Corrado Segre

Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes

Math. Annalen, Vol. **28** (1886), p. 296–314

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. 36–55

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_1_36>

III.

REMARQUES SUR LES TRANSFORMATIONS UNIFORMES DES COURBES ELLIPTIQUES EN ELLES-MÊMES

«Mathematische Annalen», Band XXVII, 1886, pp. 296-314.

Dans l'étude de la géométrie projective des espaces à plusieurs dimensions après les variétés rationnelles normales de ∞^1 points, droites, plans, etc. (1), se présentent naturellement les variétés normales elliptiques et avant tout les courbes elliptiques *normales*, c'est-à-dire les courbes C^n elliptiques qui *appartiennent* (2) à un S_{n-1}. Jusqu'à présent on s'est borné par rapport à ces courbes à un simple regard, surtout sur leurs rangs et sur leurs points *singuliers* (points d'hyperosculation); on les rencontre cependant dans plusieurs travaux connus, surtout dans ceux géométriques de Clifford et de M. Veronese (3) et dans ceux plus analytiques de M. Klein et de M. Bianchi (4). Le but de cette Note n'est pas de porter beau-

---

(1) Ces variétés ont été étudiées surtout par M. Veronese et puis, avec plus de détails, par moi successivement dans les Notes: *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (Atti Acc. Torino, XIX), *Ricerche sui fasci di coni quadrici* (même tome), et *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani* (mêmes Atti, XXI); la première devra être citée dans la suite pour quelques-uns de ses résultats.

(2) Si une variété est telle que l'espace (linéaire) de nombre moindre de dimensions qui la contienne soit un S_{n-1}, je dis qu'elle *appartient* à cet espace. Ainsi chaque variété appartient toujours à un seul espace.

(3) V. Clifford: *On the classification of Loci* (Phil. Trans., 1878). — Veronese: *Behandlung der projectivischen Verhältnisse* etc. (Math. Ann., XIX).

(4) Voir: Klein: *Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung* (Math. Ann., XVII); — Bianchi: *Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung* (même tome), où la théorie des fonctions elliptiques est mise en relation avec les courbes elliptiques normales des ordres 3 et 5; — et surtout Klein: *Ueber die elliptischen Normalcurven der*

coup plus loin cette théorie, mais seulement de montrer comment les ∞^1 transformations uniformes d'une C^n en elle-même, en conduisant à ∞^1 surfaces réglées rationnelles normales qui la contiennent, permettent d'appliquer des résultats connus sur celles-ci à l'étude de la C^n et peuvent ainsi donner des propriétés nouvelles de cette courbe.

Les deux espèces de transformations.

1. Soit une courbe elliptique normale de l'ordre n, C^n, d'un espace à $n-1$ dimensions S_{n-1}. En indiquant par u le paramètre d'un point mobile sur la courbe dans la représentation connue de celle-ci par des fonctions elliptiques de périodes ω_1, ω_2 (représentation dans laquelle nous supposerons que la somme constante des paramètres de n points placés sur un S_{n-2} soit nulle) (5), les transformations (uniformes) de la courbe en elle-même sont données, comme l'on sait, par l'équation

$$u' \equiv \pm u + C, \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2)$$

où C est une constante quelconque. Il s'ensuit qu'il y a ∞^1 de ces transformations, de deux espèces différentes en relation avec le double signe de u; nous les appellerons respectivement *de* 1e ou *de* 2e *espèce* suivant que ce signe est $-$ ou $+$. Parmi ces transformations celles qui correspondent aux valeurs particulières

$$C \equiv \frac{\lambda\,\omega_1 + \mu\,\omega_2}{n},$$

N^{ten} Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der N^{ten} Stufe (Abhandl. d. kgl. sächs. Gesellschaft d. W., XIII, 1885).

Je citerai encore les travaux suivants où l'on trouve étudiées avec plus ou moins de détails les transformations uniformes des courbes elliptiques normales du 3e et du 4e ordre en elles-mêmes: Harnack: *Ueber die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung erster Species* u. s. w. (Math. Ann., XII); — Lange: *Die 16 Wendeberührungspunkte der Raumcurve vierter Ordnung erster Species* (Zeitschrift für M. u. Ph., 28), pour les transformations projectives; — Ameseder: *Ueber Configurationen auf der Raumcurve vierter Ordnung erster Species* (Wien. Ber., 87, 1883); — Küpper: *Ueber die Steiner'schen Polygone auf einer Curve dritter Ordnung* u. s. w. (Math. Ann., XXIV); — Emil Weyr: *Ueber eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung* (Wien. Ber., 87, 1883), et *Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlechte Eins* (Wien. Ber., 88).

(5) Voir surtout le travail cité de M. Klein sur les courbes elliptiques normales.

où λ et μ indiquent des entiers quelconques, sont les $2n^2$ transformations projectives de la courbe en elle-même. Elles se divisent en n^2 de 1e espèce et n^2 de 2e espèce ; parmi ces dernières est comprise l'identité. C'est de ces transformations projectives qu'il semble qu'on se soit presque exclusivement occupé jusqu'à présent, lorsque n est quelconque.

2. Une transformation quelconque de 1e espèce

$$u' \equiv -u + C \tag{1}$$

peut être définie géométriquement d'une façon fort simple ; car, en prenant

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-2} \equiv -C\,,$$

l'équation (1) devient

$$u + u' + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-2} \equiv 0\,,$$

et par conséquent les deux points correspondants $u\,, u'$ seront les points d'intersection variables de C^n avec les S_{n-2} d'un faisceau ayant pour base l'S_{n-3} qui passe par $n-2$ points $u_1 \ldots u_{n-2}$ de C^n (auxquels on peut en substituer $n-2$ quelconques formant un groupe résiduel d'un couple $u\,u'$), c'est-à-dire un S_{n-3} *sécant* de C^n.

Chaque transformation de 1e espèce (1) est évidemment involutive ; elle a 4 points doubles qui correspondent à $2u \equiv C$, c'est-à-dire

$$u \equiv \frac{C}{2}\,,\ \frac{C}{2} + \frac{\omega_1}{2}\,,\ \frac{C}{2} + \frac{\omega_2}{2}\,,\ \frac{C}{2} + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\,.$$

En d'autres termes par un S_{n-3} qui contienne $n-2$ points de C^n passent quatre S_{n-2} tangents ailleurs à cette courbe. Il va sans dire que le rapport anharmonique de ces quatre S_{n-2} ne dépend pas de l'S_{n-3} par lequel ils passent (comme l'on voit par la correspondance (2, 2) entre deux tels faisceaux de S_{n-2}, dont les S_{n-2} correspondants passent par un même point de C^n) ; ce rapport anharmonique est l'invariant absolu de C^n.

