Corrado Segre

Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani

Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **21** (1885-86), p. 95–115

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. 17–35

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_1_17>

II.

SULLE VARIETÀ NORMALI A TRE DIMENSIONI COMPOSTE DI SERIE SEMPLICI RAZIONALI DI PIANI

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino »,
vol. XXI, 1885-86, pp. 95-115.

Nel presente lavoro, proseguendo le mie ricerche di geometria ad n dimensioni e specialmente quelle contenute nella mia Nota *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (1), mi occupo delle $S_2 - F_3^n$ di S_{n+2} (2). Le rigate razionali normali, queste varietà, e più in generale le $S_i - F_{i+1}^n$ di S_{n+i} erano già comparse nel mio lavoro sui fasci di coni quadrici in uno spazio qualunque (3) come

(1) Atti di questa R. Acc., vol. XIX, [p. 355]. — Nel citare i n[i] di quella Nota li farò precedere dalla indicazione *R.*

(2) In generale con $S_i - F_{i+1}^n$ s'intende una varietà d'ordine n ad $i+1$ dimensioni composta di $\infty^1 S_i$. E dicendo che una varietà qualunque (anche se composta) *appartiene* ad uno spazio (lineare), intendo che non solo vi è contenuta, ma che non sta in uno spazio a minor numero di dimensioni. Le F_{i+1}^n non possono appartenere ad uno spazio di più che $n+i$ dimensioni (per un noto teorema che il CLIFFORD dimostrò per $i=0$ e che il sig. VERONESE estese ad i qualunque); quelle $S_i - F_{i+1}^n$ che appartengono ad un S_{n+i} si diranno *normali*: da esse si ottengono tutte le altre serie semplici razionali di S_i mediante proiezioni. Supporrò sempre che non siano coni, perchè se fossero tali il loro studio si ridurrebbe a quello di varietà della stessa specie e non coniche, a minor numero di dimensioni.

(3) Atti di quest'Acc., vol. XIX, [p. 878]. — Il sig. DEL PEZZO in una recente Nota *Sulle superficie di ordine* n *immerse nello spazio di* n + 1 *dimensioni* (Rend. Acc. Napoli, settembre 1885), ha dimostrato che le sole superficie F_2^n *immerse* in S_{n+1} (o, come io dico, *appartenenti* a questo spazio) sono appunto rigate razionali normali, fatta eccezione per una F_2^4 di S_5, che fu studiata successivamente dal sig. VERONESE (Mem. Acc. Lincei, 1884) e da me (in un lavoro *Sulla geometria delle coniche,* nel vol. XX di questi *Atti*). Orbene da quella proposizione si trae senza difficoltà, che *le* F_{i+1}^n *appartenenti ad* S_{n+i} *sono appunto* [*per* $n > 2$] *le nostre* $S_i - F_{i+1}^n$, *fatta solo eccezione pel caso di* $n=4$, *in cui esiste inoltre in* S_{i+4} *una* F_{i+1}^4 *che non è di questa categoria, essendo un cono avente per sostegno un* S_{i-2} *e per sezione con ogni* S_5 *una* F_2^4 *della specie suddetta.*

luoghi dei sostegni di un fascio di tali coni; ed ivi avevo enunciato senza dimostrazione che tutte le varietà nominate non possono presentare altre particolarità (invarianti assoluti) che i numeri indicanti gli ordini minimi delle loro curve direttrici. Qui se ne vedrà la dimostrazione (già data per le rigate, cioè per $i = 1$) pel caso di $i = 2$; essa si estenderebbe immediatamente ad i qualunque. E delle varietà che ci occuperanno si vedranno anche varie altre proprietà, relative sopratutto alla geometria su di esse, le quali possono servire di fondamento per una trattazione completa [4]. In ultimo ne darò una serie di rappresentazioni sullo spazio ordinario, dalle quali si deduce una serie notevole assai estesa di trasformazioni univoche dello spazio ordinario, in cui i due sistemi omaloidici si compongono di rigate d'ordine qualunque.

Sebbene le ricerche che qui esporrò procedano parallelamente a quelle citate sulle rigate razionali, pure esse mi presentarono difficoltà di nuova specie, che mi persuasero dell'utilità di pubblicare questa Nota. Però rispetto alle $S_i - F_{i+1}^n$ di S_{n+i} i ragionamenti qui fatti pel caso di $i = 2$ si estenderanno facilmente ad i qualunque, e l'analogia permetterà di prevederne senz'altro i risultati, sicchè non le farò più oggetto di un nuovo lavoro.

I.

Generalità sulle $S_2 - F_3^n$ di S_{n+2}.

1. Sia **F** una tale varietà appartenente ad S_{n+2} e che supporremo sempre non composta di altre. Essa sarà tagliata da ogni S_{n+1} (di S_{n+2}) in una rigata d'ordine n semplice in generale, ma che potrà anche scindersi; tale rigata apparterrà però sempre all'S_{n+1}, giacchè, se stesse in un S_n, per questo ed un punto di **F** posto fuori di esso passerebbe un S_{n+1} che taglierebbe questa varietà in una superficie composta d'ordine complessivo $> n$, e quindi

(4) Credo bene avvertire, che in questo, come nella maggior parte dei miei precedenti lavori di geometria a più dimensioni, non è mai una trattazione completa dell'argomento che ho avuto di mira, ma bensì il dare soltanto quelle proposizioni fondamentali, dalle quali una tal trattazione si può poi dedurre senza gravi difficoltà. E penso che per ora in questo campo vastissimo e quasi inesplorato della geometria proiettiva a più dimensioni sia bene far così per potere più presto acquistare una qualche conoscenza dei vari enti che vi sono da studiare e delle questioni che vi sono da risolvere.

la conterrebbe, contro l'ipotesi. Quindi, siccome le generatrici di una rigata d'ordine n appartenente ad un S_{n+1} formano una serie razionale (R. n⁰ 1), così *i piani generatori di* **F** *formano una serie razionale.*

È chiaro che, essendo ogni piano di **F** incontrato da un S_{n+1} in una retta e da un S_n almeno in un punto, un S_{n+1} qualunque dovrà sempre contenere di **F** una rigata semplice (5) e non esclusivamente dei piani generatori; ed un S_n qualunque dovrà sempre contenere una curva semplice o una rigata semplice, e non esclusivamente dei piani generatori o delle rette di questi. Si noti però che uno spazio qualunque non può contenere due distinte rigate ovvero una rigata ed una curva non posta su questa, altrimenti **F** si decomporrebbe, e per la stessa ragione se uno spazio contiene di **F** due distinte curve, contiene anche una rigata passante per queste.

2. Estendendo il ragionamento fatto dianzi si prova che *ogni rigata* F_2^m *di ordine* $m \leq n$ *situata su* **F** *è una rigata razionale normale, cioè appartiene ad un* S_{m+1}; in fatti se stesse in un S_m, per questo ed $(n + 1 - m)$ punti di **F** posti fuori di esso su altrettanti piani generatori passerebbe un S_{n+1} contenente anche questi piani e contenente perciò una rigata composta d'ordine $> n$. — Questo ragionamento vale anche se la F_2^m si scinde, cioè essa apparterrà sempre ad un S_{m+1}; purchè però comprenda sempre una rigata direttrice, vale a dire non si scinda tutta in piani generatori. Vedremo più tardi a quale spazio appartenga un dato gruppo di piani generatori (v. n⁰ 11).

