons un peu examiné les surfaces réglées spéciales.

---

[16] « *Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche* » (Rend. Palermo, III, n⁰ 4). — La démonstration ingénieuse, que ce géomètre y donne de cette importante formule, pourrait laisser sur sa validité absolue des doutes, qui se réfléchiraient sur le n⁰ présent et plus loin sur les nᵒˢ 20 et 21 de ces Recherches : cependant les confirmations qu'on trouve de ces résultats me portent à penser qu'ils sont absolument vrais.

Mais dès à présent remarquons à propos des derniers n^{os} du présent paragraphe que bien qu'il nous ait convenu d'y poser pour μ les conditions (7), leurs résultats sont vrais même si celles-ci ne sont pas satisfaites. Car on peut considérer les directrices γ^{μ} d'une F^n non spéciale comme projections de celles $\gamma^{\mu+l}$ d'une F^{n+l} non spéciale qui passent par les l points de celle-ci par lesquels on la projette; et si les conditions (8) et (10) ont lieu pour la F^n et les γ^{μ}, leurs analogues auront évidemment lieu pour la F^{n+l} et les $\gamma^{\mu+l}$, pour lesquelles on pourra en outre, en prenant l assez grand, rendre satisfaites les analogues de (7). En appliquant alors à ces nouvelles courbes les dernières propositions, on en tire que celles-ci ont lieu aussi pour les γ^{μ} de la F^n.

Surfaces réglées spéciales.

14. Nous bornerons notre recherche sur ces surfaces réglées aux F^n, dont les sections linéaires d'ordre n ne sont pas spéciales, et qui par suite ne peuvent appartenir à des espaces de plus que $n-p+1$ dimensions (de cette sorte sont celles pour lesquelles $n > 2p-2$).

En commençant justement par une F^n qui appartienne à S_{n-p+1}, les sections faites sur elle par deux S_{n-p} seront en général deux courbes d'ordre n et genre p, non spéciales par hypothèse, et appartenant respectivement à ces S_{n-p}, c. à. d. normales. Ces courbes sont mises par les génératrices de la surface en correspondance uniforme telle que les n points où elles sont rencontrées par l'S_{n-p-1} commun à leurs espaces se correspondent chacun à soi-même: cette correspondance sera donc projective (I., n^0 6), et la collinéation qu'elle détermine entre les deux S_{n-p}, ayant n points doubles sur l'S_{n-p-1} nommé, aura, si $n > (n-p-1)+1$, c. à. d. si $p > 0$, tous les points de ce dernier espace pour points doubles et sera par suite une perspective centrale. Par suite les génératrices de la F^n passeront toutes par un même point (le centre de perspective), et cette surface sera un cône. Ainsi:

Les surfaces réglées de genre $p > 0$ *et ordre* n *qui appartiennent à* S_{n-p+1} *sont toujours des cônes, lorsque leurs sections linéaires d'ordre* n *ne sont pas spéciales et en particulier lorsque* $n > 2p-2$ [17].

[17] Cette proposition a été prouvée pour la première fois, d'une autre façon, au n^0 2 des *Ricerche sulle rigate ellittiche* déjà citées [V. a p. 58 di questo volume (N. d. R.)].

15. En général désignons par F une surface réglée (non conique) de genre $p > 0$ et d'ordre n appartenant à $S_{n-p-i+1}$ où $0 < i \leq p-1$: une surface réglée spéciale (à sections linéaires non spéciales) rentre toujours dans cette classe lorsqu'elle est normale (v. n⁰ 3). Par un groupe de $i+1$ génératrices quelconques de F on peut toujours mener un S_{n-p-i}, si $2(i+1)-1 \leq n-p-i$, c. à. d. si

$$(1) \qquad n \geq p + 3i + 1 ;$$

cet espace coupera encore F suivant une courbe directrice d'ordre $n-i-1$. Si l'on suppose qu'elle soit irréductible, et par suite de genre p, elle ne sera pas spéciale si son ordre $n-i-1 \geq 2p-1$, c. à. d. si