3. Chaque transformation de 2e espèce

$$u' \equiv u + C \tag{2}$$

peut être obtenue (d'une infinité de manières) en combinant deux transformations de la 1e espèce. Ainsi en prenant deux S_{n-3} *sécants* de C^n, en joignant un point u de C^n au premier on a un S_{n-2} qui coupe encore la courbe en un point qui joint au second donne un

S_{n-2} coupant C^n en un point u', qui correspond à u dans une telle transformation.

La transformation de 2e espèce (2) ne peut évidemment pas avoir des points doubles. Elle n'est involutive, c'est-à-dire identique à son inverse $u \equiv u' - C$, que lorsque

$$C \equiv \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Il y a donc seulement 3 transformations involutives de 2e espèce; elles forment un groupe (avec l'identité). Nous les appellerons *transformations principales.* On voit que les 4 points doubles de chaque transformation de 1e espèce (n^0 2) se correspondent dans ce groupe des trois transformations principales de 2e espèce: d'où l'on tire une nouvelle construction de celles-ci.

Les surfaces réglées correspondant aux transformations de 1e espèce.

4. Considérons la surface réglée lieu des droites joignant les points de C^n qui se correspondent dans une transformation de 1e espèce. Ses génératrices sont projetées (n^0 2) par ∞^{n-3} S_{n-3} sécants de C^n suivant autant de faisceaux projectifs de S_{n-2}; d'où il suit qu'on peut construire cette surface réglée au moyen de $n-2$ faisceaux projectifs de S_{n-2}. Elle est donc une surface réglée rationnelle de l'ordre $n-2$ *normale,* c'est-à-dire appartenant à S_{n-1} et non décomposée.

Cette surface réglée représente la transformation à laquelle elle correspond; elle a 4 génératrices tangentes à C^n dans les 4 points doubles de cette transformation.

5. Or une surface réglée rationnelle normale est caractérisée non seulement par son ordre, mais encore par un autre nombre (6). Les surfaces réglées rationnelles normales F_2^{n-2} de S_{n-1} peuvent être en effet de différentes *espèces,* qui se distinguent entre elles par l'ordre moindre de courbes qui leur appartiennent: toutes les surfaces d'une même espèce étant d'ailleurs projectives entre elles. Toutes les courbes d'ordre $\leq n-1$ placées sur une telle surface réglée sont des

---

(6) Voir pour les propositions que j'énonce ici ma Note citée *Sulle rigate razionali* etc.

courbes rationnelles normales, c'est-à-dire appartiennent à des espaces dont le nombre des dimensions est égal à leur ordre. L'ordre m de la *courbe minima* peut varier de 0 (pour les cônes) jusqu'à $(n-3)/2$ si n est impair, et jusqu'à $n/2-1$ si n est pair ; en dehors de la courbe minima il n'y a plus sur la surface que des courbes d'ordre $\geq n-2-m$, et il y a effectivement en particulier une infinité de C^{n-2-m}. Il y a toujours une seule courbe minima, hors le cas où l'ordre m est $=n/2-1$, car alors il y a ∞^1 courbes minimae de l'ordre $n/2-1$ formant une série linéaire.

6. Cela posé, il s'agit de déterminer l'espèce de la surface réglée F_2^{n-2} qui correspond à une transformation de 1e espèce. Pour résoudre cette question supposons qu'il y ait sur cette surface une courbe rationnelle C^μ appartenant à un S_μ et rencontrant C^n en ν points (où $\nu \geq 0$) : par $n-2-\mu$ de ses points différents de ces derniers passeront autant de génératrices et il y aura un S_{n-2} passant par l'S_μ et par celles-ci et coupant la F_2^{n-2} seulement en C^μ et ces $n-2-\mu$ génératrices, et en conséquence C^n seulement dans les ν points placés sur C^μ et les $n-2-\mu$ couples de points placés sur ces génératrices. Donc

$$\nu+2(n-2-\mu)=n,$$

c'est-à-dire

$$\nu=2\mu-n+4. \tag{3}$$

Cette formule nous donne le nombre ν des points d'intersection des courbes d'ordre $\mu\,(\leq n-2)$ de la F_2^{n-2} avec C^n; elle nous montre qu'il doit être

$$2\mu-n+4\geq 0,$$

d'où

$$\mu \geq \frac{n-3}{2} \quad \text{si } n \text{ est impair,}$$

$$\mu \geq \frac{n}{2}-2 \quad \text{si } n \text{ est pair.}$$

Ainsi pour n impair nous pouvons déjà conclure : *Si* n *est impair toutes les surfaces réglées* $\mathrm{F}_2^{\mathrm{n}-2}$ *représentant les* ∞^1 *transformations de* 1e *espèce de* C^{n} *ont la courbe minima de l'ordre* $(\mathrm{n}-3)/2$; *cette courbe minima rencontre en un point la* C^{n}.

Si au contraire n est pair, pour ces surfaces la courbe minima peut être de l'ordre $n/2-2$ sans points de rencontre avec C^n, ou bien de l'ordre $n/2-1$ et ayant 2 points de rencontre avec C^n.

Nous allons chercher pour quelles transformations se présentent alors ces deux cas.

7. Supposons donc n pair et que la surface réglée F_2^{n-2} ait une courbe minima de l'ordre $n/2-2$, $C^{n/2-2}$, ne rencontrant pas C^n. Si sur chaque génératrice on construit le point conjugué harmoniquement à son point d'intersection avec $C^{n/2-2}$ par rapport au couple des points de C^n placés sur la génératrice, le lieu de ce point sera une courbe qui ne rencontrera pas $C^{n/2-2}$. Donc dans chaque S_{n-2} passant par $C^{n/2-2}$, c'est-à-dire par l'$S_{n/2-2}$ auquel elle appartient, et coupant en conséquence encore la F_2^{n-2} suivant $n/2$ génératrices, il y aura justement $n/2$ points de ce lieu : celui-ci est d'après cela une courbe de l'ordre $n/2$, $C^{n/2}$, appartenant à un $S_{n/2}$, qui ne coupe en aucun point l'$S_{n/2-2}$ nommé. Il s'ensuit que l'*involution* (7) ayant pour axes ces $S_{n/2-2}$ et $S_{n/2}$ détermine la transformation considérée de la C^n, à laquelle correspond la surface réglée F_2^{n-2} ayant une $C^{n/2-2}$ pour courbe minima. Donc cette transformation n'est pas une quelconque des ∞^1 transformations de 1e espèce de C^n en elle-même, mais bien une des n^2 qui sont produites par des collinéations ; ainsi :

Si n *est pair pour une transformation de* 1e *espèce non linéaire de* C^{n} *en elle-même la surface réglée* $\mathrm{F}_2^{\mathrm{n}-2}$ *correspondante a* ∞^1 *courbes minimae de l'ordre* $\mathrm{n}/2-1$.