3. *Ogni curva* C^μ *d'ordine* $\mu \leq n$, *situata su* **F** *e su uno spazio che non contenga nello stesso tempo una rigata di questa varietà, è una curva razionale normale, cioè appartiene ad un* S_μ. Invero un S_{n+1} qualunque passante per quella curva conterrà una rigata semplice passante pure per questa e d'ordine $\geq \mu$, perchè tagliata secondo una C^μ da uno spazio che non la contiene: quindi per una proprietà delle rigate razionali normali (R. n⁰ 2) la C^μ apparterrà ad un S_μ. Ciò vale anche quando la C^μ si scinde, purchè non si scinda tutta in rette generatrici.

(5) Si avverta che parlando di curve e rigate semplici sottintendo sempre *direttrici*, cioè incontrate da tutti i piani generatori; quindi p. e. escludo sempre dalle curve che considero quelle segnate su un piano generatore. Inoltre dicendo *curve, rigate, piani,* ecc. sottintenderò spesso *di* **F**.

Una curva semplice C^μ soddisfaciente alle condizioni dette corrisponde coi suoi punti univocamente ai piani generatori, giacchè se ognuno di questi piani la incontrasse in più di un punto taglierebbe l'S_μ a cui la curva appartiene in una retta, il cui luogo sarebbe una rigata dell'S_μ.

4. Un S_{n+1} condotto per un piano generatore incontra ancora **F** in una rigata F_2^{n-1} (semplice o composta) di un S_n; ogni S_{n+1} passante per questo incontra ulteriormente **F** in un piano generatore e viceversa ogni tal piano sta con quell'S_n in un S_{n+1}: vi è così una corrispondenza proiettiva tra la serie dei piani generatori e il fascio degli S_{n+1} passanti per quell'S_n. Considerando n tali fasci di S_{n+1} essi saranno proiettivi e genereranno **F** come luogo dei piani d'intersezione degli S_{n+1} corrispondenti. Viceversa n fasci proiettivi di S_{n+1} generano evidentemente in generale una $S_2 - F_3^n$ appartenente ad S_{n+2}. — Questa generazione è analoga a quella della C^n normale di S_n e della rigata normale F_2^n di S_{n+1} mediante n fasci proiettivi risp. di S_{n-1} e di S_n (6).

5. Vi è un'altra generazione di **F**, più importante per certe questioni che incontreremo, e analoga a quella della rigata normale F_2^n di S_{n+1} mediante due curve normali punteggiate univocamente. Tre curve razionali normali punteggiate proiettivamente generano in fatti coi piani congiungenti i punti corrispondenti una varietà, il cui ordine è in generale la somma degli ordini di quelle curve e che appartiene alla specie delle varietà che andiamo studiando se gli spazi in cui stanno le curve date sono *indipendenti* (7). Così pure (il che si può anche considerare come conseguenza di ciò) una curva razionale normale ed una rigata razionale normale che non la contenga e le cui generatrici corrispondano univocamente ai punti di quella, generano coi piani congiungenti elementi corrispondenti una varietà avente per ordine la somma degli ordini della curva e della rigata e appartenente alla specie che esaminiamo se queste appartengono a spazi indipendenti. — Vedremo che inversamente la varietà **F** si può sempre generare in questi modi.

(6) In generale una $S_i - F_{i+1}^n$ di S_{n+i} si può generare in infiniti modi mediante n fasci proiettivi di S_{n+i-1}. V. VERONESE: *Behandlung der proj. Verhältnisse* ecc. (Math. Ann., XIX).

(7) Più spazi (i) risp. ad $m_1, \ldots, m_i$ dimensioni sono *indipendenti* quando il loro insieme appartiene ad uno spazio di $m_1 + \ldots + m_i + i - 1$ dimensioni.

Intanto, a proposito di questa generazione, conviene che qui aggiungiamo che due curve razionali normali di **F**, i cui ordini siano $\leq n$, stanno sempre su una determinata rigata di **F** generata dalle rette congiungenti i punti in cui quelle curve sono incontrate dagli stessi piani generatori. Se le due curve appartengono a due spazi indipendenti, la rigata generata ha per ordine la somma dei loro ordini ed è normale.

II.

Loro distinzione in specie. Rigate e curve minime.

6. Un S_{n+1} condotto per $I(n+2)/3$ (cioè il numero intero contenuto in $(n+2)/3$) piani generatori di **F** potrà tagliarla ancora in altri tali piani, ma sempre la taglierà inoltre in una rigata razionale normale d'ordine $\leq n - I(n+2)/3$, cioè $\leq I(2n)/3$. Dunque *l'ordine minimo di una rigata di* **F** *non supera* $2n/3$.

Diciamo m'' quell'ordine minimo e consideriamo una rigata $F_2^{m''}$ di **F**. Essa apparterrà (n^0 2) ad un $S_{m''+1}$ e conterrà (R. n^0 3) una curva (od infinite) d'ordine $\leq I\,m''/2$ e quindi anche $\leq I\,n/3$. Adunque *l'ordine minimo di una curva razionale normale di* **F** *non supera* $n/3$.

Diciamo m' quest'ordine minimo. Sarà dunque:

$$m' \leq \frac{n}{3}, \qquad m'' \leq \frac{2n}{3}, \tag{1}$$

ed inoltre:

$$2m' \leq m''. \tag{2}$$

7. Esaminiamo meglio il numero delle curve e rigate *minime* e le loro relazioni. Anzitutto si osservi che una tal curva $C^{m'}$ ed una tal rigata $F_2^{m''}$ devono stare l'una sull'altra, tranne nel caso limite delle (1), cioè quando $m' = n/3$ (e quindi $m'' = 2n/3$); in fatti se ciò non fosse esse genererebbero (n^0 5) una varietà d'ordine $m' + m''$ al più, cioè d'ordine minore di n in causa delle (1).

Ciò posto, partendo anzitutto da una $F_2^{m''}$, vi è su questa (R. n^i 4, 5) una sola curva d'ordine m' soddisfaciente alla (2), tranne quando di questa si verifica il caso estremo $2m' = m''$, nel qual caso vi sono ∞^1 curve d'ordine m' formanti una serie lineare. Dunque *su* **F** *vi è in generale una sola curva minima* $C^{m'}$; *però se* $m'' = 2m'$ *ve ne sono* ∞^1 *poste su una rigata minima e formanti una serie lineare (escluso il caso più particolare di* $m' = n/3$).