$$(2) \qquad n \geq 2p + i ;$$

il s'ensuit qu'elle se trouvera alors dans un $S_{n-p-i-1}$. Mais dans ce cas les S_{n-p-i} qui passent par cet espace couperaient encore F suivant une série linéaire simplement infinie de groupes de $i+1$ génératrices, parmi lesquels il y aurait le groupe dont nous sommes partis et qui était tout-à-fait arbitraire. Or, puisque $i+1 \leq p$, cela est impossible à cause du théorème de Riemann (v. I., n⁰. 2). Donc dans les hypothèses (1) et (2) chaque S_{n-p-i} passant par $i+1$ génératrices quelconques de F rencontrera encore cette surface suivant une courbe qui ne pourra pas être irréductible, mais au contraire se décomposera en un certain nombre (≥ 0) de génératrices et une directrice simple ou multiple γ^m appartenant à un S_h, où

$$(3) \qquad h > m - p ,$$

puisque autrement la courbe totale d'ordre $n-i-1$ se trouverait dans un $S_{n-p-i-1}$, ce qu'on a reconnu pour impossible. Si cette γ^m est multiple, elle ne pourra pas changer en changeant l'S_{n-p-i} qu'on avait mené par un groupe de $i+1$ génératrices, ni même en changeant ce groupe; car F ne peut avoir une infinité de courbes multiples. Si au contraire la γ^m est une directrice simple, comme à cause de (3) elle est spéciale et par suite d'ordre $m \leq 2p-2$, elle ne peut changer que lorsque l'ordre de la surface réglée serait $\leq 4p-4$ [18]. En supposant qu'un tel changement n'arrive pas, on prouve facilement qu'on aura $h \leq i$. En effet alors l'espace (de di-

---

[18] Et dans ce cas seulement si une autre particularité se présente. En effet chaque S_{n-p-i} passant par un groupe de $i+1$ génératrices doit encore contenir au moins $(n-2p-i+1)$ autres génératrices; si celles-ci ne restent pas

mension $\leq 2i+1$) qui joint chaque groupe de $i+1$ génératrices devra contenir la γ^m, c'est-à-dire son S_h. Si donc l'on supposait $h > i$, on pourrait, après avoir choisi $2i+1-h$ génératrices de telle façon qu'elles déterminent parfaitement avec l'S_h un S_{2i+1}, prendre encore tout-à-fait arbitrairement d'autres $h-i$ génératrices qui, formant avec celles-là un groupe de $i+1$, devraient déterminer avec elles un espace passant par l'S_h, et comme cet espace ne pourrait être autre que l'S_{2i+1} nommé, dans celui-ci devraient se trouver les $h-i$ génératrices arbitraires, c. à. d. toute la surface réglée, ce qui est contraire aux hypothèses. Ainsi l'on aura réellement

$$h \leq i. \tag{4}$$

16. Ce dernier résultat peut d'ailleurs être tiré du n⁰ 8 si, outre les conditions (1) et (2), nous posons

$$n \geq m + 2p - 1, \tag{5}$$

ou bien si, outre la condition (1), nous posons, au lieu de la (2), la suivante qui l'embrasse

$$n \geq 2p + i + h. \tag{2'}$$

Non seulement alors le n⁰ cité nous donne la relation (4), mais encore la suivante

$$m \geq 2h. \tag{6}$$

D'un autre côté et sous les mêmes conditions le n⁰ 7 nous donne aussi

$$m \leq h + i. \tag{7}$$

---

toutes fixes lorsque l'S_{n-p-i} change, c. à. d. ne se trouvent pas sur l'espace joignant les $i+1$ premières génératrices, il est clair que pour un S_{n-p-i} passant par cet espace la condition de contenir une génératrice arbitrairement donnée sera une condition *simple* (et non *double*) et que par suite toutes les génératrices rencontreront l'espace nommé joignant les $i+1$ génératrices, c. à. d. que cet espace contiendra la γ^m. Et celle-ci ne changera pas en changeant une de ces $i+1$ génératrices (et par suite en les changeant toutes) si F n'appartient pas à l'espace qui joint $i+2$ génératrices, et par suite si

$$n - p - i + 1 > 2i + 3,$$

ou

$$n \geq p + 3i + 3. \tag{1'}$$

Donc, sous les conditions (1') et (2), la γ^m nommée ci-dessus est toujours unique, pourvu que la surface réglée ne présente pas cette particularité que chaque espace joignant $i+1$ de ses génératrices en contienne encore au moins $n-2p-i+1$ autres : ce qui semble pouvoir être exclu facilement par la construction d'un espace convenable qui viendrait à contenir plus de n génératrices.