8. Avant de passer aux transformations linéaires que, pour le cas de n pair, il nous reste à examiner, il convient de faire quelques remarques générales sur les collinéations de 1e espèce, qui, comme nous savons, sont toutes des involutions. En général une telle involution transformant C^n en elle-même correspond à une surface réglée F_2^{n-2} qui en coupe les axes suivant deux courbes n'ayant pas (de même que ces axes) de points communs et dont les ordres ont en conséquence $n-2$ pour somme. Il s'ensuit que l'un

---

(7) Je nomme *involution* chaque collinéation involutive (de sorte que toutes nos collinéations de 1e espèce seront des involutions). On sait qu'une involution dans S_{n-1} a deux *axes* S_i et S_{n-2-i} ne se coupant pas et qui sont les lieux des points doubles et l'enveloppe des S_{n-2} doubles. Deux points correspondants dans l'involution se trouvent sur une droite coupant ces axes en deux points conjugués harmoniquement par rapport à ceux-là ; etc. Voir, par exemple, Veronese: *Interprétations géométriques* etc., Ann. mat., (2) XI, p. 115 ; et, pour une étude géométrique détaillée la Note de M. Bertini (parue pendant l'impression du présent travail) : *Le omografie involutorie in uno spazio lineare a qualsivoglia numero di dimensioni* (Rend. Ist. Lombardo, (2) 19).

des deux axes est l'espace auquel appartient la courbe minima, lorsqu'il y en a une seule, (ce qui a déjà été prouvé d'une autre façon dans le n^0 précédent pour n pair et pourrait aussi être prouvé d'une manière analogue pour n impair) et que les deux axes contiennent deux courbes minimae $C^{n/2-1}$ lorsque (pour n pair) il y en a une infinité. Dans ce dernier cas les ∞^1 courbes minimae de la F_2^{n-2} se correspondent deux-à-deux dans l'involution et les $S_{n/2-1}$ contenant les deux courbes dont chacune correspond à soi-même sont précisément les axes de l'involution.

Maintenant pour n impair nous avons déjà le résultat suivant: *Si* n *est impair chacune des* n^2 *involutions qui transforment* C^{n} *en elle-même a pour axes un* $\mathrm{S}_{(\mathrm{n}-3)/2}$, *contenant la courbe minima de la surface réglée correspondante, et un* $\mathrm{S}_{(\mathrm{n}-1)/2}$.

9. En revenant à présent au cas de n pair, il est facile de voir qu'il y a en effet parmi les n^2 involutions de 1^e espèce qui transforment C^n en elle-même de celles qui ont pour axes un $S_{n/2-2}$ et un $S_{n/2}$ et d'autres ayant pour axes deux $S_{n/2-1}$. Pour qu'une involution de 1^e espèce ait deux axes $S_{n/2-2}$ et $S_{n/2}$, il faut évidemment que $n/2$ couples quelconques de points correspondants de C^n soient sur un S_{n-2} (joignant les droites qui les contiennent à l'$S_{n/2-2}$); tandis que cela ne peut jamais arriver si elle a deux axes $S_{n/2-1}$ (car un S_{n-2}, qui contiendrait $n/2$ droites passant par autant de couples de points correspondants de C^n, devrait aussi contenir les deux $S_{n/2-1}$ puisque chacun de ceux-ci est coupé par ces $n/2$ droites en autant de points indépendants). Or si l'involution dont il s'agit est représentée par

$$u + u' \equiv \frac{\lambda\, \omega_1 + \mu\, \omega_2}{n}, \tag{4}$$

$n/2$ couples de points correspondants u, u' seront sur un S_{n-2} seulement lorsque

$$\frac{n}{2}\, \frac{\lambda\, \omega_1 + \mu\, \omega_2}{n} \equiv 0,$$

c'est-à-dire lorsque λ et μ sont pairs. Donc:

Si n *est pair, parmi les* n^2 *involutions de* 1^e *espèce qui transforment* C^{n} *en elle-même il y en a* $(\mathrm{n}/2)^2$ (que nous appellerons *singulières*) *qui ont pour axes un* $\mathrm{S}_{\mathrm{n}/2-2}$ *et un* $\mathrm{S}_{\mathrm{n}/2}$ *et qui donnent en conséquence origine à des surfaces réglées* (*exceptionnelles*) *ayant pour courbe minima une* $\mathrm{C}^{\mathrm{n}/2-2}$ *de cet* $\mathrm{S}_{\mathrm{n}/2-2}$; *les autres* $3\,(\mathrm{n}/2)^2$ *ont pour axes deux* $\mathrm{S}_{\mathrm{n}/2-1}$ *et elles donnent origine à des surfaces réglées ayant* ∞^1 *courbes minimae* $\mathrm{C}^{\mathrm{n}/2-1}$ *dont deux sur ces axes.*

10. Les 4 points doubles d'une transformation de 1e espèce de C^n en elle-même seront, lorsque cette transformation est linéaire, les points d'intersection de C^n avec les axes.

