Corrado Segre

## Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche

*Atti R. Acc. Scienze Torino*, Vol. **31** (1895-96), p. 485–501

*in*: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. 312–326

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_1_312>

# XVII.

# INTORNO AD UN CARATTERE DELLE SUPERFICIE E DELLE VARIETÀ SUPERIORI ALGEBRICHE

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino »,
vol. XXXI, 1895-96, pp. 341-357.

1. Fra le definizioni note del *genere di una curva algebrica* ve n'è una, di speciale importanza, che qui conviene ricordare (¹).

Sia $\gamma$ la curva (irriducibile), e su essa consideriamo le *serie lineari* ($\infty^1$) *di gruppi di punti*, chiamando così ogni serie di gruppi di punti variabili che possa esser segata su $\gamma$ da un fascio di superficie algebriche (se si è nello spazio ordinario; se no, da un fascio di $M_{r-1}$ in $S_r$). Per una tal serie diciamo $n$ l'*ordine*, cioè il numero dei punti di un gruppo generico, e $\nu$ il numero dei *punti doppi*, cioè delle coincidenze di due punti di uno stesso gruppo (in un sol elemento o punto dell'*ente algebrico* rappresentato da $\gamma$). Diciamo $n'$ e $\nu'$ i caratteri analoghi per un'altra serie lineare. Si dimostra allora (applicando il principio di corrispondenza a quella corrispondenza fra i gruppi di una stessa serie, in cui si corrispondono due gruppi, quando contengono rispettivamente due punti di uno stesso gruppo dell'altra serie; e poi scrivendo l'equazione analoga, e confrontando) che

$$\nu - 2n = \nu' - 2n'.$$

Il numero

$$\frac{\nu}{2} - n + 1 ,$$

che così risulta indipendente dalla serie lineare a cui si riferisce, può definirsi come *genere* della curva $\gamma$. Chiamandolo $p$ si avrà

$$\nu = 2n + 2p - 2$$

---

(¹) Cfr., per l'ordine d'idee a cui essa si riferisce e per alcune applicazioni a cui essa si presta facilmente, la mia *Introduzione alla Geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Ann. mat., (2) 22, 1894) [v. p. 198 di questo volume].

pel numero dei punti doppi di una serie lineare qualunque, il cui ordine sia $n$, sulla $\gamma$.

Ricordiamo pure che se un punto di $\gamma$ è $s$-plo per un gruppo di una serie lineare ($s > 2$), esso va considerato come equivalente ad $s - 1$ punti doppi.

2. Sopra una superficie algebrica $F$ consideriamo un *fascio di curve* (irriducibili), cioè l'insieme delle curve $\gamma$ intersezioni variabili di $F$ con un fascio di superficie algebriche (o di $M_{r-1}$ se si è in $S_r$). Diciamo $p$ il *genere del fascio*, cioè di una $\gamma$ generica; $\sigma$ il numero dei *punti base* (a tangenti variabili (²)) del fascio; $\delta$ il numero dei *punti doppi di curve del fascio* che cadono fuori dei punti base e fuori dei luoghi (eventuali) di punti multipli delle curve generiche del fascio (³). Ci proponiamo di cercare una funzione di $p$, $\sigma$, $\delta$ che non muti al mutare del fascio $\gamma$ su $F$, cioè che non muti sostituendo a quei tre numeri gli analoghi $p'$, $\sigma'$, $\delta'$ relativi ad un altro fascio di curve, $\gamma'$, della stessa superficie. A tal fine è chiaro che, per semplificare, si può supporre che i due fasci $\gamma$, $\gamma'$ siano *indipendenti* fra loro, e quindi senza punti base comuni, ecc. Inoltre si può supporre che le $\gamma$ e le $\gamma'$ si taglino in un numero di punti $m \geq 2$. Si potrà quindi considerare la curva $T$ luogo dei punti di contatto delle $\gamma$ con le $\gamma'$. Noi determineremo il genere $\pi$ di $T$ ricorrendo alle due serie lineari che su $T$ sono staccate dai due fasci $\gamma$, $\gamma'$; e confrontando le due determinazioni otterremo la relazione cercata.

Su una $\gamma$ generica il fascio $\gamma'$ sega una serie lineare d'ordine $m$, che avrà (n. 1)

$$N = 2m + 2p - 2$$

punti doppi: tanti saranno dunque i punti *variabili* del luogo $T$, che stanno sulla $\gamma$ generica. Al variare della $\gamma$ quel gruppo di punti

---

(²) Si vedrà dal seguito fino a qual punto questa restrizione e quella dell'irriducibilità delle curve, non che altre che supporremo relative alle superficie e varietà da considerare, sian necessarie.

Non sarà forse inutile avvertire che le cose contenute in questa Nota hanno un'origine didattica (mentre d'altra parte si collegano alla mia citata *Introduzione*): esse datano dal 1893, e furono esposte, per quel che riguarda le superficie e tolto solo qualche particolare secondario, nelle mie Lezioni del 1893-94, con speciali applicazioni alle superficie razionali ed ai sistemi lineari di curve piane.