Si nous posons la condition

(8) $$n \geq 4p - 2 ,$$

on voit que, comme $i \leq p - 1$, les (1) et (2) seront satisfaites, et puis aussi, à cause de (4), la (2′); la (8) suffit donc pour entraîner (3), (4), (6) et (7). En l'adoptant *au seul but de simplifier les énonciations,* nous avons la proposition suivante:

Toute surface réglée spéciale de genre p *et ordre* $\mathrm{n} \geq 4\mathrm{p} - 2$ *a une courbe directrice spéciale* (cfr. n⁰ 10). *Si la surface appartient à* $\mathrm{S}_{\mathrm{n-p-i+1}}$, *où* $0 < \mathrm{i} \leq \mathrm{p} - 1$, *cette directrice appartient à un espace de dimension* $\mathrm{h} \leq \mathrm{i}$ *et a l'ordre* m *tel que* $2\mathrm{h} \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{h} + \mathrm{i}$.

17. La remarque faite à la fin du n⁰ 8 nous donne en outre ce résultat particulier: *Si dans la proposition précédente on a précisément* $\mathrm{m} = 2\mathrm{h}$, — *et c'est ce qui arrivera toujours lorsque l'on aura* $\mathrm{h} = \mathrm{i}$, — *la surface réglée sera nécéssairement hyperelliptique, ayant pour directrice double une courbe rationnelle normale d'ordre* h; *il faut seulement excepter le cas où* $\mathrm{h} = \mathrm{i} = \mathrm{p} - 1$, *car alors la surface peut au contraire avoir pour directrice simple une courbe normale de genre* p *et d'ordre* $2\mathrm{p} - 2$.

L'existence sur la F^n de la g^h_m considérée au n⁰ 8 montre (I., n⁰ 2) que *si la surface réglée a des modules généraux, on aura*

(9) $$p - (h + 1)(p + h - m) \geq 0 .$$

De cette relation et de la (7) on tire

$$p - (h + 1)(p - i) \geq 0 ,$$

c. à. d.

(10) $$h(p - i) \leq i ,$$

qui embrasse la (4). Comme $h \geq 1$, la dernière relation prouve que *lorsque* $2\mathrm{i} < \mathrm{p}$ *les modules de la surface ne sont pas généraux.* De même (si $h \geq 2$, c. à. d.) *si la surface n'a pas de droite directrice et si* $3\mathrm{i} < 2\mathrm{p}$ *ses modules ne seront pas généraux.* Etc.

18. En appliquant tous ces résultats aux cas de $i = 1, 2, 3$ et par suite $p > 1, 2, 3$ resp., nous aurons comme exemples, *en posant encore pour simplicité* $n \geq 4p - 2$, (et en excluant encore les cônes) les propositions suivantes (qu'il convient de considérer comme faisant suite à celle du n⁰ 14):

Chaque F^{n} *de genre* $\mathrm{p} > 1$ *appartenant à* $\mathrm{S}_{\mathrm{n-p}}$ *a une droite double pour directrice.*

Chaque F^n *de genre* $p > 2$ *appartenant à* S_{n-p-1} *a pour directrice une droite double ou triple, ou bien une conique double, ou enfin (dans le cas où* $p = 3$) *une courbe plane simple du* 4e *ordre.*

Chaque F^n *de genre* $p > 3$ *appartenant à* S_{n-p-2} *a pour directrice une droite double, triple ou quadruple, ou bien une conique double, ou bien une courbe plane simple du* 5e *ordre (et genre* 4, 5 *ou* 6), *ou bien une cubique gauche double, ou enfin une courbe gauche simple du* 6e *ordre et de genre* 4.

Remarquons enfin, comme conséquence de la dernière proposition du n⁰ 9, que (du moins lorsque n est assez grand pour satisfaire à la condition (5) de ce n⁰-là): *les* F^n *spéciales où* $m < h + i$ *ne sont pas normales; pour les* F^n *spéciales normales on a toujours* $m = h + i$. Par exemple *les* F^n *ayant une courbe rationnelle d'ordre* $h < p$ *pour directrice double ont* (du moins lorsque $n \geq 4h + 2p - 1$) *pour espace normal* $S_{n-p-h+1}$.

Cônes et autres surfaces réglées particulières.