Donc si n est impair l'un de ces points doubles sera sur l'axe $S_{(n-3)/2}$ de l'involution et les 3 autres sur l'axe $S_{(n-1)/2}$ (n^0 6). Un groupe de $(n-1)/2$ couples de points correspondants de C^n se trouve alors sur un S_{n-2} avec l'axe $S_{(n-3)/2}$; en faisant approcher indéfiniment ce groupe au point de C^n placé sur cet axe, l'S_{n-2} a pour limite une position dans laquelle elle rencontre C^n en n points coincidents avec celui-ci. Ce point est en conséquence un des n^2 points *singuliers* (ou d'hyperosculation) et son espace osculateur passe par l'axe $S_{(n-3)/2}$. Mais aucun des 3 points de C^n placés sur l'$S_{(n-1)/2}$ n'est singulier, car l'S_{n-2} osculateur d'un de ces points, étant double dans l'involution, (et ne pouvant pas passer par l'$S_{(n-1)/2}$, qui contient 2 autres points de C^n) passe par l'$S_{(n-3)/2}$ et coupe encore C^n dans le point placé sur celui-ci. — Ainsi : *Les* n^2 *points singuliers de* C^n *pour* n *impair se trouvent respectivement sur les* n^2 *axes* $S_{(n-3)/2}$ *des* n^2 *involutions qui transforment* C^n *en elle-même et ont les espaces osculateurs passant aussi respectivement par ces axes.*

Soit au contraire n pair. Alors si l'involution considérée n'est pas singulière, c'est-à-dire si elle a pour axes deux $S_{n/2-1}$, chacun de ceux-ci contient 2 des 4 points doubles de la correspondance qu'il y a sur C^n; mais on voit facilement qu'aucun de ces 4 points n'est un point singulier. Au contraire si l'involution est singulière, c'est-à-dire si elle a pour axes un $S_{n/2-2}$ et un $S_{n/2}$, il y aura un S_{n-2} passant par l'$S_{n/2-2}$ et par $n/2$ couples de points correspondants de C^n infiniment voisins à l'un des 4 points d'intersection de cette courbe avec l'$S_{n/2}$ (points qui sont les 4 points doubles de la correspondance sur C^n); donc ces 4 points sont singuliers et leurs espaces osculateurs passent par l'$S_{n/2-2}$. — *Les* n^2 *points singuliers de* C^n *pour* n *pair se trouvent par quatre sur les* $(n/2)^2$ *axes* $S_{n/2}$ *des* $(n/2)^2$ *involutions singulières, tandis que leurs espaces osculateurs passent respectivement par les axes* $S_{n/2-2}$ *des mêmes involutions.*

Tout cela pourrait être confirmé par l'équation (4) de l'involution ; car si les deux points correspondants u, u' coincident on aura pour les 4 points doubles

$$u \equiv \frac{\lambda\,\omega_1 + \mu\,\omega_2}{2\,n} + \frac{P}{2}, \qquad (P = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2).$$

Cette formule lorsque n est impair représente un point singulier (c'est-à-dire le second membre est la n^{me} partie d'une période), quels que soient λ et μ, seulement pour une des 4 valeurs de P; et lorsque n est pair seulement si λ et μ sont pairs (et dans ce cas pour toutes les valeurs de P) [8].

Les trois transformations principales de 2e espèce.

11. Parmi les transformations de 2e espèce nous nous bornerons dans la suite à considérer celles qui jouissent de la propriété (commune à toutes celles de 1e espèce) d'être involutives, c'est-à-dire (n⁰ 3) les trois transformations principales

$$u' \equiv u + \frac{P}{2}. \qquad (P = \omega_1\,, \omega_2\,, \omega_1 + \omega_2).$$

Si n est pair elles ont une importance remarquable; seulement dans ce cas elles proviennent de collinéations. Puisqu'elles sont involutives celles-ci seront des involutions; cherchons quels axes elles auront. Aucun de ces axes n'est rencontré par C^n, car une transformation de 2e espèce de celle-ci n'a jamais de points doubles; donc chaque S_{n-2} passant par l'un de ces axes contient $n/2$ couples de points de C^n et les $n/2$ points d'intersection des droites joignant ces couples avec l'autre axe. Ces $n/2$ points de cet autre axe ne peuvent pas être sur un $S_{n/2-3}$, car autrement par celui-ci et les $n/2$

(8) Sur les surfaces réglées dont nous nous sommes occupés dans ce paragraphe, il convient d'ajouter quelques remarques. M. Klein a prouvé dans le Mémoire cité sur les courbes elliptiques que C^n est l'intersection complète du système linéaire de $\infty^{n(n-3)/2-1}$ variétés quadratiques M^2_{n-2}, qui (comme l'on voit facilement en assujétissant une telle variété à passer par $2n$ points donnés *quelconques* de C^n) passe par cette courbe. Une quelconque de ces variétés et une surface réglée normale F_2^{n-2} passant par C^n ne peuvent plus se couper que dans $n-4$ génératrices. De là on peut tirer de nouveau les mêmes résultats qu'au n⁰ 6, car une courbe C^μ de la surface réglée ($\mu \leq n-2$) étant coupée par ces génératrices en n—4 points de la M^2_{n-2} serait contenue dans celle-ci s'il n'était pas $2\mu \geq n-4$: donc l'ordre de la courbe minima de la F_2^{n-2} est $(n-3)/2$ pour n impair, et $\geq n/2-2$ pour n pair. Réciproquement une surface réglée satisfaisant à ces conditions est coupée par une M^2_{n-2} qui en contienne $n-4$ génératrices suivant une courbe elliptique normale C^n; l'on a ainsi une nouvelle définition géométrique de cette courbe.

Je remarquerai enfin que les équations (52), (52^b) du Mémoire de M. Klein, si l'on y considère $p(u)$ et $p'(u)$ comme deux variables indépendantes, sont les représentations d'une surface réglée rationnelle normale F_2^{n-2} contenant C^n et ayant pour ordre de la courbe minima respectivement $(n-3)/2$ et $(n-4)/2$.

droites passerait un S_{n-3} contenant n points de C^n, ce qui est impossible (9); ils appartiendront donc à un espace de $n/2 - 2$ dimensions au moins et en conséquence l'axe sur lequel ils se trouvent (et qui ne peut pas être contenu, lui aussi, dans l'S_{n-2} que nous avons mené par l'autre) aura au moins $n/2 - 1$ dimensions. Pour la même raison cela sera vrai pour les deux axes, et comme la somme de leurs nombres de dimensions doit être $n - 2$ nous concluons que *pour* n *pair chacune des trois transformations principales a pour axes deux* $S_{n/2-1}$.

On voit en même temps que la surface réglée des droites joignant les couples de points correspondants de C^n coupe chacun de ces axes suivant une courbe (qui est rencontrée par un S_{n-2} passant par l'autre en $n/2$ points, c'est-à-dire) de l'ordre $n/2$. Cette surface réglée, étant en conséquence coupée par chaque S_{n-2} passant par un axe suivant la courbe d'ordre $n/2$ placée sur cet axe et $n/2$ génératrices, sera de l'ordre n. Elle est elliptique, de même que les deux courbes de l'ordre $n/2$ placées sur les deux axes $S_{n/2-1}$ (10); et on peut justement l'engendrer au moyen des droites joignant les points correspondants de ces deux courbes elliptiques normales $C^{n/2}$ entre lesquelles il y a une correspondance uniforme *non* projective (11).