(³) È un luogo sì fatto la linea multipla di $F$, se il fascio di superficie che stacca le $\gamma$ non l'ha per linea base. Il numero $\delta$ si riferisce a punti situati fuori di quella linea (almeno in generale; cfr. il seguito).

descriverà su $T$ una serie lineare, che indicherò con $g$, d'ordine $N$. Similmente su una $\gamma'$ generica si hanno

$$N' = 2m + 2p' - 2$$

punti variabili di $T$: e ne deriva su questa curva una seconda serie lineare, che dirò $g'$, il cui ordine sarà $N'$. — Cerchiamo i punti doppi di queste serie, ad esempio della $g$.

3. Anzitutto se su una $\gamma$ coincidono due degli $N$ punti suddetti in un punto che non sia nè singolare per la $\gamma$, nè punto base per le $\gamma'$, nel punto stesso dovrà (v. la fine del n. 1) esservi un *contatto tripunto* della $\gamma$ con una $\gamma'$. Diciamo $\tau$ il numero dei punti di $F$, in cui vi è contatto tripunto fra una $\gamma$ ed una $\gamma'$: essi daranno altrettanti punti doppi della $g$. Si vede che se una $\gamma$ ha un contatto $s$-punto con una $\gamma'$, coincidono $s-1$ suoi punti d'incontro con $T$, e quindi coincidono $s-2$ punti doppi della $g$: il contatto $s$-punto influirà per $s-2$ unità nel numero $\tau$ dei contatti tripunti.

In secondo luogo se una $\gamma$ ha un punto doppio $A$, che non sia nè in un punto base, nè su un luogo di punti doppi del fascio, vale a dire se la $\gamma$ ha uno dei $\delta$ punti doppi su nominati, il suo genere si ridurrà a $p-1$; e quindi pel n. 1 le $\gamma'$ propriamente tangenti alla $\gamma$ si ridurranno a sole $N-2$, cioè la $\gamma'$ che passa per $A$ assorbirà due delle $N\,\gamma'$ tangenti a $\gamma$. Segue che i $\delta$ punti doppi di curve $\gamma$ sono punti doppi per la serie lineare $g$ di $T$. — Si osservi però che se $A$ fosse in particolare una *cuspide* (ordinaria) per la $\gamma$, allora la $\gamma'$ per $A$ sarebbe da contare fra le dette $N-2$ curve $\gamma'$ tangenti alla $\gamma$; e quindi $A$ sarebbe non solo doppio, ma triplo per la serie $g$ di $T$, ossia influirebbe per 2 unità nel numero $\delta$. — Se poi $A$ è per la $\gamma$ un punto $s$-plo ordinario, che diminuisce il genere $p$ di $s(s-1)/2$ unità, segue ancora dal n. 1 che fuori di $A$ cadono $N-s(s-1)$ punti variabili del luogo $T$, sicchè $A$ equivale ad $s(s-1)$ intersezioni della $\gamma$ e di $T$. Ora poichè la $\gamma$ ha $s$ rami distinti passanti per $A$, si può concludere che $A$ sarà $(s-1)$-plo per $T$ e con tangenti diverse da quelle della $\gamma$. Ammesso poi che i rami completi di $T$ passanti per quel punto sian tutti distinti, essi saranno $s-1$ e su ognuno di essi la $\gamma$ sega $A$ come punto $s$-plo della serie lineare $g$. Onde in $A$ cadono $s-1$ punti $s$-pli di questa serie, il che equivale ad $(s-1)^2$ punti doppi. Il punto $A$ influisce dunque per $(s-1)^2$ unità sul numero $\delta$.

In terzo luogo consideriamo un punto $B'$ che sia punto base $s'$-plo $(s' \geq 1)$ pel fascio $\gamma'$. Sulla $\gamma$ che passa per esso la serie staccata dalle $\gamma'$ avrà solo più $m - s'$ punti variabili, e quindi fuori di $B'$ avrà solo $N - 2s'$ punti doppi: in $B'$ cadranno $2s'$ intersezioni della $\gamma$ col luogo $T$. Per determinare la multiplicità di $B'$ per questo luogo, osserviamo che nel fascio $\gamma'$ vi sono in generale $2s' - 2$ curve, per le quali coincidono due delle $s'$ tangenti in $B'$, ossia per le quali $B'$ diventa un punto di diramazione (su un ciclo o ramo completo di $2^0$ ordine). Se su una di queste particolari $\gamma'$ si considera la serie segata dal fascio $\gamma$, si vede che essa avrà $B'$ per punto doppio; sicchè quando una $\gamma'$ generica viene a cadere in quella, delle $N'$ sue intersezioni variabili con $T$ una viene in $B'$. Dunque ognuna delle $2s' - 2$ curve $\gamma'$ nominate è tangente in $B'$ a $T$. L'unica curva ulteriore del fascio $\gamma'$ che riesca tangente a $T$ in $B'$ si vede similmente esser quella che tocca in $B'$ la $\gamma$ passante per questo punto. Siccome poi, come dicemmo, questa $\gamma$ ha con $T$ un incontro $(2s')$-punto in $B'$, così concludiamo che $B'$ è multiplo secondo $2s' - 1$ per $T$, e che dei $2s' - 1$ rami completi di questa curva i quali passano per $B'$ uno solo è tangente (semplicemente) alla $\gamma$. Dunque in $B'$ cade *un solo* punto doppio della serie $g$ segata su $T$ dal fascio $\gamma$ (4). — Da questo ragionamento risulta pure che, mentre i $\sigma'$ punti base del fascio $\gamma'$ dànno altrettanti punti doppi della serie $g$ su $T$, i punti base del fascio $\gamma$ *non sono* punti doppi di questa serie.