19. Occupons-nous maintenant des courbes *directrices* d'un cône non spécial de genre p et d'ordre ν, c. à. d. des courbes qui en dehors du centre du cône ne rencontrent chaque génératrice qu'en un seul point. Rappelons que dans la Pe I (nos 11 et 12) nous avons prouvé que les directrices d'ordre ν forment une série de dimension $\nu - p + 1$ et linéaire, c. à. d. d'indice 1, et que celles d'ordre $\nu + 1$ forment un système de dimension $\nu - p + 3$ et dont l'indice, lorsque $p = 0, 1, 2,$ est $p + 1$; nous posions alors la question si cet indice valait $p + 1$ pour toutes les valeurs de p. Nous commencerons par établir qu'il en est réellement ainsi.

Dans ce but considérons une courbe normale non spéciale C_p^ν et sur elle une série linéaire ∞^1 de groupes de k points appartenant à des S_r, dans laquelle les seules *dégénérations* soient dans un certain nombre y de groupes où deux (seulement) des k points coïncident entre eux. Les S_{t-1} $(t \leq r)$ qui joignent t à t les points d'un groupe forment une variété V_t dont l'ordre x_{t-1} résulte d'une série de relations que M. Schubert a déduites du principe de correspondance ordinaire (19); on trouve

$$x_{t-1} = \binom{k-1}{t-1}\nu - \frac{1}{2}\binom{k-2}{t-2}y\,.$$

(19) On les trouve dans ma Note « *Sulle varietà algebriche* etc. » déjà citée.

En particulier, si $t = k - 1$, on aura

$$x_{k-2} = (k - 1)\nu - \frac{1}{2}(k - 2)y.$$

Quant à la valeur de y, on l'obtient du principe de correspondance de M. ZEUTHEN appliqué à la C_p^ν et à la ∞^1 de groupes de k points, et en la substituant on aura

$$x_{k-2} = (k - 1)\nu - (k - 2)(p + k - 1).$$

Que l'on mette cette série ∞^1 en correspondance uniforme avec la série des points d'une droite **a** qui ne rencontre pas l'$S_{\nu-p}$ de la C_p^ν: les droites joignant les points correspondants de cette courbe et de cette droite formeront une surface réglée appartenant à un $S_{\nu-p+2}$, ayant **a** pour directrice multiple suivant k et dont le genre sera p et l'ordre $\nu + k$. Il est facile de déterminer les directrices (non spéciales) d'ordre $\nu + 1$ de cette surface. Elles se trouveront dans les $S_{\nu-p+1}$ qui contiennent $k - 1$ génératrices, c. à. d. qui contiennent un des ∞^1 S_{k-1} qui joignent un point de **a** à l'un des S_{k-2} contenant $k - 1$ des k points du groupe de la C^ν qui correspond au point de **a**. Or ces ∞^1 S_{k-1} forment une variété V_k qui est engendrée par la droite **a** en correspondance $(1, k)$ avec la V_{k-1} formée par les S_{k-2} nommés: cette V_k sera donc d'ordre $x_{k-2} + k$. Et comme elle a évidemment chaque point de notre surface réglée pour multiple suivant $k - 1$, il suit que l'$S_{\nu-p-k+2}$ joignant $(\nu - p - k + 3)$ points indépendants de cette surface rencontrera ailleurs seulement

$$x_{k-2} + k - (k - 1)(\nu - p - k + 3) = p + 1$$

des S_{k-1} de la V_k et que les points nommés se trouveront par suite sur autant de directrices d'ordre $\nu + 1$ de la surface.

Maintenant si l'on projette cette surface réglée par un point de la directrice **a** sur un $S_{\nu-p+1}$ mené par la C_p^ν, on obtiendra un cône non spécial de genre p et ordre ν; et il est même évident que tout cône de cette nature peut être obtenu ainsi comme projection d'une $F^{\nu+k}$ ayant la droite **a** pour directrice k-ple, car sur une C_p^ν on peut (I., n⁰ 17) déterminer une série linéaire de groupes de points satisfaisant aux conditions dites (du moins pour ν assez grand, mais cette restriction n'est pas essentielle dans les questions qui nous occupent [20]). Les $\gamma^{\nu+1}$ de cette surface qui passent par

[20] Il suffit, pour s'en apercevoir, de remarquer que le cône non spécial d'ordre ν peut tre considéré comme projection de celui d'ordre $\nu'(>\nu)$, quelque grand que soit ν'.

$\nu - p - k + 3$ quelconques de ses points se projettent alors suivant les $\gamma^{\nu+1}$ du cône qui passent par les projections de ces points et par les traces des k génératrices de la $F^{\nu+k}$ sortant du centre de projection. Donc nous concluons que réellement: *dans tout cône non spécial de genre* p *et ordre* ν *les directrices d'ordre* $\nu + 1$ *qui passent par* $\nu - \mathrm{p} + 3$ *points sont en nombre de* $\mathrm{p} + 1$.