---

(9) On peut même dire que $n - 1$ points de C^n ne peuvent pas se trouver sur un S_{n-3}, car autrement ou bien la courbe serait sur un S_{n-2}, ou bien elle serait rationnelle, car chaque S_{n-2} passant par cet S_{n-3} la couperait en un seul point variable. On en tire que plus en général k points de C^n pour $k \leq n - 1$ ne sont pas sur un S_{k-2}.

(10) Pour s'apercevoir que cette surface réglée est elliptique et non pas rationnelle il suffit de la considérer par exemple pour $n = 4$, c'est-à-dire pour la courbe biquadratique elliptique de l'espace ordinaire (dans laquelle on peut d'ailleurs toujours projeter C^n): elle est alors une surface réglée du 4e degré elliptique à deux droites directrices doubles. Chacune des deux courbes elliptiques de l'ordre $n/2$ dont nous parlons ci-dessus se réduit dans ce cas à une de ces droites comptée deux fois.

(11) Disons seulement un mot sur la surface réglée des droites joignant les points correspondants $u, u + C$ dans une transformation de 2e espèce quelconque (non principale). Cette surface réglée est aussi elliptique, car ses génératrices correspondent uniformément aux points u de C^n qu'elles joignent à leurs transformés $u + C$. Elle a C^n pour courbe double, car par chaque point u passent deux génératrices qui le joignent à $u - C$ et à $u + C$. Pour avoir son ordre, cherchons combien de ses génératrices rencontrent l'S_{n-3} joignant $n - 2$ points de C^n, $u_1, \ldots, u_{n-2}$, autre part que sur ceux-ci: en nommant $u, u + C$ les deux points de C^n placés sur une telle génératrice, on aura $u + (u + C) + u_1 + \ldots + u_{n-2} \equiv 0$, d'où l'on tire $2u$ et en conséquence 4 valeurs de u qui se correspondent entre elles dans le groupe des transformations principales. Ainsi nous concluons que cette

La configuration des axes des différentes involutions.

12. En voulant nous occuper des relations qu'il y a entre les involutions qui transforment la courbe elliptique C^n en elle-même et surtout entre leurs axes, remarquons avant tout que si au moyen de l'une de ces involutions on en transforme une autre on obtiendra encore une de ces involutions : donc aux axes d'une involution correspondent par rapport à une autre involution les axes d'une troisième involution, qui cependant pourrait coincider avec la première.

Considérons deux différentes involutions de 1[e] espèce représentées par

$$u' \equiv -u + \frac{P}{n}, \tag{5}$$

$$u' \equiv -u + \frac{P'}{n}, \tag{6}$$

où P, P' sont des périodes. En transformant la (5) par (6) elle devient

$$-u' + \frac{P'}{n} \equiv -\left(-u + \frac{P'}{n}\right) + \frac{P}{n},$$

c'est-à-dire

$$u' \equiv -u + \frac{2P' - P}{n}; \tag{7}$$

or cette nouvelle transformation ne coincide avec (5), c'est-à-dire (5) et (6) ne sont *échangeables*, que lorsque $(2P' - P)/n \equiv P/n$, c'est-à-dire $2(P' - P)/n \equiv 0$, $P'/n \equiv P/n + pér/2$ ce qui peut arriver seulement lorsque n est pair.

De même en transformant (6) par (5) on a

$$u' \equiv -u + \frac{2P - P'}{n}, \tag{8}$$

qui pourra coincider avec (6) seulement lorsque n est pair. En ou-

surface réglée est de l'ordre $2(n-2)+4$, c'est-à-dire $2n$; et en outre nous trouvons ainsi que les 4 génératrices coupant hors de C^n un S_{n-3} sécant de celle-ci se correspondent entre elles dans le groupe des 3 transformations principales. — Cela n'est d'ailleurs qu'une généralisation d'un raisonnement que M. Harnack fait à la pag. 78 de son Mémoire cité. — Parmi ces ∞^1 surfaces réglées elliptiques d'ordre $2n$ correspondant aux transformations de 2[e] espèce il y a, outre les trois (d'ordre n mais comptées deux fois) qui correspondent aux transformations principales, une autre remarquable qui correspond à l'identité, c'est-à-dire $C \equiv 0$, et se compose des droites tangentes de la courbe C^n.

tre (7) et (8) coincident si $(2P' - P)/n \equiv (2P - P')/n$, c'est-à-dire $3(P' - P)/n \equiv 0$, ce qui peut arriver seulement lorsque n est multiple de 3.

En transformant encore (7) et (8) respectivement par (5) et (6) on a les transformations

$$u' \equiv -u + \frac{3P - 2P'}{n}, \tag{9}$$

$$u' \equiv -u + \frac{3P' - 2P}{n}, \tag{10}$$

et en continuant ainsi l'on obtient, si n est premier, un système de transformations toutes différentes entre elles, qui se termine seulement avec la

$$u' \equiv -u + \frac{\frac{1}{2}(n+1)P - \frac{1}{2}(n-1)P'}{n}, \tag{11}$$

et se compose en conséquence de n transformations. On voit facilement que ce système est tel qu'en transformant l'une quelconque de ses transformations par une autre l'on obtient encore une transformation du système.

Nous supposerons justement n premier; bien que nos considérations vaillent pour n quelconque, mais alors elles conduiraient à des résultats plus compliqués. D'après ce que nous avons dit au commencement de ce n⁰ il est évident que l'S_{n-2} joignant les axes $S_{(n-3)/2}$ des deux involutions quelconques (5) et (6) (axes qui dans ce cas de n premier ne peuvent pas être, comme on le prouverait facilement, sur un S_{n-3}) devra contenir aussi l'axe $S_{(n-3)/2}$ de (7), celui de (8), etc., c'est-à-dire tous les n axes $S_{(n-3)/2}$ des n transformations du système considéré. D'après cela, en se rappelant en outre le résultat du n⁰ 10 pour n impair, on arrive à la proposition suivante:

Si n *est premier, les* n^2 *axes* $S_{(n-3)/2}$ *des* n^2 *involutions qui transforment* C^n *en elle-même forment une configuration très remarquable telle que chaque* S_{n-2} *qui en joint deux en contient* n (*et contient en conséquence* n *points singuliers de* C^n). *On obtient ainsi* $n(n+1)\,S_{n-2}$, *dont chacun contient* n *de ces axes et tels que par chacun de ceux-ci il en passe* $n+1$; *ces espaces se divisent en* $n+1$ *groupes de* n *tels que les* n *espaces d'un même groupe contiennent tous les* n^2 *axes* (*et par suite tous les* n^2 *points singuliers*) [12], *de sorte que les* $n+1$ *espa-*

---

[12] M. Bianchi avait déjà remarqué (loc. cit.) que pour la C^5 elliptique normale les 25 points singuliers sont sur 6 différents groupes de 5 S_3, chacun de ces S_3 contenant 5 points singuliers.

ces passant par un même axe appartiennent respectivement aux $\mathrm{n}+1$ ***groupes. — Les*** n^2 ***axes*** $\mathrm{S}_{(\mathrm{n}-1)/2}$ ***des mêmes involutions forment une configuration qui correspond parfaitement à celle-là par dualité dans*** $\mathrm{S}_{\mathrm{n}-1}$.