4. Applicando ora la formola del n. 1 ai punti doppi che abbiamo enumerati della serie $g$ d'ordine $N$, sulla curva $T$ di genere $\pi$, abbiamo:

$$\tau + \delta + \sigma' = 2N + 2\pi - 2,$$

ossia:

$$\tau + \delta + \sigma' = 4m + 2\pi + 4p - 6. \tag{1}$$

Similmente dalla serie $g'$ d'ordine $N'$ si avrà:

$$\tau + \delta' + \sigma = 4m + 2\pi + 4p' - 6. \tag{2}$$

Sottraendo membro a membro queste due formole si ha:

$$\delta - \sigma - 4p = \delta' - \sigma' - 4p', \tag{3}$$

(4) Ciò non varrebbe più se il fascio $\gamma'$ avesse in $B'$ *tutte le* $s'$ *tangenti fisse*, cioè se nel detto fascio vi fosse una $\gamma'$ che avesse in $B'$ multiplicità $s' + 1$. Allora facendo le necessarie modificazioni al ragionamento precedente si vede che $T$ verrebbe ad avere in generale in $B'$ multiplicità $2s'$ senza alcun contatto (proprio od improprio) con la $\gamma$ passante per quel punto: sicchè $B'$ *non sarebbe più* punto doppio per la serie $g$ di $T$.

che è la relazione cercata. Essa dice che *su una data superficie il numero dei punti doppi staccati di curve di un fascio diminuito del numero dei punti base di questo fascio e di 4 volte il genere di questo dà un numero che non muta se si cambia il fascio di curve, e costituisce quindi un carattere proprio della superficie* (5).

Chiamando $P$ questo *carattere della superficie*, potremo dire che un fascio di curve tracciato su questa, del genere $p$, con $\sigma$ punti base, ha un numero di punti doppi staccati espresso da

$$\delta = \sigma + 4p + P\,; \tag{4}$$

in altre parole questo sarà il *numero delle superficie tangenti alla superficie data, in un fascio di superficie la cui intersezione variabile con questa abbia il genere* p *ed abbia $\sigma$ punti fissi (semplici o multipli).*

Dal precedente n. 3 risulta pure che un punto il quale sia $s$-plo (staccato) per una curva del fascio va contato come equivalente ad $(s-1)^2$ punti doppi. — Se la superficie $F$ ha un punto $s$-plo staccato $A$ e si applicano le cose esposte nei n.i 2, 3 a due fasci di curve $\gamma$, $\gamma'$ ottenuti con fasci di superficie non passanti per $A$, questo punto sarà $s$-plo tanto per una $\gamma$ quanto per una $\gamma'$: e l'influenza che esso avrà sui numeri $\delta$, $\delta'$ delle relazioni (1), (2) scomparirà nella sottrazione, cioè nel passaggio alla relazione (3). Si può quindi fissarla, in questo caso, anche diversa da $(s-1)^2$. Conviene assumere (6) che nella definizione del carattere $P$ di una superficie un punto $s$-plo staccato ordinario di questa conti come $s-1$ punti di contatto ordinario con le superficie di un fascio, del quale il punto stesso non sia punto base.

5. Se della superficie $F$ si chiamano $n$ l'ordine, $\nu$ la classe, $p$ il genere delle sue sezioni piane, e si applica la definizione del ca-

---

(5) La proposizione si estende anche a casi che non abbiamo considerati. Così se il fascio $\gamma'$ ammette un punto base semplice $B'$ *con la tangente fissa*, questo dovrebb'essere sottratto dal numero complessivo $\sigma'$ nella relazione (1): v. la nota preced. D'altra parte tenendo conto che $B'$ viene ad esser punto doppio per una $\gamma'$ ed anche per $T$, si scorge tosto che esso dovrebb'esser tolto dal numero dei punti doppi della serie $g'$ di $T$ cioè dal 1° membro della (2), ossia da $\delta'$. Segue, passando alla (3), che questa rimane valida tal quale, purchè il punto $B'$ non si computi nè nel numero $\sigma'$ dei punti base, nè nel numero $\delta'$ dei punti doppi del fascio $\gamma'$, oppure purchè si conti una volta in ciascuno di quei due numeri (od anche per 2 unità in entrambi i numeri, come da ragioni di limite si sarebbe indotti a fare).

(6) Cfr., ad esempio, la nota seguente.

rattere $P$ ad un fascio generico di sezioni piane, si ha:

$$(5) \qquad P = \nu - n - 4p \, .$$

Se si chiama $r$ il rango della superficie, e $c$ l'ordine della sua linea cuspidale, sicchè $r + c = 2n + 2p - 2$, si avrà, eliminando $p$:

$$(6) \qquad P = \nu - 2r + 3n - 2c - 4 \, .$$

Tanto in questa formola, quanto nella (5), secondo la convenzione fatta, si aggiungerà $(s-1)$ al 2° membro per ogni punto $s$-plo staccato ordinario che la superficie avesse (7).