20. L'artifice par lequel nous sommes arrivés à ce résultat pourra certes être généralisé en substituant à la droite k-ple **a** une courbe d'ordre k appartenant à $S_2, S_3, \ldots$, et en obtenant ainsi pour le cône nommé les directrices d'ordre $\nu + 2, \nu + 3, \ldots$. Mais nous tâcherons de parvenir à celles-ci par une autre voie.

Soit donnée une F^n appartenant à $S_{n-p-i+1}$ et ayant pour directrice une γ^m appartenant à un S_i, mais ne contenant pas d'autres courbes qui se trouvent dans des S_i. Ses directrices d'ordre $n - i$ non spéciales se trouveront dans des S_{n-p-i}: celles qui passent par $(n - p - 2i + 1)$ points de F^n (indépendants entre eux et de l'S_i) lorsque $i = 1$ seront données par les espaces qui joignent l'S_{n-p-2i} de ces points à chacune des $p + 1$ génératrices de la surface passant par les autres $p + 1$ points de rencontre de celle-ci avec cet espace, de sorte qu'elles sont alors au nombre de $p + 1$. Si au contraire $i > 1$, les directrices nommées d'ordre $n - i$ seront projetées par le dit S_{n-p-2i} sur un S_i suivant les directrices d'ordre $p + i - 1$ de la projection F^{p+2i-1} de F^n placées sur des S_{i-1} contenant i génératrices de cette nouvelle surface. Or le nombre de ces S_{i-1} est en général fini et donné par la formule de M. Castelnuovo qui a déjà été appliquée au n^0 13; dans le cas actuel il faut remplacer dans cette formule s par i, et r par $p + 2i - 1$, de sorte qu'elle devient

$$\binom{p+i}{i} - p\binom{p+i-2}{i-2} + \binom{p}{2}\binom{p+i-4}{i-4} - \ldots,$$

expression à laquelle on peut aussi donner (comme ce même savant me fit remarquer) la forme plus simple

$$[p, i] = 1 + p + \binom{p}{2} + \binom{p}{3} + \ldots + \binom{p}{i}.$$

Donc les directrices non spéciales γ^{n-i} de F^n forment une $\infty^{n-p-2i+1}$ d'indice $[p, i]$. Si $i \geq p$ on a évidemment $[p, i] = 2^p$, et comme *dans ce cas* la F^n peut être supposée non spéciale, ce résultat s'accorde alors avec celui du n^0 13.

Soit maintenant Γ un cône d'ordre ν et genre p non spécial et normal. Par son centre menons un S_i (où $i < \nu - p$) qui ne rencontre l'$S_{\nu-p+1}$ du cône qu'en ce point et traçons-y une courbe γ^m qui lui appartienne et qui soit mise en correspondance uniforme avec la C^ν de section de Γ avec un $S_{\nu-p}$. Ces deux courbes engendreront une surface réglée F^n, où

$$n = \nu + m, \tag{1}$$

qui appartiendra à un $S_{n-p-i+1}$ si l'on a

$$n - p - i + 1 = i + \nu - p + 1,$$

c'est-à-dire

$$n = \nu + 2i. \tag{2}$$

Cette surface sera dans les conditions du résultat précédent et par suite ses directrices non spéciales d'ordre

$$\mu = n - i \tag{3}$$

passant par $n - p - 2i + 1$ de ses points seront en nombre de $[p, i]$. Et comme la F^n est projetée sur l'$S_{\nu-p+1}$ par un S_{i-1} quelconque de l'S_i justement suivant le cône Γ, ces courbes γ^μ se projetteront suivant les directrices γ^μ de Γ qui passent par les projections des points nommés et par les traces des m génératrices de la F^n rencontrées par l'S_{i-1}, c'est-à-dire par $(n - p + m - 2i + 1)$ points. Or des relations (1), (2), (3) on tire

$$i = \mu - \nu \tag{4}$$

$$m = 2i, \tag{5}$$

qui servent à déterminer successivement i et m lorsque les nombres ν et μ sont donnés. On en conclut que

$$n - p + m - 2i + 1 = 2\mu - \nu - p + 1,$$

et on a comme résultat de notre recherche:

Sur tout cône de genre p *et ordre* ν *non spécial il y a une infinité de directrices d'ordre* $\mu \geq \nu$ *telle que par* $(2\mu - \nu - \mathrm{p} + 1)$ *points quelconques du cône il en passe en général*

$$1 + p + \binom{p}{2} + \binom{p}{3} + \cdots + \binom{p}{\mu - \nu},$$

nombre qui atteint son maximum 2^{p} *lorsque* $\mu \geq \nu + \mathrm{p}$.