En coupant cette configuration de $S_{(n-3)/2}$ et de S_{n-2} par un $S_{(n+1)/2}$ on obtient sur celui-ci une nouvelle configuration remarquable de n^2 points et $n(n+1)$ $S_{(n-1)/2}$ telle que chaque $S_{(n-1)/2}$ contient n points et par chaque point passent $n+1$ de ces espaces. En particulier pour $n=5$ l'on a dans l'espace ordinaire une configuration remarquable de 25 points et de 30 plans telle que chaque plan contient 5 points, et que ces plans forment 6 pentaèdres dont chacun contient dans ses faces tous les 25 points et que par chaque point passe un plan de chaque pentaèdre.

13. Chaque transformation (de 1^e^ ou de 2^e^ espèce) de C^n en elle-même

$$u' \equiv \pm u + C$$

est échangeable à l'une quelconque des 3 transformations principales de 2^e^ espèce

$$u' \equiv u + \frac{P}{2},$$

car en la transformant par celle-ci on voit bien qu'elle ne change pas. Donc en supposant n pair, comme nous ferons dorénavant dans ce paragraphe, chacune des 3 involutions principales transforme chaque involution, principale ou non, en elle-même; c'est-à-dire en combinant une involution quelconque avec une involution principale on obtient, quel que soit l'ordre de la combinaison (*multiplication*), une même troisième involution. En particulier deux involutions principales donnent pour combinaison la troisième involution principale.

Or si deux involutions sont échangeables, par rapport à chacune d'elles les axes de l'autre ou bien se correspondent entre eux ou bien se correspondent chacun à soi-même. Dans le premier cas chaque axe de l'une n'aurait aucun point (et aucun S_{n-2}) commun avec un axe de l'autre, car autrement ce point serait commun aussi à l'autre axe de celle-ci, ce qui est impossible. Dans le second cas au contraire il y aurait des points (et des S_{n-2}) communs à un axe quelconque de l'une et à un axe quelconque de l'autre: en effet sur un axe de l'une involution l'autre involution déterminerait (puisqu'il correspond à soi-même) une nouvelle involution dont les axes, lieux des points doubles, seraient justement les intersections avec les axes de la seconde involution. Ce raisonnement prouve en même temps que dans un axe d'une involution les intersections avec les axes de l'autre donnent pour somme de leurs nombres de dimensions le nombre de dimensions du premier axe diminué de l'unité, ce qui nous sera utile dans la suite. Remarquons en outre que chaque point (ou S_{n-2}) commun à deux axes des deux différentes involutions appartient aussi à un axe de l'involution qui résulte de leur combinaison, car il est un point (ou S_{n-2}) double pour les deux premières et en conséquence aussi pour la troisième.

Maintenant si nous considérons deux involutions principales, pour voir si les axes $S_{n/2-1}$ de l'une coupent ou non ceux de l'autre, il suffit de chercher s'il y a des S_{n-2} communs à un axe de l'une et un axe de l'autre, et en conséquence aussi à un axe de la troisième involution principale, c'est-à-dire des S_{n-2} doubles pour les trois involutions principales. Si u est un point d'intersection d'un tel S_{n-2} avec C^n, cet espace devra contenir tout le groupe $u, u + \omega_1/2$, $u + \omega_2/2$, $u + (\omega_1 + \omega_2)/2$ transformé en soi-même par les trois involutions principales. Donc les n points d'intersection de cet espace avec C^n doivent se diviser en groupes séparés de 4, et il faut en conséquence que n soit multiple de 4. Ainsi:

Si n *est de la forme* $4n' + 2$ *chacune des trois involutions principales échange entre eux les deux axes de chacune des deux autres et ces trois couples d'axes n'ont pas de points communs.* — Les droites coupant les deux axes d'une involution principale et un axe d'une autre coupent tous les axes des trois involutions principales; en d'autres termes ces trois couples d'axes $S_{n/2-1}$ sont sur une même variété $S_{n/2-1} - F_{n/2}^{n/2}$ appartenant à S_{n-1} (variété qui peut toujours être considérée comme le lieu des $\infty^1 S_{n/2-1}$ joignant les points correspondants de $n/2$ droites projectives, ou bien des $\infty^{n/2-1}$ droites joignant les points correspondants de deux $S_{n/2-1}$ projectifs).

14. Si au contraire n est de la forme $n = 4n'$, considérons n' groupes de points

$$u_i, u_i + \frac{\omega_1}{2}, \quad u_i + \frac{\omega_2}{2}, \quad u_i + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}; \quad (i = 1, \dots, n')$$

ils seront sur un S_{n-2} si la somme de leurs paramètres est $\equiv 0$, c'est-à-dire

$$4 \Sigma u_i \equiv 0,$$

d'où

$$\Sigma u_i \equiv 0, \quad \frac{\omega_1}{4}, \quad \frac{\omega_2}{4}, \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{4},$$

(les autres valeurs que l'on obtiendrait pour Σu_i n'étant pas différentes au fond de celles-ci, car on peut les avoir en augmentant l'une des u_i de la moitié d'une période, ce qui ne change pas le groupe de 4 points correspondants). Comme on peut prendre arbitrairement $n'-1$ des u_i, on voit que les S_{n-2} doubles pour les trois involutions principales forment dans ce cas 4 différents systèmes $\infty^{n'-1}$.

De ce fait (et même, indépendamment de cela, de tout ce que nous avons dit auparavant) on tire le résultat suivant:

Si n *est doublement pair les trois couples des axes des trois involutions principales sont les* $S_{n/2-1}$ *qui joignent deux-à-deux quatre* $S_{n/4-1}$.