Nella (6) si riconosce un'espressione già incontrata dal signor ZEUTHEN nella ricerca fondamentale di caratteri della superficie invariabili per trasformazioni birazionali (8). La stessa espressione fu poi considerata di nuovo dal signor NOETHER (9); indicando con $\mathbf{p}$ e e $\mathbf{p}^{(1)}$ rispettivamente quei numeri che egli chiama *Flächengeschlecht* e *Curvengeschlecht* della superficie $F$, quest'ultimo scienziato trova che l'espressione (6) di $P$ equivale a

$$12\mathbf{p} - \mathbf{p}^{(1)} + 9 \, ,$$

almeno se si fanno opportune riserve relativamente alle singolarità di $F$. Su ciò, e su qualche raffronto che si potrebbe fare tra il ragionamento che ci ha condotti al carattere $P$ ed i ragionamenti di quei due illustri scienziati, per brevità non mi trattengo.

Osserverò invece come dalla (5) risulti che *per una superficie generale d'ordine* n *è*

$$P = (n-2)(n^2 - 2n + 2) \, ;$$

*per una rigata sghemba di qualunque ordine e di genere* p *è*

$$P = -4p \, ;$$

ecc. ecc. — Applicando questi risultati al problema dei contatti

---

(7) Qui si può già vedere l'opportunità della detta convenzione in ciò che essa permette di applicare la definizione del carattere $P$ anche ricorrendo ad un fascio di curve di cui quel punto $s$-plo sia punto base. Consideriamo in fatti un fascio di sezioni piane passanti per questo: il suo genere sarà $p - s(s-1)/2$, il numero dei suoi punti base $n - s + 1$, il numero dei suoi punti doppi fuori di questi $\nu - 2s(s-1)$; per conseguenza l'espressione $\delta - \sigma - 4p$ del n° preced.e diventa pel fascio attuale $\nu - n - 4p + (s-1)$.

(8) V. ad esempio il n. 24 delle *Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un,* Math. Ann., IV, 1871.

(9) *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde* (2er Aufsatz), Math. Ann., VIII, 1874.

della superficie data con superficie di un fascio si ha ad esempio: *in un fascio di superficie d'ordine* $\mu$ *vi sono in generale* $\mathrm{n}\mu^2 + 4(\pi - \mathrm{p})$ *superficie tangenti ad una data rigata sghemba d'ordine* n *e genere* p, *se* $\pi$ *è il genere della curva d'intersezione della superficie generica del fascio con la rigata*; ecc. ecc.

Nel caso che la superficie data sia un piano, si vede che il suo carattere sarà $P = -1$. Si ritrova così la nota proposizione: *in un fascio di curve piane di genere* p, *con* $\sigma$ *punti base, vi sono in generale*

$$\sigma + 4p - 1$$

*curve dotate di punti doppi fuori dei punti base* ([10]).

6. Quando di una superficie si sia calcolato il carattere $P$, introducendolo mediante la formola (4) del n. 4 nella (1), questa diventa

$$\tau - 2\pi = 4m - (\sigma + \sigma') - 6 - P. \tag{7}$$

Questa relazione permette di calcolare $\tau$, cioè il *numero delle coppie di curve dei due fasci con contatto tripunto*, quando si sappia determinare il genere $\pi$ della curva $T$. — Ad esempio, *se si è nel piano*, e se si conoscono anche gli ordini $n$, $n'$ dei due fasci di curve $\gamma$ e $\gamma'$, $\pi$ si può avere subito. Dal ragionamento del n. 3 segue infatti che le sole multiplicità di $T$ si hanno in generale nei punti base dei due fasci, e precisamente in un punto base $s$-plo la multiplicità $2s - 1$: contando gl'incontri di $T$ con una curva generica di un fascio si trae che l'ordine di $T$ è $2n + 2n' - 3$; e poi basandosi su questo e sulle dette multiplicità di $T$ si calcola subito:

$$\pi = 4nn' + 6(p + p') - (\sigma + \sigma') - 2.$$

Sostituendo nella (7) in cui si ponga $P = -1$ ed $m = nn'$, si ha:

$$\tau = 12(nn' + p + p') - 3(\sigma + \sigma') - 9$$

---

([10]) Il sig. CREMONA nello scritto *Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane* (Ann. mat., 6, 1864) determinò il numero dei punti doppi di un fascio di curve piane, fuori dei punti base, in molti casi; tra cui quello nel quale i punti base siano di multiplicità qualunque, con le tangenti variabili. Introducendo nella formola del CREMONA il genere, il CAPORALI la mise nella forma sopra scritta: v. il n. 13 della Memoria *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane* (Collect. math. in mem. CHELINI, 1881). — Il sig. GUCCIA ha poi trattato la stessa questione nelle sue *Lezioni di Geometria superiore* (litogr., Palermo, 1890), e per singolarità superiori del fascio di curve piane nel § 8 delle sue *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie*, Mem. II (Rend. Palermo, 9, 1895).

come *numero dei contatti tripunti tra curve di ordini* n , n′ *e generi* p , p′ *di due fasci di curve piane con* $\sigma$ , $\sigma'$ *punti base ordinari* (11).