Partiamo ora invece dalla $C^{m'}$ (o da una delle $C^{m'}$ nel caso di $m''=2m'$). Per essa, cioè pel suo $S_{m'}$, e per $I(n-m'+1)/2$ piani generatori (cioè per altrettante coppie di punti di questi) si può far passare un S_{n+1} che taglierà ancora $\mathbf{F}$, oltre che forse in altri piani, in una rigata semplice d'ordine $\leq n - I(n-m'+1)/2$, ossia $\leq I(n+m')/2$, la quale passerà per la $C^{m'}$. Su una rigata di tal ordine avente questa per curva minima vi sono (R. n^0 5) infinite curve razionali normali d'ordine $\leq I(n+m')/2 - m'$ cioè $\leq I(n-m')/2$. Quindi se per la $C^{m'}$ passassero due rigate d'ordini $\leq I(n+m')/2$, scegliendo sull'una una di quelle infinite curve, essa genererebbe coll'altra una varietà d'ordine

$$\leq I\frac{n-m'}{2} + I\frac{n+m'}{2}$$

e quindi $< n$, tranne quando $n+m'$ essendo pari quelle rigate fossero precisamente dell'ordine $(n+m')/2$. Se si eccettua tal caso (che comprende anche quello escluso da principio di $m'=n/3$), si vede che per la $C^{m'}$ passa una sola rigata d'ordine $\leq I(n+m')/2$, e questa sarà rigata minima di $\mathbf{F}$. Dunque: *vi è in generale una sola rigata minima* $\mathrm{F}_2^{\mathrm{m}''}$; *il suo ordine* m'' *soddisfa oltre alle* (1), (2) *la relazione seguente:*

$$2m'' \leq n + m'. \tag{3}$$

Però se fosse precisamente $2\mathrm{m}''=\mathrm{n}+\mathrm{m}'$ *vi sarebbe una infinità di tali rigate passanti per la curva minima* $\mathrm{C}^{\mathrm{m}'}$ (*o per ogni curva minima, nel caso più particolare di* $\mathrm{m}'=\mathrm{n}/3$); come vedremo meglio ora.

8. Abbiamo già esaminato il caso eccezionale di $m''=2m'$. Esaminiamo ora l'altro di $2m''=n+m'$, che ha comune con quello il caso di $m'=n/3$. Per la $C^{m'}$ (od una $C^{m'}$) ed $(n-m')/2$ piani generatori passa un S_n e ne passa in tal caso uno solo; poichè se per quelli passasse un S_{n-1} si potrebbe condurre per esso e per un piano generatore diverso da quelli un S_{n+1} che conterrebbe quindi almeno $(n-m')/2+1$ piani generatori e taglierebbe ancora $\mathbf{F}$ in una rigata d'ordine $<(n+m')/2$, cioè $<m''$, il che non può essere. Ciò posto, tutti gli S_{n+1} passanti per quell'S_n tagliano ancora $\mathbf{F}$ in rigate d'ordine m''; e viceversa ogni rigata d'ordine m'' passante per la $C^{m'}$ è incontrata da un S_{n+1} passante per quell'S_n e per una sua generatrice (diversa dalle $(n-m')/2$ poste sui piani generatori considerati) in una curva complessiva d'ordine $> m'+(n-m')/2$, cioè $> m''$, e quindi vi è contenuta.

Concludendo: *Nel caso eccezionale di* $2m'' = n + m'$ *per l'unica curva minima* $C^{m'}$, *o per una di esse nel caso più particolare* $m' = n/3$, *passano* ∞^1 *rigate minime* $F_2^{m''}$, *le quali si possono tutte determinare come intersezioni di* **F** *con un fascio di* S_{n+1} *e formano quindi una serie lineare sì che per ogni punto di* **F** *non posto sulla* $C^{m'}$ *ne passa una sola.*

9. Finalmente nel caso di $m' = n/3$ (e quindi $m'' = 2n/3$) le particolarità si hanno da quelle relative ai due casi eccezionali già esaminati $m'' = 2m'$ e $2m'' = n + m'$. Ma osserviamo pure che ogni rigata minima $F_2^{m''}$ sta in tal caso con m' piani generatori fissi in un S_{n+1} e in uno solo; e viceversa ogni S_{n+1} per quegli m' piani taglia **F** in una rigata minima. D'altronde quegli m' piani appartengono ad un S_{n-1} (perchè se stessero in un S_{n-2}, per questo ed un altro piano generatore passerebbe un S_{n+1} tagliante ancora F in una rigata d'ordine $< m''$) e ogni S_n passante per questo taglia **F** in una $C^{m'}$, poichè taglia la $F_2^{m''}$ di un S_{n+1} che lo contenga in m' generatrici (degli m' piani generatori). Dunque: *Quando* $m' = n/3$ *vi sono* ∞^2 *curve minime* $C^{m'}$ *ed* ∞^2 *rigate minime* $F_2^{2m'}$; *esse si possono intendere determinate su* **F** *risp. dagli* S_n *e dagli* S_{n+1} *passanti per un* S_{n-1}. *Quindi per un punto di* **F** *passa una sola curva e per due punti non posti sulla stessa curva passa una sola rigata: due curve stanno in una rigata, due rigate si tagliano in una curva; una curva ed una rigata che non la contenga non hanno punti comuni* (8).

10. Riassumendo noi vediamo che le $S_2 - F_3^n$ di S_{n+2} possono essere di varie *specie.* Ogni specie è caratterizzata da due numeri

---

(8) L'esempio più semplice di questo caso si ha (per $n = 3$) nella varietà cubica a 3 dimensioni F_3^3 di S_5. Questa interessante varietà si compone di ∞^1 piani (generatori) e contiene ∞^2 rette direttrici e ∞^2 quadriche ordinarie (di cui ciascuna ha un sistema di rette appartenente a quelle direttrici e l'altro a quei piani generatori). Essa si può intendere generata dai piani congiungenti i punti corrispondenti di 3 rette (scelte comunque tra quelle ∞^2) punteggiate proiettivamente, ovvero dalle rette congiungenti i punti corrispondenti di due piani (generatori qualunque) punteggiati proiettivamente. Per ogni suo punto passano un piano generatore ed una retta direttrice; per due suoi punti passa una quadrica, ecc. Ogni S_4 di S_5 contiene una retta direttrice; per ogni punto di S_5 passa un S_3 contenente una quadrica.

Del resto, per brevità, non starò a dare in questo lavoro altri esempi delle varietà studiate.

m', m'', che rappresentano gli ordini delle curve e rigate minime, e che devono soddisfare le condizioni (2) e (3), delle quali le (1) sono conseguenze. Vi è in generale una sola curva minima ed una sola rigata minima poste l'una sull'altra; fanno eccezione il caso in cui $m'' = 2m'$, chè allora vi sono ∞^1 curve minime sull'unica rigata minima, il caso in cui $2m'' = n + m'$, perchè allora vi sono ∞^1 rigate minime passanti per l'unica curva minima, e finalmente il caso più particolare comune ai due precedenti di $m' = n/3$ nel quale vi sono ∞^2 curve minime e ∞^2 rigate minime.

Vedremo poi che quelle varie specie esistono realmente e che le varietà di una stessa specie sono proiettivamente identiche. Avendo noi escluso il caso in cui le varietà stesse siano coni (caso che corrisponderebbe ad $m' = 0$), dovrà essere $m' \geq 1$ e quindi $m'' \geq 2$; quelle varietà non contengono dunque altri piani che i piani generatori.

III.

Loro rigate e curve razionali normali.

11. Prima di passare alla ricerca di curve e rigate contenute in **F** conviene che ci occupiamo delle relazioni tra piani di questa varietà, questione che avevamo dovuto lasciare sospesa al n⁰ 2.