Autour de la figure composée par ces 4 $S_{n/4-1}$, les 6 $S_{n/2-1}$ qui les joignent deux-à-deux et les 4 $S_{3n/4-1}$ qui les joignent trois-à-trois se groupent d'une certaine façon toute la configuration des points singuliers de C^n et celle des axes des différentes involutions [13].

15. En supposant encore n doublement pair, une transformation principale, par exemple

$$u' \equiv u + \frac{\omega_1}{2}$$

forme un groupe avec une involution quelconque de 1e espèce

$$u' \equiv -u + \frac{P}{n}$$

et avec l'involution, échangeable à celle-ci (n⁰ 12),

$$u' \equiv -u + \frac{P}{n} + \frac{\omega_1}{2}.$$

Donc les points de C^n se divisent encore en groupes de 4 qui se transforment en eux-mêmes dans le groupe de ces 3 transformations. Comme la somme des paramètres de $n/4$ de ces groupes est $\equiv (n/4).$ $.2P/n \equiv P/2$, il s'ensuit que ceux-ci ne peuvent appartenir à un S_{n-2}, c'est-à-dire il ne peut y avoir d'S_{n-2} passant par un axe de chaque involution, si $P/2$ n'est pas une période, c'est-à-dire si les deux involutions de 1e espèce considérées ne sont pas parmi les $(n/2)^2$ singulières. Donc les couples des axes $S_{n/2-1}$ des autres $3\,(n/2)^2$ involutions de 1e espèce n'ont pas de points communs avec les axes des 3 involutions principales.

---

(13) On ne peut pas s'attendre toutefois à ce que l'involution ayant pour axes un de ces 4 $S_{n/4-1}$ et l'$S_{3n/4-1}$ opposé transforme C^n en elle-même; d'après ce que nous avons vu cela n'arrive que pour $n = 4$.

Au contraire si les deux transformations de 1e espèce appartiennent aux $(n/2)^2$ singulières, on voit que $n/4$ groupes quelconques de 4 points de C^n obtenus de la manière dite se trouvent sur un S_{n-2}, qui sera en conséquence double pour les 3 transformations du groupe: on obtient ainsi un système de $\infty^{n/4}$ S_{n-2} doubles. Cela porte facilement à la proposition suivante:

Si n *est doublement pair, par rapport à l'une des trois involutions principales les* $(n/2)^2$ *involutions singulières se groupent en couples, chaque couple formant un groupe avec cette involution principale; les axes* $S_{n/2-2}$ *et* $S_{n/2}$ *des deux involutions singulières d'un couple joignent deux* $S_{n/4-1}$ *placés sur un axe* $S_{n/2-1}$ *de l'involution principale respectivement à un* $S_{n/4-2}$ *et un* $S_{n/4}$ *placés sur l'autre axe de celle-ci.* — Les couples dans lesquels se décomposent ainsi les $(n/2)^2$ involutions singulières se distinguent en deux catégories de $(n/4)^2$ couples qui se comportent d'une manière différente par rapport aux deux axes de l'involution principale, et dont l'une est transformée dans l'autre par chaque involution de 1e espèce non singulière.

Pour connaître encore mieux la configuration des axes des différentes involutions dans ce cas où n est doublement pair il y aurait encore à distinguer suivant que n est ou n'est pas multiple de 8. Il y aurait aussi à porter plus loin l'étude de cette configuration lorsque n n'est pas doublement pair. Mais nous nous arrêterons ici, car une étude détaillée n'est pas notre but; cependant on la ferait aisément avec les mêmes raisonnements dont nous nous sommes servis.

Applications aux courbes elliptiques de l'espace ordinaire.

16. En projetant C^n par un S_{n-5} quelconque de S_{n-1} sur l'espace ordinaire, on obtient, comme l'on sait, la courbe elliptique générale de l'ordre n, Γ^n, de cet espace. Les surfaces réglées représentant les transformations de C^n en elle-même se projetteront dans des surfaces réglées de l'espace ordinaire représentant les transformations de Γ^n en elle-même. Nous aurons en conséquence les propositions suivantes:

Dans l'espace ordinaire chaque courbe elliptique de l'ordre n, Γ^n, *est contenue simplement dans* ∞^1 *surfaces réglées rationnelles de l'ordre* n — 2 *qui correspondent aux* ∞^1 *transformations de* 1e *espèce de* Γ^n *en elle-même, en sorte que les génératrices d'une telle surface réglée contiennent les couples de points correspondants dans la transformation qui lui est relative. Pour* n *impair chacune de ces surfaces* *réglées a en général pour courbe simple minima une courbe rationnelle de l'ordre* (n — 3)/2 ; *pour* n *pair chacune de ces surfaces a* ∞^1 *courbes rationnelles minimae de l'ordre* n/2 — 1 , *en exceptant* (n/2)^2 *de ces surfaces, qui ont pour courbe minima une courbe de l'ordre* n/2 — 2. — *Outre ces* ∞^1 *transformations involutives de* Γ^n *en elle-même il y en a trois de* 2^e *espèce qui donnent origine à trois surfaces réglées elliptiques de l'ordre* n *ayant* Γ^n *pour courbe simple rencontrée en deux points* (*correspondants dans la transformation*) *par chaque génératrice.*

Ainsi (sans nous arrêter aux cas de $n = 3, 4$, qui donnent lieu aux courbes elliptiques normales du 3^e et du 4^e ordre) les courbes elliptiques du 5^e ordre appartiennent dans l'espace ordinaire à ∞^1 surfaces réglées cubiques et sont courbes simples pour 3 surfaces réglées elliptiques du 5^e degré. — Les courbes elliptiques du 6^e ordre de l'espace ordinaire appartiennent à ∞^1 surfaces réglées rationnelles du 4^e degré ; parmi elles 3 ont une droite triple comme lieu, qui est une quadrisécante de la courbe ; il y en a en outre 9 ayant une droite simple directrice (triple comme enveloppe). En d'autres termes pour chaque courbe elliptique du 6^e ordre il y a (outre les 3 quadrisécantes) 9 droites telles que dans chaque plan passant par l'une d'elles l'équation dont dépendent les 6 points d'intersection avec la courbe se décompose en 3 équations quadratiques. La courbe est courbe simple pour 3 surfaces réglées elliptiques du 6^e degré dont chacune est le lieu des droites joignant les points correspondants de deux cubiques planes qui soient dans une correspondance uniforme non projective. Etc.