Si può aggiungere a queste formole un'altra relativa al *numero* d *delle coppie di curve dei due fasci che hanno fra loro doppio contatto.* Una coppia di punti di contatto fra una $\gamma$ ed una $\gamma'$ costituisce sulla curva ausiliaria $T$ una coppia comune alle due serie lineari d'ordini $N$, $N'$ considerate al n. 2. Però fra le coppie comuni a queste due serie vi sono anche quelle costituite da due punti coincidenti, provenienti dalle coppie di curve $\gamma$, $\gamma'$ aventi contatto tripunto. Quindi, applicando la nota formola (12) relativa alle coppie comuni a due serie lineari ($\infty^1$) sopra un ente di genere $\pi$, avremo

$$d + \tau = (N - 1)(N' - 1) - \pi ,$$

ossia

$$d + \tau + \pi = (2m + 2p - 3)(2m + 2p' - 3) . \tag{8}$$

Questa formola si può unire con la (7); e si può, ad esempio, eliminare da esse $\pi$ oppure $\tau$. — *Se si è nel piano* si può senz'altro porre nella (8) per $\pi$ e per $\tau$ i valori dianzi calcolati, e così si ottiene pel *numero dei doppi contatti tra curve di ordini* n , n′ *e generi* p , p′ *di due fasci di curve piane con* $\sigma$ , $\sigma'$ *punti base ordinari* l'espressione (13)

$$d = 4\,[n^2n'^2 + (nn' - 6)(p + p') + pp' - 7nn' + \sigma + \sigma' + 5] .$$

7. Nel n. 5 abbiamo citato le ricerche dei sig.i Noether e Zeuthen relative a caratteri di una superficie invariabili per trasformazioni birazionali di questa. Considerando il carattere $P$ da questo punto di vista facciamo alcune brevi osservazioni (14).

---

(11) Nel caso di due fasci *generali* degli ordini $n$, $n'$ quella formola si riduce ad una data da Steiner alla fine della sua Nota *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven* (Berliner Berichte 1848; Werke II, p. 495). Cfr. anche la Nota del sig. Berzolari, *Sulle curve piane che in due dati fasci hanno un semplice o un doppio contatto, oppure si osculano*: Nota che presento all'Accademia con questa mia, e che mi ha incitato a riprendere, per pubblicarle, le cose qui esposte, e preparate, come dissi (v. nota al n. 2), alcuni anni addietro.

(12) Cfr., ad esempio, la mia citata *Introduzione*, n. 35.

(13) V. pel caso di due fasci *generali* di ordini $n$, $n'$ la citata Nota del sig. Berzolari.

(14) Per maggior semplicità considero superficie che non abbiano punti multipli staccati: sebbene l'esistenza di tali punti non produrrebbe difficoltà essenziali; ed inoltre, applicando le osservazioni che faremo a superficie dotate di punti multipli staccati si avrebbe una nuova prova dell'opportunità della convenzione fatta su quei punti alla fine del n. 4.

Se fra i punti di due superficie algebriche ha luogo una corrispondenza birazionale *priva di punti fondamentali* su entrambe le superficie, cioè di punti a cui corrispondano linee, allora ad un fascio di curve dell'una corrisponderà sull'altra un fascio di curve, dello stesso genere, con lo stesso numero di punti base, con lo stesso numero di punti doppi staccati. Quindi le due superficie avranno lo stesso carattere $P$. — Si sa che il CLEBSCH (15) ha proposto di distinguere le superficie algebriche in *tipi*, chiamando « di uno stesso tipo » due superficie quando si possono riferire tra loro biunivocamente nel modo detto. Adottando quella distinzione potremo dire che: *per le superficie di uno stesso tipo il carattere* P *ha lo stesso valore.*

Abbiasi ora, più in generale, una corrispondenza birazionale tra due superficie $F, F_1$, tale che su queste vi siano rispettivamente $i, i_1$ *punti fondamentali*; sicchè su $F_1, F$ avremo rispettivamente $i, i_1$ *linee fondamentali* corrispondenti a quei punti. Consideriamo in $F$ un fascio di curve, staccato mediante un fascio di superficie in posizione generale rispetto ai punti e linee fondamentali di $F$: sia $p$ il suo genere, $\sigma$ il numero dei suoi punti base, $\delta$ il numero dei suoi punti doppi (staccati) fuori di questi. Gli corrisponderà su $F_1$ un fascio di curve dello stesso genere $p$, del quale dirò $\sigma_1$ il numero dei punti base e $\delta_1$ il numero dei punti doppi staccati. Al fatto che le linee del $1^0$ fascio incontrano ogni linea fondamentale di $F$ corrisponderà il passare di tutte le linee del $2^0$ fascio per ciascun punto fondamentale di $F_1$; onde $\sigma_1 = \sigma + i_1$. Quanto ai $\delta_1$ punti doppi del $2^0$ fascio, parte corrisponderanno ai $\delta$ punti doppi del $1^0$ fascio; e gli altri agli $i$ punti fondamentali di $F$, giacchè una curva del $1^0$ fascio che passi per uno di questi punti fondamentali ha per corrispondente su $F_1$ una curva che contiene come parte la linea fondamentale omologa, e precisamente in modo che l'altra componente incontra questa linea fondamentale, fuori dei punti fondamentali, in *un* sol punto, corrispondente ad *una* direzione uscente dal punto fondamentale di $F$ (16). Si ha dunque: $\delta_1 = \delta + i$. Chiamando ora $P$ e $P_1$ i caratteri di $F, F_1$, e calcolandoli (n. 4) rispettivamente coi due fasci considerati, abbiamo

$$P_1 - P = i - i_1 . \tag{9}$$

---

(15) *Ueber die geradlinigen Flächen vom Geschlechte* $\mathrm{p} = 0$ (Math. Ann., V). V. il § 8.