On peut cependant faire une objection à notre raisonnement, en remarquant la relation (5) relative à la γ^m que nous avons construite appartenant à un S_i. Tant que i, c'est-à-dire $\mu - \nu$, est $\geq p - 1$ une telle courbe peut être construite avec des modules quelconques; mais dans les autres cas, c. à. d. pour $\mu - \nu < p - 1$, cette courbe doit nécéssairement (cfr. n⁰ 17) se composer d'une courbe rationnelle normale d'ordre i comptée deux fois, de sorte que pour qu'on puisse la mettre en correspondance uniforme avec la section C^ν de Γ il faut et il suffit que ce cône soit hyperelliptique. Ainsi le théorème qui précède ne serait établi, lorsque $\mu - \nu < p - 1$, que pour les cônes hyperelliptiques. Mais on voit bien que les nombres qu'il détermine ne peuvent pas changer lorsque par transformations continues des modules on rend hyperelliptique le cône; d'ailleurs du fait que les directrices d'ordre μ du cône pour μ assez grand sont $\infty^{2\mu-\nu-p+1}$ on voit qu'il en est encore ainsi lorsque μ s'abaisse par un raisonnement identique à celui du n⁰ 12, et qui reste confirmé pour les derniers cas de $\mu = \nu$ et $\mu = \nu + 1$ par les résultats rappelés ou établis au n⁰ précédent (qui d'un autre côté confirment aussi que l'indice trouvé pour les systèmes nommés ne dépend pas de l'hyperellipticité du cône). — On pourrait aussi remarquer que nous avons supposé dans notre construction $i < \nu - p$, c'est-à-dire, à cause de (4): $\mu < 2\nu - p$. Mais lorsque cette condition n'est pas satisfaite il suffit de réduire comme à la fin du n⁰ 13 la recherche des γ^μ du cône d'ordre ν à celle des $\gamma^{\mu+l}$ du cône d'ordre $\nu + l$ pour l assez grand; on voit ainsi que notre théorème reste toujours vrai.

21. De même que par la considération des surfaces réglées non coniques nous sommes parvenus aux courbes directrices des cônes, de même nous pouvons inversement de celles-ci remonter aux courbes directrices des surfaces réglées non coniques, en obtenant ainsi des résultats plus généraux que les précédents.

Supposons que l'on cherche les courbes directrices d'une F^n normale non spéciale ayant pour courbe minima une C^m où

$$m \leq n - 2p + 1 .$$

Cette courbe appartiendra à un S_{m-p} (v. la fin du n⁰ 10). En projetant la surface par un S_{m-p-1} contenu dans cet espace on aura un cône Γ d'ordre $n - m$ appartenant à $S_{n-m-p+1}$ et non spécial (puisque son ordre est $\geq 2p - 1$). Les directrices γ^μ de la F^n se projetteront suivant les directrices γ^μ de ce cône qui passent par m points déterminés de celui-ci. Donc la proposition du n⁰ précédent nous donne la suivante ([21]) :

Sur une surface réglée non spéciale de genre p *et ordre* n *ayant pour directrice minima une courbe d'ordre* m, *les directrices d'ordre* μ *forment en général un système tel que par* $(2\mu - \mathrm{n} - \mathrm{p} + 1)$ *points il en passe*

$$1 + p + \binom{p}{2} + \binom{p}{3} + \dots + \binom{p}{\mu + m - n},$$

bien entendu pourvu que $\mu \geq \mathrm{n} - \mathrm{m}$ *et* $2\mu \geq \mathrm{n} + \mathrm{p} - 1$.

Si $\mu \geq n + p - m$ on retrouve ainsi le résultat des n^os 11-13. On voit que l'indice du système, qui est alors 2^p, se réduit d'une unité en descendant à $\mu = n + p - m - 1$ (ce qui est d'accord avec la note ([14]) au n⁰ 12, et puis encore de p unités, de $\binom{p}{2}$, etc., en descendant successivement aux valeurs inférieures de μ. (Ces abaissements sont alors produits par ∞ courbes directrices d'ordre μ passant par les $(2\mu - n - p + 1)$ points et qui *dégénèrent* en la courbe minima d'ordre m et $\mu - m$ génératrices).