Si vede facilmente che $m' + 1$ piani sono sempre indipendenti, cioè appartengono ad un $S_{3m'+2}$. Invero se stessero in un $S_{3m'+1}$, questo conterrebbe *la* (od *ogni*) $C^{m'}$, avendo su essa $m' + 1$ punti; onde se vi sono infinite curve minime, cioè $m'' = 2m'$, dovrebbe contenere una rigata $F_2^{m''}$ e quindi un insieme d'ordine almeno uguale a $3m' + 1$, il che non può essere (n⁰ 2); e se poi non si presenta quel caso, conducendo un $S_{m'+m''+1}$ per quell'$S_{3m'+1}$ e per $m'' - 2m'$ punti di una $F_2^{m''}$, esso la conterrebbe tutta (tagliando quella rigata secondo la $C^{m'}$ e $(m'+1) + (m'' - 2m') = m'' - m' + 1$ generatrici), e quindi taglierebbe **F** in una rigata composta d'ordine almeno uguale a $m' + m'' + 1$, il che è ancora impossibile (n⁰ 2). Dunque anche un numero qualunque $\mu \leq m' + 1$ di piani di **F** sono indipendenti [9].

Ma se $\mu > m' + 1$, allora μ piani sono dipendenti, poichè per la (od una) $C^{m'}$ e μ coppie di punti prese su essi passa un $S_{2\mu+m'}$

(9) In particolare due piani non possono avere un punto comune, senza che la varietà si riduca ad un cono.

che li contiene ed è $2\mu+m'<3\mu-1$. Se inoltre è $\mu\leq m''-m'+1$ si vede con un ragionamento affatto identico a quello usato or ora che pei μ piani non può passare un $S_{2\mu+m'-1}$, sicchè allora i μ piani appartengono ad un $S_{2\mu+m'}$ passante per la $C^{m'}$. Questo caso è solo possibile se $m'+1<m''-m'+1$, cioè $2m'<m''$, vale a dire finchè vi è una sola $C^{m'}$. Se poi è $\mu\geq m''-m'+1$ la (od una) $F_2^{m''}$ sta coi μ piani in un $S_{\mu+m''+1}$ ed è $\mu+m''+1\leq 2\mu+m'$; e se inoltre $\mu+m''+1\leq n+1$, cioè $\mu\leq n-m''$, non possono i μ piani stare in un $S_{\mu+m''}$, altrimenti questo dovrebbe pure contenere quella rigata (di cui contiene una curva composta d'ordine $\geq\mu+$ $+m'>m''$), ciò che non può essere (n⁰ 2); quindi in tal caso i μ piani appartengono ad un $S_{\mu+m''+1}$ passante per la $F_2^{m''}$.

Se finalmente la 2ª condizione posta non è soddisfatta, cioè se $\mu>n-m''$, allora evidentemente i μ piani appartengono solo ad S_{n+2}. Quando vi sono infinite rigate minime, cioè $2m''=n+m'$, dalla condizione $\mu\geq m''-m'+1$ segue appunto $\mu>n-m''$.

Concludendo: *un gruppo di μ piani qualunque di* **F** *può presentare i casi seguenti*: 1^0 *se* $\mu\leq \mathrm{m}'+1$ *esso si compone di piani indipendenti, cioè appartiene ad un* $\mathrm{S}_{3\mu-1}$; 2^0 *se* $\mu\geq\mathrm{m}'+1$, *ma* $\mu\leq$ $\leq\mathrm{m}''-\mathrm{m}'$, *esso appartiene ad un* $\mathrm{S}_{2\mu+\mathrm{m}'}$ *contenente la* $\mathrm{C}^{\mathrm{m}'}$ (*caso che non può presentarsi quando* $\mathrm{m}''=2\mathrm{m}'$); 3^0 *se* $\mu>\mathrm{m}''-\mathrm{m}'$, *ma* $\mu\leq\mathrm{n}-\mathrm{m}''$, *esso appartiene ad un* $\mathrm{S}_{\mu+\mathrm{m}''+1}$ *contenente la* $\mathrm{F}_2^{\mathrm{m}''}$ (*caso che non può presentarsi quando* $2\mathrm{m}''=\mathrm{n}+\mathrm{m}'$); 4^0 *se* $\mu>\mathrm{n}-\mathrm{m}''$, *esso appartiene ad* $\mathrm{S}_{\mathrm{n}+2}$.

12. Ciò premesso, siamo in grado di determinare tutte le rigate F_2^m d'ordine $m\leq n$ (e $\geq m''$), e quindi (n⁰ 2) razionali normali, contenute in **F**. In fatti ogni tal rigata insieme con un gruppo fissato ad arbitrio di $\mu=n-m$ piani apparterrà ad un S_{n+1}. Viceversa un S_{n+1} passante per quel gruppo di piani, cioè per lo spazio a cui esso appartiene, contiene, se $n-m>m''-m'$, cioè $m<n-m''+m'$, la $F_2^{m''}$ (n⁰ 11) e quindi determina una F_2^m degenerata in questa rigata minima ed $m-m''$ piani; ma se invece $n-m\leq m''-m'$, cioè $m\geq n+m'-m''$, determinerà su **F** una rigata F_2^m, in generale non più composta, e che passerà per la $C^{m'}$ quando $n-m>m'$, cioè $m<n-m'$. Si vede dunque che, limitandosi alle rigate semplici e non tenendo più conto delle rigate minime, l'ordine m di una rigata non può essere minore di $n+m'-m''$, e che tutte le rigate d'ordine m si ottengono mediante gli S_{n+1} passanti per lo spazio a cui appartiene un gruppo arbitrario di $n-m$ piani, cioè per un $S_{3n-3m-1}$ se $m\geq n-m'$, e per un $S_{2n-2m+m'}$ se $m<n-m'$ (n⁰ 11).

Giungiamo così ai risultati seguenti:

Se m *non supera* n *e non è minore di* $n - m'$ *vi sono su* **F** $\infty^{3m-2n+2}$ *rigate d'ordine* m, *le quali non passano in generale per la curva minima e formano una serie lineare, sì che per* ν *rette e* $3m - 2n - 2\nu + 2$ *punti ne passa generalmente una determinata.*

Se m *è minore di* $n - m'$ *ma non minore di* $n + m' - m''$ (*il che è impossibile solo quando* $m'' = 2m'$) *vi sono* $\infty^{2m-n-m'+1}$ *rigate d'ordine* m, *le quali passano tutte per la curva minima e formano una serie lineare, sì che in generale per* ν *rette e* $2m-n-m'-2\nu+1$ *punti ne passa una determinata.*

Risulta pure dalle stesse considerazioni che: *due rigate d'ordini* m_1, m_2 *di cui una almeno non passi per la curva minima si tagliano in generale in una curva semplice d'ordine* $m_1 + m_2 - n$. *Una rigata d'ordine* m *non passante per la* $C^{m'}$ *la incontra in* $m + m' - n$ *punti. Ecc.*