(16) E' facile vedere che l'esistenza, in questo caso, di curve riducibili non toglie di applicare le cose esposte prima, sebbene le curve siffatte fossero escluse.

Dunque: *quando tra due superficie algebriche ha luogo una corrispondenza birazionale con soli punti fondamentali ordinari, la differenza fra il numero dei punti fondamentali che stanno sulle due superficie è uguale e opposta alla differenza tra i caratteri di queste.* In particolare *se la corrispondenza ha luogo tra i punti di due superficie coincidenti, il numero dei punti fondamentali sarà lo stesso per entrambe* (17).

Possiamo enunciare queste proposizioni anche in altro modo, riferendole ai sistemi lineari di curve che sull'una superficie corrispondono alle sezioni piane (od iperpiane) dell'altra. Avremo: *un sistema lineare di curve tracciato su una superficie* F *e rappresentativo di un'altra superficie* $F_1$ *dà come eccesso del numero dei suoi punti fondamentali (supposti ordinari) sul numero delle sue linee fondamentali la differenza* $P_1 - P$ *tra i caratteri delle due superficie.* Per conseguenza se la superficie $F$ si trasforma birazionalmente in se stessa, verrà trasformato il sistema lineare di curve in un altro sistema, il quale potrà avere altri numeri di punti e di linee fondamentali, ma conserverà invariato l'eccesso dell'un numero sull'altro, giacchè non muteranno i due caratteri $P, P_1$. In particolare se si tratta di un sistema lineare di curve piane, vediamo che il detto eccesso è invariabile per trasformazioni birazionali del piano e ne troviamo una spiegazione nel fatto che esso diminuito di 1 dà il carattere $P_1$ della superficie che è rappresentata da quel sistema lineare.

Le cose ora esposte si potevano anche derivare dalle Mem^e^ citate, e più specialmente da quella del sig. NOETHER (cfr. ad es. il § 6 della detta Mem^a^). Si osservi, a questo riguardo, che il numero $P+i$, somma del carattere della superficie $F$ col numero dei suoi punti fondamentali, è uguale al numero analogo relativo alla superficie $F_1$. E si noti pure che l'esistenza su $F_1$, ad esempio, di punti fondamentali non sarà possibile se su $F$ non esistono di quelle linee che il sig. NOETHER medesimo ha chiamato « *ausgezeichnete* ». — D'altra parte è ben noto che dell'*eccesso* su nominato, per un sistema lineare *qualunque* di curve piane, si occupò molto estesamente, specialmente per la sua invariantività, il sig. JUNG nei suoi lavori sui sistemi lineari di curve piane (18).

---

(17) Merita di esser ricordato che questa proposizione, pel caso di due *piani*, fu dimostrata dal CREMONA appunto con la considerazione del numero dei punti doppi delle curve del fascio che sopra l'un piano corrisponde ad un fascio di rette dell'altro (*Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*, Mem. 2^a^, § 5: Mem. Acc. Bologna, (2) V, 1865).

(18) *Ricerche sui sistemi lineari di curve piane algebriche*, ecc. (Ann. mat., (2) 15 e 16, 1888, 1889). — *Sull'eccesso degli elementi fondamentali di un sistema lineare*

8. Passiamo ora a fare, brevemente, in modo pienamente analogo a quello tenuto ai n[i] 1, 2, ecc. pei caratteri $p$ e $P$ delle curve e superficie, la ricerca di un analogo carattere relativo alle varietà algebriche a tre dimensioni.

Sopra una $M_3$ abbiansi due fasci (tra loro indipendenti) di superficie $F, F'$. Diciamo $P$ e $P'$ i caratteri delle superficie generiche dei due fasci; $\varrho$ il genere della curva d'intersezione; $p$ e $p'$ i generi delle curve $\gamma$ e $\gamma'$ basi dei due fasci (*semplici o multiple*); $\sigma$ e $\sigma'$ i numeri dei punti d'intersezione di $\gamma'$ con una $F$, e di $\gamma$ con una $F'$. Consideriamo poi la curva $T$, di genere $\pi$, luogo dei punti di contatto delle $F$ con le $F'$. Su una $F$ generica le superficie $F'$ segano un fascio di curve di genere $\varrho$, con $\sigma$ punti base: il numero dei punti doppi che vi saranno fuori di questi, cioè il numero $N$ dei punti d'incontro *variabili* della $F$ col luogo $T$ sarà (n. 4):

$$N = \sigma + 4\varrho + P .$$

Ciò per altro esige modificazioni, se fra i punti di $\gamma$ vi sono dei punti eccezionali, che influiscano in un modo speciale sul valore di $P$. Ci limiteremo, fra questi casi, a quello in cui $\gamma$ sia una curva base *semplice* del fascio $F$, nella quale però vi sian punti base *multipli* ordinari. Se uno di questi punti è $s$-plo pel fascio $F$, la determinazione assunta per $P$ è tale (v. la fine del n. 4) che il numero delle $F'$ propriamente tangenti ad una $F$ non è più $\sigma + 4\varrho + P$, ma questo numero diminuito di $s - 1$. Estendendo la cosa a tutti i punti base multipli del fascio $F$, avremo in questo caso pel numero $N$ il valore:

$$N = \sigma + 4\varrho + P - \Sigma (s - 1) .$$

Così il fascio $F$ sega su $T$ una serie lineare semplicemente infinita $g$ il cui ordine $N$, a seconda dei casi detti, sarà dato dalla 1ª o dalla 2ª espressione. Similmente il fascio $F'$ sega su $T$ una serie lineare $g'$ il cui ordine $N'$ sarà dato da:

$$N' = \sigma' + 4\varrho + P'$$

in generale, cioè se sulla curva $\gamma'$ non vi sono punti eccezionali; nel caso che il fascio $F'$ abbia la curva base $\gamma'$ semplice, ma abbia pure su $\gamma'$ dei punti base multipli ordinari, la cui multiplicità in