Les deux inégalités auxquelles doit satisfaire μ pour l'existence de courbes directrices d'ordre μ se réduisent à

$$2\mu \geq n + p - 1$$

si l'on a

$$n + p - 1 \geq 2(n - m),$$

c'est-à-dire

$$2m \geq n - p + 1,$$

tandis qu'au contraire elles se réduisent à

$$\mu \geq n - m$$

si

$$2m \leq n - p + 1.$$

Donc : *Lorsque l'ordre* m *de la courbe minima est tel que* $2\mathrm{m} \geq \mathrm{n} - \mathrm{p} + 1$, *pour les autres courbes directrices l'ordre* μ *est en général tel que* $2\mu \geq \mathrm{n} + \mathrm{p} - 1$ *et a par suite pour valeur minima* $(\mathrm{n} + \mathrm{p} - 1)/2$ *ou bien* $(\mathrm{n} + \mathrm{p})/2$. *Si au contraire on a* $2\mathrm{m} \leq \mathrm{n} - \mathrm{p} + 1$, *la surface contient, en dehors de la courbe minima, des directrices de*

([21]) Ici encore on aurait une restriction causée par l'hypothèse $m \leq n - 2p + 1$; mais on la ôte en considérant (n⁰ 6) la F^n comme projection d'une F^{n+l} contenant encore une C^m et en déduisant ainsi les γ^μ de la F^n des $\gamma^{\mu+l}$ (passant par l points fixes) de la nouvelle surface, à laquelle pour l assez grand notre démonstration devient applicable.

tous les ordres à partir de celles d'ordre n — m *qui forment une série linéaire* $\infty^{n-2m-p+1}$ (22).

On peut construire des F^n qui outre la *particularité* de contenir une γ^m, où $n-p+1 \leq 2m < n+p-1$, présentent celle de contenir une courbe d'ordre plus bas que $(n+p-1)/2$, et ainsi de suite. Dans ces cas particuliers les propositions précédentes devraient être modifiées. Mais nous ne nous occuperons pas de cela, et nous nous bornerons à ajouter que les méthodes qui ont servi dans les recherches qui précèdent peuvent aussi être employées avec succès pour ces cas et seront de même utiles pour la recherche des directrices des surfaces réglées spéciales (recherche qui n'a été faite ici que dans des cas particuliers) et pour celle des courbes tracées sur chaque surface réglée de façon à en rencontrer plusieurs fois les génératrices (23).

Turin, Janvier 1889.

---

(22) Comme si la F^n était *générale* on devrait avoir $2m \geq n+p-1$, et comme pour l'existence d'une directrice d'ordre $n-m$ on doit *en général* avoir $2m \leq n-p+1$, en comparant ces deux conditions on en tire que seulement pour $p=0$ et lorsque $p=1$ et n est pair, une F^n peut être engendrée par deux courbes en correspondance uniforme *sans points communs dont chacun se corresponde à soi-même*; pour $p>1$ de telles surfaces sont *particulières*. — Je crois inutile de reproduire ici quelques résultats obtenus sur ces surfaces, car on les établit sans aucune difficulté. Seulement comme exemples on remarquera que des n^os^ 6 et 7 de la 1^e^ P^e^ on tire que: *La surface* F^{2m} *engendrée par deux courbes non spéciales d'ordre* m *n'a d'autres courbes de cet ordre que lorsque la correspondance entre celles-là est singulière et dans ce cas elle en a une* ∞^1 *linéaire. La* F^{4p-4} *engendrée par deux courbes spéciales d'ordre* $2p-2$ *contient une* ∞^1 *linéaire de courbes de cet ordre.*

(23) Dans ces recherches on pourra probablement employer aussi quelques remarques, contenues au n° 5 de ma Note *Intorno alla geometria su una rigata algebrica* déjà citée, relativement aux correspondances uniformes entre les points de deux surfaces réglées telles que les génératrices se correspondent entre elles et en particulier aux transformations uniformes d'une surface réglée en elle-même. Il semble que celles-ci pourront servir à tirer des résultats sur les courbes qui rencontrent deux fois les génératrices de ceux relatifs aux directrices.