17. Les involutions de S_{n-1} transformant C^n en elle-même nous donnent pour la projection Γ^n quelques autres propositions nouvelles et assez remarquables surtout dans les cas de $n = 5$ et 6. Ainsi :

Parmi les ∞^1 *surfaces cubiques réglées qui passent par une courbe elliptique du* 5^e *ordre de l'espace ordinaire il y en a* 25 *remarquables. Pour une quelconque de celles-ci que l'on détermine sur chaque génératrice le point conjugué harmoniquement au point d'intersection avec la droite directrice simple par rapport aux deux points d'intersection avec la courbe du* 5^e *ordre : le lieu de ce point* (qui pour une surface réglée cubique quelconque serait une cubique gauche) *sera une conique, de sorte que les points de la courbe sont deux-à-deux séparés harmoniquement par la droite directrice et le plan de cette conique. En d'autres termes une courbe elliptique du* 5^e *ordre est de* 25 *manières différentes symétrique par rapport à une droite et un plan.*

Parmi les ∞^1 surfaces réglées rationnelles du 4^e degré qui passent par une courbe elliptique du 6^e ordre de l'espace ordinaire il y en a, outre celles nommées au n^o précédent, 27 remarquables. Pour une quelconque de celles-ci, de même que pour chacune des trois surfaces réglées elliptiques du 6^e degré, deux points de la courbe qui soient sur une même génératrice sont séparés harmoniquement par deux plans fixes (c'est-à-dire par les points de rencontre de la génératrice avec deux coniques fixes de la surface du 4^e degré ou avec deux cubiques planes fixes de la surfaces du 6^e degré). En d'autres termes une courbe elliptique du 6^e ordre est de $27+3$ manières différentes symétrique par rapport à un couple de plans. Etc. etc.

Un théorème sur les surfaces réglées elliptiques.

18. Nous finirons en établissant une proposition sur les surfaces réglées elliptiques, qui, bien qu'elle ne soit pas très-liée avec ce qui précède, a cependant une certaine relation avec le but de cette Note, car elle exige dans la démonstration que nous en donnerons la considération des transformations des courbes elliptiques normales en elles-mêmes.

Supposons que dans une transformation de la courbe elliptique normale en elle-même

$$u' \equiv \pm u + C$$

à un groupe particulier de points situés sur un S_{n-2}, $u_1, \ldots, u_n$, corresponde un groupe $u'_1, \ldots, u'_n$ de points d'un S_{n-2}. On aura

$$u_1 + \ldots + u_n \equiv 0\,,$$
$$u'_1 + \ldots + u'_n \equiv 0\,,$$
$$u'_1 \equiv \pm u_1 + C\,, \ldots, u'_n \equiv \pm u_n + C\,,$$

d'où en sommant

$$n\,C \equiv 0\,,$$
$$C \equiv \frac{\lambda\,\omega_1 + \mu\,\omega_2}{n}\,.$$

Donc la transformation sera une collinéation [14].

[14] Pour $n = 3$ voir la démonstration synthétique de M. Küpper à la pag. 32 du travail déjà cité de ce savant.

De là il suit immédiatement que si deux courbes elliptiques normales $\mathbf{A}^n, \mathbf{B}^n$ de deux espaces S_{n-1}, S'_{n-1} ont leurs points dans une correspondance uniforme telle qu'aux points d'intersection de $\mathbf{A}^n$ avec un certain S_{n-2} de S_{n-1} correspondent les points d'intersection de $\mathbf{B}^n$ avec un S_{n-2} de S'_{n-1}, cette correspondance entre $\mathbf{A}^n$ et $\mathbf{B}^n$ est déterminée par une collinéation entre S_{n-1} et S'_{n-1}.

19. Maintenant supposons que l'on ait dans un espace S_n une surface réglée elliptique de l'ordre n. Deux espaces S_{n-1}, S'_{n-1} de S_n la couperont suivant deux courbes elliptiques normales $\mathbf{A}^n, \mathbf{B}^n$. En considérant sur celles-ci comme correspondants deux points placés sur une même génératrice, on voit qu'il y a entre leurs points une correspondance uniforme dans laquelle les n points de l'S_{n-2} d'intersection de S_{n-1}, S'_{n-1} se correspondent à eux-mêmes. Donc, en force de ce que nous avons prouvé au n^0 précédent, cette correspondance sera déterminée par une collinéation entre S_{n-1}, S'_{n-1}; et comme il y a n points indépendants doubles pour cette collinéation dans l'S_{n-2} d'intersection, tous les points de celui-ci seront des points doubles et la collinéation sera en conséquence une perspective par rapport à un centre, c'est-à-dire les droites joignant deux points correspondants de S_{n-1}, S'_{n-1}, et en particulier de $\mathbf{A}^n, \mathbf{B}^n$, passeront par un point fixe. Donc la surface réglée est un cône. Ainsi:

Il n'y a pas de surfaces réglées elliptiques de l'ordre n *appartenant à un espace à* n *dimensions, en dehors des cônes projetant les courbes elliptiques normales* (15).

D'après cela nous pouvons dire maintenant de connaître parfaitement quelles sont les surfaces à deux dimensions de l'ordre n qui appartiennent à un S_n. M. Del Pezzo avait déjà prouvé (16) que celles qui appartiennent à un S_{n+1} sont les surfaces réglées rationnelles normales et en outre, pour $n = 4$, une certaine surface non réglée du 4^e ordre de l'espace à 5 dimensions. Un raisonnement semblable à celui par lequel il était parvenu à ce résultat prouve (ce qu'il a bien remarqué et qui n'est aussi q'un cas particulier d'une proposition générale qu'il va publier) (*) que les surfaces de l'ordre n de S_n, en dehors de certaines exceptions particulières, sont

(15) Un raisonnement analogue pourra servir, à ce qu'il semble, pour établir une proposition plus générale relative à des surfaces réglées de genre quelconque.

(16) *Sulle superficie di ordine* n *immerse nello spazio di* n + 1 *dimensioni*. Rend. Acc. Napoli, settembre 1885.

(*) P. Del Pezzo, *Sulle proiezioni di una superficie e di una varietà dello spazio ad* n *dimensioni*, Rend. Acc. Napoli, agosto 1886 (N. d. R.).

réglées. Or ces surfaces réglées peuvent être rationnelles ou elliptiques. Celles rationnelles sont connues, comme projections des surfaces réglées rationnelles normales de l'ordre n de S_{n+1} ; et quant à celles elliptiques nous avons vu que, comme elles sont des cônes, leur étude se réduit à celui des courbes elliptiques normales.

Turin, Janvier 1886.