(Rend. Ist. Lomb., (2) 21, 1888). — V. anche: *Sul numero delle curve degeneri contenute in un fascio* (ibid.).

genere indichiamo con $s'$, sarà invece:

$$N' = \sigma' + 4\varrho + P' - \Sigma'(s' - 1).$$

Cerchiamo ora i punti doppi delle due serie lineari, ad esempio di $g$.

Anche qui, le coincidenze di due degli $N$ punti doppi del fascio di curve che abbiam considerato sulla $F$ potranno generalmente avvenire in tre modi diversi.

$1^0$ Senza abbassamento del carattere $P$ o del numero dei punti base del detto fascio, pel fatto che in questo vi è una curva dotata di *cuspide*, fuori dei punti base (veggasi nel n. 3 l'osservazione relativa alle cuspidi). Diremo $\tau$ il numero dei *contatti stazionari* tra superficie $F$ ed $F'$, cioè dei punti (non base) che sono cuspidi per curve comuni ad $F$ ed $F'$.

$2^0$ Perchè la superficie $F$ ha carattere minore di quello $P$ delle $F$ generiche. Noi ammettiamo che ciò avvenga solo per l'acquisto che la $F$ faccia di un punto doppio. Allora su $F$ il fascio di curve considerato ammetterà solo $N - 2$ punti doppi (staccati) fuori di quello: cioè in quello vi sarà una coincidenza di due degli $N$ punti considerati su una $F$ generica. Diremo $\delta$ il numero dei punti doppi di superficie del fascio $F$ (staccati, cioè all'infuori dei punti base multipli e all'infuori dei luoghi di punti multipli della $M_3$).

$3^0$ Perchè s'abbassa il numero dei punti base del fascio di curve della $F$. In generale ciò accadrà per quelle $F$ che son tangenti alla curva $\gamma'$ base del fascio $F'$: il loro numero è (n. 1) $2\sigma + 2p' - 2$. Se $\gamma'$ non ha punti multipli — sia poi essa curva base semplice oppure multipla pel fascio $F'$, — questo caso non potrà accadere in altro modo. Ma se $\gamma'$ ha punti multipli, anche le superficie $F$ che passano per questi dovranno esser considerate. Non stiamo ad esaminare completamente la cosa: limitiamoci al caso di cui già abbiam tenuto conto precedentemente che le $F'$ abbiano una linea base semplice e, su questa, dei punti base multipli; e consideriamo uno, $B'$, di questi punti e sia $s'$ la sua multiplicità per le $F'$, sicchè i coni tangenti in esso a queste superficie formino un fascio generale d'ordine $s'$. Si vede allora (analogamente al ragionamento fatto al n. 3, pel $3^0$ caso) che la curva $T$ passa in generale per $B'$ con $3(s' - 1)^2$ rami tangenti alle generatrici doppie di coni del detto fascio e con altri $2s' - 2$ rami tangenti alle generatrici di contatto di coni del fascio medesimo col piano tangente in $B'$ alla $F$ che vi passa. D'altronde su questa $F$, pel fascio di curve d'intersezione con le $F'$, il numero $\sigma$ dei punti base sarà diminuito di $s'^2 - 1$ ed il genere $\varrho$ di $s'(s'-1)/2$; sicchè degli $N$ punti d'incontro variabili di $T$ con la $F$ il punto $B'$ ne assorbirà $(s'^2-1)+2s'(s'-1)$ ossia $3(s'-1)^2+2(2s'-2)$. Segue che i rami nominati di $T$ sono tutti lineari, e che gli ultimi $2s'-2$ sono semplicemente toccati in $B'$ da quella $F$: sicchè in $B'$ cadranno $2s'-2$ punti doppi della serie $g$ di $T$.

9. Applicando ora alla curva $T$ di genere $\pi$, ed alla sua serie lineare $g$, della quale abbiamo enumerato i punti doppi, la formola del n. 1, avremo, nel detto caso speciale:

$$\tau+\delta+(2\sigma+2p'-2)+2\Sigma'(s'-1)=2N+2\pi-2,$$

formola che rimarrà valida anche nel caso generale, se vi si sopprime il simbolo sommatorio che vi compare. — Con questa convenzione, e ponendovi per $N$ il corrispondente valore, essa diventa:

$$\tau-2\pi-8\varrho+\delta-2P+2p'+2\Sigma(s-1)+2\Sigma'(s'-1)=0. \tag{10}$$

Analogamente sarà:

$$\tau-2\pi-8\varrho+\delta'-2P'+2p+2\Sigma'(s'-1)+2\Sigma(s-1)=0. \tag{11}$$

Sottraendo membro a membro avremo, tanto nel caso generale, quanto nel detto caso speciale:

$$\delta-2p-2P=\delta'-2p'-2P'. \tag{12}$$

Ossia: *su una data varietà a tre dimensioni il numero dei punti doppi staccati di superficie di un fascio, diminuito del doppio genere della curva base (semplice o multipla) e del doppio carattere delle superficie generiche dà un numero che non muta se si cambia il fascio di superficie, e costituisce quindi un carattere proprio della varietà a tre dimensioni* (19).