13. Perchè siano completamente note le rigate razionali normali di **F** è necessario conoscerne non solo l'ordine, ma anche la specie, cioè l'ordine della curva minima. Per una rigata passante per la $C^{m'}$ si saprà già senz'altro che questa è la curva minima. Si tratta dunque solo di esaminare una F_2^m non passante per $C^{m'}$ (sicchè $m \geq n - m'$). La (od ogni) rigata minima $F_2^{m''}$ la incontra in una curva (semplice in generale) d'ordine $m + m'' - n$; questa ne sarà curva minima se $2(m + m'' - n) \leq m$, cioè $m \leq 2(n - m'')$. Se invece $m > 2(n - m'')$ la F_2^m non avrà più in generale la sua curva minima sulla $F_2^{m''}$; ciò accadrà solo per certe particolari F_2^m passanti per un numero conveniente ($\geq I(m+1)/2 + m'' - n$) di generatrici della $F_2^{m''}$. Escludendo il caso in cui ciò sia, è chiaro però che la curva minima della F_2^m sarà sempre congiunta alla (o ad una) $C^{m'}$ con una certa rigata razionale normale. E una $F_2^{m_1}$ passante per la $C^{m'}$ può tagliare la F_2^m oltre che in quella curva solo in generatrici, le quali dovranno essere tra quelle che passano pegli $m + m' - n$ punti d'intersezione della F_2^m colla $C^{m'}$. Ora se si prende m_1 tale che $2m_1 - n - m' + 1 \geq m + m' - n$, ossia $m_1 - m' \geq Im/2$, si può far passare la $F_2^{m_1}$ per tutte quelle generatrici della F_2^m (n⁰ 12), sicchè le due rigate avranno un'intersezione residua d'ordine:

$$(m + m_1 - n) - (m + m' - n) = m_1 - m';$$

il valor minimo di quest'ordine si ha per $m_1 = Im/2 + m'$ ed è $Im/2$. Se invece $m_1 - m' < Im/2$, si può fare passare la $F_2^{m_1}$ per $(2m_1 - n - m' + 1)$ generatrici della F_2^m e si ha per ordine della residua curva d'intersezione:

$$(m + m_1 - n) - (2m_1 - n - m' + 1) = m + m' - m_1 - 1 ,$$

il cui valor minimo si ha per $m_1 = m' + I\,m/2 - 1$ ed è $m - Im/2$, cioè $I\,(m + 1)/2$. Dunque: *in generale quando* $m > 2\,(n - m'')$ *la curva minima di una* F_2^m *(non passante per* $C^{m'}$*) è dell'ordine* $I\,m/2$ *(e solo per particolari* F_2^m *sarà d'ordine inferiore, facendo parte dell'intersezione di quelle colla rigata minima); quando invece* $m \leq 2(n - m'')$ *la curva minima della* F_2^m *fa parte dell'intersezione con una rigata minima, ed è in generale dell'ordine* $(m + m'' - n)$.

Da ciò si dedurrebbe facilmente quale varietà formano le curve razionali normali di un dato ordine (soddisfaciente a certe condizioni) su **F**.

14. Facciamo invece un'applicazione del risultato ottenuto, la quale ci servirà in seguito. Determiniamo cioè quanti elementi di F, punti, piani e rette, può contenere un S_{n-1} senza contenere nello stesso tempo una curva od una rigata. Un S_{n-1} si può far passare per t_2 piani, t_1 rette ed $(n - 2t_1 - 3t_2)$ punti di **F**, essendo:

$$n - 2t_1 - 3t_2 \geq 0 .$$

Però affinchè esso non contenga le $C^{m'}$ deve essere:

$$t_2 \leq m',$$

e affinchè della rigata minima $F_2^{m''}$, di cui conterrà t_2 generatrici e t_1 punti, non contenga ancora una curva dovrà essere (R. n⁰ 8):

$$t_1 + 2t_2 \leq m''.$$

Queste tre condizioni sono anche sufficienti, perchè un S_{n-1} passante per t_2 piani e t_1 rette di **F** non la incontri più che in punti isolati. Invero un S_{n+1} condotto per quell'S_{n-1} taglia quella varietà, oltre che nei t_2 piani, in una rigata d'ordine $n - t_2$ (in generale semplice) passante per le t_1 rette; e l'S_{n-1} contenendo $t_1 + t_2$ generatrici di quella rigata la taglierà ancora (R. n⁰ 8) in $(n - t_2) - 2(t_1 + t_2) = n - 2t_1 - 3t_2$ punti isolati. Perocchè l'ordine minimo di curve di quella rigata d'ordine $n - t_2$ essendo, come si è visto al n⁰ precedente, il più piccolo dei numeri $I\,(n - t_2)/2$, $m'' - t_2$, è soddisfatta la condizione che il numero $t_1 + t_2$ di quelle generatrici non superi quest'ordine minimo; in fatti quella condizione darebbe:

$$2(t_1 + t_2) \leq n - t_2\,(^{10}), \qquad t_1 + t_2 \leq m'' - t_2,$$

relazioni entrambe vere in causa delle precedenti.

IV.

Generazione ed equazioni canoniche.

15. Dai risultati del n^0 12 si ha in particolare l'esistenza su **F** di infinite rigate d'ordine $n - m'$ non passanti per la curva minima. In esse le curve d'intersezione colle rigate minime sono in generale dell'ordine $m'' - m'$ e sono quindi curve minime. Su ciascuna di quelle $F_2^{n-m'}$ vi sono poi per conseguenza infinite curve d'ordine $n - m''$. Da tutto ciò (e dal n^0 5) segue:

Si può sempre generare la varietà **F** *di specie* $(\mathrm{m}', \mathrm{m}'')$ *mediante una* $\mathrm{C}^{\mathrm{m}'}$ *ed una* $\mathrm{F}_2^{\mathrm{n}-\mathrm{m}'}$ *rigata (avente la curva minima d'ordine* $\mathrm{m}''-\mathrm{m}'$) *corrispondentisi proiettivamente; ovvero mediante una* $\mathrm{C}^{\mathrm{n}-\mathrm{m}''}$ *ed una* $\mathrm{F}_2^{\mathrm{m}''}$ *(con curva minima d'ordine* m'); *ovvero finalmente mediante tre curve normali proiettive degli ordini* $\mathrm{m}', \mathrm{m}''-\mathrm{m}', \mathrm{n}-\mathrm{m}''$. — S'intende che gli spazi a cui appartengono risp. la curva e la rigata, ovvero le tre curve, devono essere indipendenti, affinchè la varietà generata appartenga ad S_{n+2}.

Viceversa se i numeri m', m'' soddisfanno le condizioni (2), (3), o ciò che fa lo stesso se $m', m'' - m', n - m''$ sono tre numeri in ordine crescente, tre curve razionali normali proiettive aventi quei numeri per ordini e appartenenti a tre spazi indipendenti generano una varietà che è appunto della specie (m', m''), cioè che ha la prima curva per curva minima e la rigata generata dalle prime due per rigata minima. È dunque provata l'esistenza delle varietà delle diverse specie (^{11}).

(^{10}) Veramente nel 2^0 membro di questa relazione si dovrebbe scrivere $2\,I\,(n - t_2)/2$, che diverrebbe $n - t_2 - 1$ quando $n - t_2$ fosse dispari; ma in tal caso essa sarebbe ancora soddisfatta, giacchè allora $n - 2t_1 - 3t_2$ sarebbe non solo ≥ 0, ma ≥ 1.

(^{11}) Tra le specie di rigate razionali normali d'ordine n di S_{n+1} la più generale è quella per cui l'ordine della curva minima è (massimo, cioè) $In/2$; le altre specie si possono dedurre da questa facendo decomporre quella curva in un numero conveniente di generatrici ed una curva semplice. Similmente tra le varie specie (m', m'') a cui **F** può appartenere la più generale corrisponde a $m' = In/3$,

16. Possiamo anche trovare equazioni canoniche per quelle varietà. Consideriamo quelle tre curve razionali normali $C^{m'}$, $C^{m''-m'}$, $C^{n-m''}$. Gli spazi a cui esse appartengono essendo indipendenti si possono prendere su essi risp. $m'+1$, $m''-m'+1$, $n-m''+1$ punti fondamentali e basterà che su ciascuno di essi i punti presi siano indipendenti perchè tutti gli $n+3$ punti fondamentali presi insieme siano tali. Prendiamo su ciascuno di quei 3 spazi i punti fondamentali in modo che formino un sistema di riferimento canonico per la curva corrispondente, e stabiliamo la proiettività fra le tre curve ponendo che il parametro variabile x abbia lo stesso valore in punti corrispondenti. Allora le equazioni delle tre curve avranno le forme:

$$x_0=1,\dots,x_{m'}=x^{m'};\ x_{m'+1}=0,\dots,x_{m''+1}=0;\qquad x_{m''+2}=0,\dots,x_{n+2}=0.$$

$$x_0=0,\dots,x_{m'}=0;\ x_{m'+1}=1,\dots,x_{m''+1}=x^{m''-m'};\ x_{m''+2}=0,\dots,x_{n+2}=0.$$

$$x_0=0,\dots,x_{m'}=0;\ x_{m'+1}=0,\dots,x_{m''+1}=0;\qquad x_{m''+2}=1,\dots,x_{n+2}=x^{n-m''}.$$

Quindi per un punto qualunque della varietà **F** costituita dai piani congiungenti i punti corrispondenti sarà:

$$x_0=1\,,\qquad x_1=x\,,\dots,\qquad x_{m'}=x^{m'}\,;$$

$$x_{m'+1}=y\,,\quad x_{m'+2}=yx\,,\dots,\,x_{m''+1}=yx^{m''-m'}\,;$$

$$x_{m''+2}=z\,,\quad x_{m''+3}=zx\,,\dots,\quad x_{n+2}=zx^{n-m''}\,.$$

Eliminando i parametri x, y, z tra queste equazioni otteniamo per le $n-1$ equazioni di **F** le seguenti:

$$\left|\begin{matrix} x_0\ x_1\cdot x_{m'-1} & x_{m'+1}\ x_{m'+2}\cdot x_{m''} & x_{m''+2}\ x_{m''+3}\cdot x_{n+1} \\ x_1\ x_2\cdot x_{m'} & x_{m'+2}\ x_{m'+3}\cdot x_{m''+1} & x_{m''+3}\ x_{m''+4}\cdot x_{n+2}\end{matrix}\right|=0\,.$$

Queste equazioni provano che **F** non ha altri invarianti assoluti che i numeri m', m'', che ne determinano la specie; il che risultava pure dalla generazione vista di quella varietà.

$m''=I\,2n/3$; le altre se ne deducono sia abbassando l'ordine della rigata minima collo scinderla in piani ed una rigata semplice, sia coll'abbassare nel modo detto dianzi l'ordine della curva minima sulla rigata minima.

V.

Rappresentazioni su S_3.

17. Prendansi ad arbitrio [ma genericamente] su **F** t_0 punti P_0, t_1 rette P_1 e t_2 piani P_2, in modo che sia:

$$t_2 \leq m', \quad t_1 + 2t_2 \leq m'', \quad 2t_1 + 3t_2 \leq n - 1, \tag{4}$$

di cui l'ultima sarà conseguenza della seguente:

$$t_0 + 2t_1 + 3t_2 = n - 1. \tag{5}$$

Per tutti quegli elementi passerà un determinato spazio O_{n-2} da cui proiettando **F** su uno spazio ordinario Σ si avrà una rappresentazione univoca di quella varietà su questo, poichè ogni S_{n-1} passante per O_{n-2} incontrerà **F** in generale solo più in un punto (n^0 14). Un S_{n+1} proiettante (cioè passante per O_{n-2}) taglia **F** oltre che nei P_2 in una rigata d'ordine $n - t_2$ passante pei P_0 e P_1: tale rigata corrisponderà ad un piano di Σ. Due di queste rigate si tagliano (n^0 12), oltre che nelle t_1 P_1, in una curva d'ordine $n - t_1 - 2t_2$, la quale corrisponderà ad una retta di Σ. Una sezione di **F** fatta con un S_{n+1} sarà incontrata da una tal curva in $n - t_1 - 2t_2$ punti, ed avrà quindi per imagine in Σ una superficie d'ordine $n - t_1 - 2t_2$. Dunque: *ai piani di Σ corrispondono in* **F** *le* ∞^3 rigate $\mathrm{F}_2^{\mathrm{n}-\mathrm{t}_2}$ *d'ordine* $\mathrm{n} - \mathrm{t}_2$ *passanti pei* P_0 *e* P_1; *ed alle sezioni di* **F** *fatte cogli* $\mathrm{S}_{\mathrm{n}+1}$ *corrispondono in* Σ $\infty^{\mathrm{n}+2}$ *rigate razionali d'ordine* $\mathrm{n} - \mathrm{t}_1 - 2\mathrm{t}_2$ *formanti una serie lineare.* — Diremo quindi che questa rappresentazione è dell'ordine $n - t_1 - 2t_2$. Cerchiamo ora quale è il valor minimo di quest'ordine e come si ottiene la *rappresentazione minima* corrispondente.

18. Perchè la rappresentazione considerata sia possibile è necessario e sufficiente che siano soddisfatte simultaneamente le tre condizioni (4) dai due numeri t_1, t_2. Vediamo come ciò si possa ottenere. Scelto anzitutto ad arbitrio t_2 in modo da soddisfare la 1^a di quelle condizioni, la 2^a darà: $t_1 \leq m'' - 2t_2$, e siccome allora $m'' - 2t_2 \geq m'' - 2m' \geq 0$, così $m'' - 2t_2$ non essendo negativo si potrà prendere t_1 non maggiore di esso, cioè soddisfare anche la 2^a. Quanto alla 3^a essa ci dà: $2t_1 \leq n - 3t_2 - 1$ e questo secondo membro diventerebbe negativo solo quando, essendo $n = 3m'$, si fosse scelto precisamente $t_2 = m'$. Per soddisfare le (4) si può dunque sempre prendere $t_2 \leq m'$ ad arbitrio, tranne quando **F** fosse

della specie corrispondente ad $m' = n/3$, nel qual caso si deve prendere $t_2 < m'$. Con questa condizione per soddisfare simultaneamente la 2ª e la 3ª delle (4) basterà prendere $2t_1$ non maggiore di $2(m''-2t_2)$ e di $n - 3t_2 - 1$. L'ordine $n - t_1 - 2t_2$ della rappresentazione si rende minimo rendendo massimo $t_1 + 2t_2$; in causa della 2ª delle (4) questa quantità non può superare m''. Se la può raggiungere, cioè se si può fare $t_1 = m'' - 2t_2$, dovrà poi essere in causa della 3ª: $2m'' - t_2 \leq n - 1$, ossia $t_2 \geq 2m'' - n + 1$. Perchè questa relazione sia compatibile colla $t_2 \leq m'$ occorre e basta che sia $2m'' - n + 1 \leq m'$, cioè $2m'' < n + m'$; questa condizione è sempre soddisfatta per la (3), tranne quando $2m'' = n + m'$. È dunque solo in questo caso eccezionale che il valor massimo che possa prendere $t_1 + 2t_2$ non è m''; esso è allora $m'' - 1$, poichè posto $t_1 + 2t_2 = m'' - 1$ la 3ª delle (4) dà: $2m'' - 2 - t_2 \leq n - 1$, ossia $t_2 \geq 2m'' - n - 1$, cioè $t_2 \geq m' - 1$. Questa relazione si accorda colla $t_2 \leq m'$ prendendo $t_2 = m' - 1$, oppure (se non è $m' = n/3$) $t_2 = m'$. — Da tutta questa discussione si traggono i risultati seguenti:

La rappresentazione minima è in generale d'ordine $\mathrm{n} - \mathrm{m}''$ *e si ha prendendo* t_2 *non maggiore di* m' *e non minore di* $2\mathrm{m}'' - \mathrm{n} + 1$ *e poi* $\mathrm{t}_1 = \mathrm{m}'' - 2\mathrm{t}_2$, $\mathrm{t}_0 = \mathrm{n} - 2\mathrm{m}'' + \mathrm{t}_2 - 1$.

Però quando vi sono infinite rigate minime, cioè quando $2\mathrm{m}'' = \mathrm{n} + \mathrm{m}'$, *la rappresentazione minima è d'ordine* $\mathrm{n} - \mathrm{m}'' + 1$ *e si ottiene o prendendo* $\mathrm{t}_2 = \mathrm{m}' - 1$ *e quindi* $\mathrm{t}_1 = \mathrm{m}'' - 2\mathrm{m}' + 1$, $\mathrm{t}_0 = 0$, *oppure prendendo* $\mathrm{t}_2 = \mathrm{m}'$ *e quindi* $\mathrm{t}_1 = \mathrm{m}'' - 2\mathrm{m}' - 1$, $\mathrm{t}_0 = 1$. *Questa seconda ipotesi non si può tuttavia fare nel caso più particolare in cui* $\mathrm{m}' = \mathrm{n}/3$; *per avere allora la rappresentazione minima d'ordine* $\mathrm{n} - \mathrm{m}'' + 1\ (= \mathrm{m}' + 1)$ *bisogna far la prima ipotesi, cioè prendere* $\mathrm{m}' - 1$ *piani* P_2, *una sola retta* P_1 *e niun punto* P_0.

Le equazioni del n⁰ 16, che dànno le x_i in funzione di tre parametri x, y, z esprimono, se questi si considerano come coordinate (non omogenee) di punti in Σ, una particolare rappresentazione di **F** su Σ d'ordine $n - m'' + 1$.

19. Cerchiamo ora gli elementi fondamentali della rappresentazione in ogni caso; ed anzitutto vediamo in quale serie di piani di Σ sono proiettati i piani di **F**. Si ha $n - t_2 - 1 \geq n + m' - m''$ dalle $t_2 \leq m'$, $2m' \leq m''$; tranne nel caso di $2m' = m''$ e $t_2 = m'$. Vi è dunque (n⁰ 12) su **F** una determinata rigata (non degenere in

generale) d'ordine $n - t_2 - 1$, $F_2^{n-t_2-1}$, passante per le t_1 rette P_1 e pei t_0 punti P_0 (e contenente la curva minima quando $t_2 = m'$). Però nel caso della rappresentazione minima *generale* (cioè non per quella corrispondente al caso di $2m'' = n + m'$) essendo $t_1 + 2t_2 = m''$ quella rigata si ridurrà all'insieme dei $t_0 + t_1$ piani generatori passanti pei P_0 e P_1 e dell'unica rigata minima $F_2^{m''}$, poichè questo insieme in virtù della (5) è in tal caso appunto dell'ordine $n - t_2 - 1$. In particolare ciò vale anche nel caso, compreso in quello e che prima si era escluso, in cui $2m' = m''$ e $t_2 = m'$; la $F_2^{n-t_2-1}$, che prima trovavamo non esistere in questo caso, si può considerare come composta di quei piani generatori e della rigata minima.

Ciò posto, la $F_2^{n-t_2-1}$ sta coi t_2 piani P_2 in uno spazio proiettante U_n, il quale taglia Σ secondo una retta r, imagine di quella rigata. Ogni piano di **F** contenendo una generatrice di quella rigata sta in un S_{n+1} passante per U_n ed è quindi proiettato su Σ secondo un piano passante per r. Dunque: *i piani di* **F** *hanno per imagini i piani di un fascio* r.

Siccome poi ogni sezione di **F** fatta con un S_{n+1} è incontrata in una retta da ogni piano generatore, così in Σ la rigata imagine di quella sezione sarà incontrata solo in una generatrice variabile da ogni piano passante per r. *Dunque le* ∞^{n+2} *rigate razionali d'ordine* $n - t_1 - 2t_2$ *di* Σ *hanno* r *per retta multipla secondo* $n - t_1 - 2t_2 - 1$.

I t_1 piani generatori passanti per le rette P_1 ed i t_0 passanti pei punti P_0 sono proiettati secondo t_1 punti Q e t_0 rette R appoggiate ad r: essi sono del resto incontrati da ogni sezione di **F** fatta con un S_{n+1}, sicchè la proiezione di questa sezione passerà pei Q e per le R. Nel caso della rappresentazione minima generale risulta da quanto si è visto sulla composizione della $F_2^{n-t_2-1}$ che le R coincideranno con r ed i punti Q staranno su r. *Vi sono in* Σ, *oltre ad* r, t_0 *rette* R *fondamentali semplici e* t_1 *punti* Q *fondamentali semplici; essi sono risp. generatrici e punti comuni alle* ∞^{n+2} *rigate razionali considerate. Nella rappresentazione minima generale le* R *vengono a coincidere con* r *ed i* Q *a stare su* r.

È facile vedere che non vi sono altri elementi fondamentali e trovare (valendosi dei risultati del n⁰ 12) quali rigate in Σ corrispondano a rigate di **F** d'ordine minore di n. Quanto alle curve si ha immediatamente: *Le* C^n *di* **F** *hanno per imagini delle curve razionali d'ordine* $n - t_2$ (*intersezioni residue delle rigate considerate*) *passanti pei* t_1 *punti* Q *ed appoggiate in* $n - t_2 - 1$ *punti* (*variabili in generale*) *ad* r *ed in un punto a ciascuna delle* t_0 *rette* R.