---

(19) Oltre che nei casi esposti, questo teorema vale anche *se la curva base del fascio di superficie è semplice ma possiede (oltre ai punti base multipli già considerati del fascio di superficie) dei nodi suoi proprî,* purchè però in tal caso *si escludano dal computo dei punti doppi di superficie del fascio quelli precisamente che cadono in quei nodi della linea base.* Invero se nel ragionamento fatto (n. 8) si ammette che $\gamma$ e $\gamma'$ possano avere punti doppi, indicando con $B'$ un punto doppio di $\gamma'$, sulla $F$ che lo contiene si avrà una coincidenza di due delle $N$ curve con punto doppio, in quella che è intersezione di $F$ con la $F'$ avente punto doppio in $B'$. Ne viene poi che nella formola (10) si dovrà aggiungere al 1° membro il numero dei nodi di $\gamma'$: e così nella (11) il numero dei nodi di $\gamma$. Quindi passando alla (12) questa rimarrà vera, purchè $\delta$ e $\delta'$ si diminuiscano rispettivamente dei punti doppi di $\gamma$ e $\gamma'$.

Indicando con $\Pi$ il *carattere* della $M_3$ che così abbiamo definito, sarà poi:

$$\delta = 2p + 2P + \Pi; \tag{13}$$

questa formola determinerà il *numero delle superficie dotate di punti doppî staccati, in un fascio dato della* $\mathrm{M}_3$, quando si conosca il genere $p$ della curva base ed il carattere $P$ della superficie generica del fascio.

10. Ad esempio, per lo spazio ordinario possiamo determinare il carattere $\Pi$ mediante un fascio di piani: si ha così $\Pi = 2$. Ne segue che *nello spazio ordinario un fascio di superficie, di carattere* $P$, *con la curva base del genere* $\mathrm{p}$, *ha in generale, fuori di questa curva*

$$2(P + p + 1) \tag{14}$$

*punti doppi.* — La curva base può esser semplice o multipla; e se è semplice può aver dei nodi, ed anche contenere dei punti base multipli pel fascio. — Se si tratta di un fascio *generale* di superficie d'ordine $n$, sicchè (n. 5) $P = (n-2)(n^2 - 2n + 2)$, e $p = n^3 - 2n^2 + 1$, viene come numero di punti doppi $4(n-1)^3$: com'è ben noto. Se il fascio di superficie d'ordine $n$ ha un punto base $s$-plo, questo abbassa il valore di $P$ ora scritto di $s(s-1)^2 - (s-1)$, e quello di $p$ di $s^2(s-1)$ [20]; quindi l'espressione (14) ci fa vedere che l'abbassamento nel numero $4(n-1)^3$ dei punti doppi del fascio sarà di $2(s-1)^2(2s+1)$; risultato pure noto [21].

11. Si può domandare quale sia per una varietà qualunque $M_r$ il *carattere* analogo a quelli che abbiamo introdotto per le superficie e per le varietà $M_3$. Chiameremo $\Pi_r$ questo carattere: e lo supporremo definito per indici minori di $r$. Allora si consideri sulla $M_r$ un fascio di varietà $M_{r-1}$, il cui carattere indichiamo con $\Pi_{r-1}$, e sia $\Pi_{r-2}$ il carattere della $M_{r-2}$ base e $\delta$ il numero dei punti doppi staccati di varietà del fascio: sarà, indipendentemente dal fascio considerato:

$$\Pi_r = \delta - 2\Pi_{r-1} - \Pi_{r-2}. \tag{15}$$

---

[20] CREMONA, *Grundzüge einer allgem. Theorie der Oberflächen*, n. 119.

[21] PIERI, *Sopra alcuni problemi riguardanti i fasci di curve e di superficie algebriche* (Giorn. mat., 24, 1884). — Cfr. anche, per questo e per un risultato più generale: GUCCIA, *Sur les points doubles d'un faisceau de surfaces algébriques* (Comptes rendus, avril 1895).

Conviene porre $\Pi_0$ uguale al numero dei punti a cui esso si riferisce, diminuito di 1; poi $\Pi_1$ uguale al *doppio del genere* della curva (ossia porre $\Pi_{-1} = 0$). Dopo ciò risulta dalla (15) $\Pi_2$ uguale al carattere $P$ della superficie *aumentato di* 1; e $\Pi_3$ uguale al carattere che avevamo chiamato $\Pi$ della $M_3$ *diminuito di* 2. La determinazione così scelta è tale che, qualunque sia $r$, *il carattere* $\Pi_r$ *s'annulla per la* $\mathrm{M_r}$ *lineare, cioè per uno spazio* $\mathrm{S_r}$.

Accenniamo ancora, terminando, che sarebbe utile in questo argomento considerare anche le *varietà riducibili.* Per quel che riguarda le curve si sa già come la nozione del genere si possa applicare alle curve riducibili: e non vi è difficoltà a determinare quali modificazioni occorrano in tutte le cose esposte quando per le curve che abbiamo incontrato si tolga la restrizione di essere irriducibili. Converrà fare la stessa determinazione per le superficie, ecc.