20. La retta r è dessa generatrice delle rigate d'ordine $n - t_1 - 2t_2$ su cui abbiamo visto che essa è multipla secondo $n - t_1 - 2t_2 - 1$? o in altri termini, quante generatrici mobili di una tal rigata passano per un punto qualunque di r? Per risolvere completamente questa questione consideriamo l'S_{n-1} che congiunge O_{n-2} a quel punto di r e che quindi sta in U_n; esso contiene della $F_2^{n-t_2-1}$, oltre alle t_1 P_1 ed alle t_2 generatrici poste nei P_2, una curva $C^{n-t_1-2t_2-1}$, che è la sola parte dell'intersezione dell'S_{n-1} con **F** la quale non stia su O_{n-2}. Però se $t_2 = m'$, sicchè la $F_2^{n-t_2-1}$ passa per la $C^{m'}$, affinchè quella curva non si decomponga deve essere:

$$(n - t_1 - 2m' - 1) + m' \geq n - m' - 1\,,$$

il che vale solo se $t_1 = 0$; cosicchè, se $t_2 = m'$, per $t_1 > 0$ quella curva si decompone nella $C^{m'}$ ed $n - t_1 - 3m' - 1$ rette. Supposto poi $t_2 < m'$, tenendo conto dei risultati avuti (n^0 13) sull'ordine della curva minima di una rigata di **F**, si hanno le seguenti condizioni affinchè in generale quella $C^{n-t_1-2t_2-1}$ non si decomponga:

(se $t_2 < 2m'' - n - 1$) $\qquad 2(n - t_1 - 2t_2 - 1) \geq n - t_2 - 2\,,$

(se $t_2 \geq 2m'' - n - 1$) $\qquad (n - t_1 - 2t_2 - 1) + (m'' - t_2 - 1) \geq n - t_2 - 1\,,$

ossia: $\qquad n - 2t_1 - 3t_2 \geq 0\,, \qquad t_1 + 2t_2 \leq m'' - 1\,;$

di queste la 1ª è sempre soddisfatta in causa delle (4), la 2ª non lo è solo quando $t_1 + 2t_2 = m''$, cioè nella rappresentazione minima generale. Ma in questo caso già sappiamo che la $F_2^{n-t_2-1}$ si scinde nella rigata minima $F_2^{m''}$ e $t_0 + t_1$ piani; l'S_{n-1} incontra i t_0 piani passanti pei P_0 in t_0 rette che faranno parte della $C^{n-t_1-2t_2-1}$ ed incontra poi la $F_2^{m''}$ in t_2 generatrici poste nei P_2 ed in una $C^{m''-t_2}$.

Ora consideriamo una sezione F_2^n di **F** con un S_{n+1}: le sue $(n - t_1 - 2t_2 - 1)$ generatrici che incontrano la $C^{n-t_1-2t_2-1}$ sono appunto quelle che nella rigata corrispondente di Σ hanno per imagini le generatrici passanti pel punto considerato di r. Affinchè una di queste coincida con r bisogna che una di quelle stia in U_n; ma la sezione considerata F_2^n in generale non contiene della $F_2^{n-t_2-1}$ alcuna generatrice tranne quando $t_1 + 2t_2 = m''$, cioè quando questa si scinde in $t_0 + t_1$ piani e nella $F_2^{m''}$, sicchè è solo in questo caso che le rigate di Σ hanno *tutte* la r per generatrice. — I piani tangenti nel punto considerato di r alla rigata considerata di Σ sono le proiezioni dei piani di **F** passanti per le $(n - t_1 - 2t_2 - 1)$ generatrici considerate della F_2^n. Quindi in quel punto vi sono tanti piani tangenti fissi per tutte le rigate di Σ quante rette comprende la $C^{n-t_1-2t_2-1}$ corrispondente a quello. Da tutto ciò si conclude:

In generale (cioè escludendo il caso di cui poi si parlerà) le rigate d'ordine $n - t_1 - 2t_2$ *di* Σ *non hanno* r *per generatrice, sicchè per ogni punto di* r *passano* $n - t_1 - 2t_2 - 1$ *generatrici distinte diverse da* r. *Se* $t_2 = m'$ *e* $t_1 > 0$ *si ha la particolarità che in ogni punto di* r *tutte quelle* ∞^{n+2} *rigate hanno comuni* $n - t_1 - 3m' - 1$ *piani tangenti (variabili da punto a punto). — Nel caso della rappresentazione minima generale, cioè quando* $t_1 + 2t_2 = m''$, *in* r *coincidono* t_0 *generatrici (le* t_0 *generatrici* R *del caso generale) e vi sono* t_0 *piani tangenti lungo* r *fissi per tutte le rigate e per tutti i punti di* r; *inoltre vi sono* t_1 *punti di* r *(i* t_1 *punti* Q *del caso generale) in ciascuno dei quali vi è ancora un altro piano tangente comune a tutte le rigate.*

21. Se si fanno due diverse proiezioni di **F** su due spazi ordinari (distinti o no) Σ e Σ', facendo corrispondere due punti di questi spazi i quali siano imagini di uno stesso punto di **F** si otterrà una notevole corrispondenza univoca tra Σ e Σ', e si avranno facilmente dalle cose esposte tutte le sue principali proprietà.

Nella corrispondenza tra **F** e Σ' vi saranno elementi analoghi a quelli della corrispondenza tra **F** e Σ, cioè ai $t_0 P_0$, $t_1 P_1$, $t_2 P_2$, r, Q, R e si indichino risp. con $t'_0 P'_0$, $t'_1 P'_1$, $t'_2 P'_2$, r', Q', R'. Allora ai piani di Σ corrisponderanno in **F** delle $F_2^{n-t_2}$ passanti pei P_0 e P_1 e quindi in Σ' delle rigate razionali d'ordine $n-t'_1-2t'_2-t_2$ aventi r' multipla secondo $n - t'_1 - 2t'_2 - t_2 - 1$ passanti pei t'_1 punti Q' e per le t'_0 rette R' ed inoltre per altri t_0 punti C'_0 e t_1 rette C'_1 (proiezioni su Σ' risp. dei P_0 e P_1). Similmente ai piani di Σ' corrisponderanno in Σ delle rigate d'ordine $n - t_1 - 2t_2 - t'_2$ aventi r per retta multipla secondo $n - t_1 - 2t_2 - t'_2 - 1$ e $t_1 + t'_0$ punti Q e C_0 fissi e $t_0 + t'_1$ rette R e C_1 semplici fisse. I due sistemi omaloidici che figurano in questa corrispondenza univoca tra Σ e Σ' sono, come si vede, assai notevoli. Quanto agli elementi fondamentali si vede facilmente che cosa hanno per corrispondenti. Così alla retta r di Σ corrisponde in **F** una $F_2^{n-t_2-1}$ passante pei P_0 e P_1, e quindi in Σ' una rigata razionale d'ordine $n-t'_1-2t'_2-t_2-1$ avente r' multipla secondo $n - t'_1 - 2t'_2 - t_2 - 2$ e passante pei Q', C'_0, e per le R', C'_1; ai piani per r corrispondono (oltre a questa rigata) i piani per r' e la corrispondenza è proiettiva. Ad uno dei t_1 punti fondamentali Q corrisponde in **F** il piano per una

P_1 e quindi in Σ' uno determinato dei piani r' C_1'; ecc. ecc. — Credo inutile il fermarci di più su questa corrispondenza, il cui studio con questo metodo non potrebbe essere più facile [12].

Torino, Novembre 1885.

---

[12] Il metodo del proiettare varietà appartenenti a uno spazio di più dimensioni su uno spazio a minor numero di dimensioni, oltre ad apparire fin d'ora fecondissimo per lo studio delle varietà sì del primo che di quest'ultimo spazio, promette di diventare tale anche per la teoria delle trasformazioni di uno spazio in se stesso, se queste trasformazioni si considerano (come sopra si è fatto in un caso particolare) come provenienti da due diverse proiezioni su quello di una varietà allo stesso numero di dimensioni. Non sembra improbabile che per questa via si giunga in particolare a completare la teoria delle trasformazioni univoche dello spazio ordinario.