Corrado Segre

Intorno ai punti di Weierstrass di una curva algebrica

Rend. della R. Acc. Naz. Lincei, Vol. **8** (1899), p. 89–91

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. 430–432

XX.

INTORNO AI PUNTI DI WEIERSTRASS DI UNA CURVA ALGEBRICA

« Atti della Reale Accademia dei Lincei »,
Rendiconti; Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali,
serie quinta, vol. VIII, 1899-2° semestre, pp. 89-91.

Si soglion chiamare *punti di* WEIERSTRASS (¹) di un ente algebrico ∞^1 del genere p quei punti che sono almeno p-pli per gruppi della serie canonica g_{2p-2}^{p-1}; sicchè sulla curva canonica C d'ordine $2p-2$ dello spazio S_{p-1}, imagine dell'ente, sono raffigurati da' punti in ciascuno dei quali l'iperpiano osculatore ha con C un contatto almeno p-punto (²).

Il numero di questi punti è espresso *in generale* da $p(p^2-1)$. Ciò è ben noto, e rientra ad esempio in quel caso particolare di una formola del DE JONQUIÈRES che dà il numero dei punti $(r+1)$-pli di una g_n^r (³).

D'altra parte il sig. HURWITZ ha determinato (⁴) per quante unità vada computato nel detto numero $p(p^2-1)$ un dato punto comunque singolare per la curva C. Se escludiamo il caso iperellittico, un punto qualunque di C sarà origine di un solo ramo, lineare, i cui successivi *ranghi* indicheremo con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-2}$: sicchè le moltiplicità d'intersezione di quel ramo con la tangente, col piano

---

(¹) V. ad es. M. HAURE, *Recherches sur les points de* WEIERSTRASS *d'une courbe plane algébrique,* Ann. Ecole Norm. Supér., (3) 13, 1896.

(²) Cfr. la mia *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito,* Ann. mat., (2) 22, 1894 (v. specialmente i n.ⁱ 87 e seg.) [V. p. 198 di questo volume].

(³) Cfr. loc. cit. n. 42. La formola del DE JONQUIÈRES si trova nel Journal für Math., t. 66, 1866.

(⁴) *Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich,* Math. Ann., XLI, 1893.

osculatore, ..., coll'S_k osculatore $(1 \leq k \leq p-2)$, saranno $1+\alpha_1$, $1+\alpha_1+\alpha_2, \ldots, 1+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k$. Con tali notazioni, la moltiplicità di quel punto fra i punti di WEIERSTRASS risulta espressa da

$$W=(p-2)(\alpha_1-1)+(p-3)(\alpha_2-1)+\ldots+2(\alpha_{p-3}-1)+(\alpha_{p-2}-1).$$

Anche ciò rientra come caso particolare in una formola che dà l'influenza di un punto qualunque nel numero dei punti $(r+1)$-pli di una g_n^r (5).

Ora è facile determinare un limite superiore per l'espressione W. In fatti si consideri in generale un S_k $(k<p-2)$, al quale appartenga un gruppo di m punti di C, ove $m>k+1$. Quel gruppo imporrà solo $k+1$ condizioni ai gruppi canonici (cioè agl'iperpiani) che lo contengono. Quindi, pel teorema RIEMANN-ROCH, la serie lineare completa (speciale) d'ordine m da esso determinata sarà di dimensione $\mu=m-k-1$. Inoltre lo stesso teorema conduce, come si sa, al fatto che per una g_m^μ speciale, se si tolgono (come qui si fa) il caso iperellittico e quello della serie canonica, è sempre $m \geq 2\mu+1$ (6). Sarà dunque nel nostro caso $m \geq 2(m-k-1)+1$, ossia $m \leq 2k+1$. *Sulla curva canonica di genere* p *non possono esistere più di* 2k + 1 *punti giacenti in un* S_k, *ove* $\mathrm{k}<\mathrm{p}-2$.

Questa proposizione varrà anche se i punti considerati di C sono infinitamente vicini. Quindi pel punto di WEIERSTRASS, i cui ranghi abbiamo chiamato $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, sicchè l'$S_k$ osculatore si può riguardare come contenente $1+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k$ punti infinitamente vicini di C, essa ci dice che, se $k<p-2$, quel numero di punti sarà $\leq 2k+1$, ossia

$$(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+\ldots+(\alpha_k-1) \leq k.$$

Sommando le relazioni che si traggono da questa ponendovi $k=1, 2, \ldots, p-3$, insieme con la seguente che deriva dal fatto che l'iperpiano osculatore non può avere con C moltiplicità d'intersezione maggiore di $2p-2$

$$(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+\ldots+(\alpha_{p-2}-1) \leq p-1,$$

si ha precisamente

$$W \leq \frac{(p-1)(p-2)}{2}+1;$$

(5) V. la citata *Introduzione,* n. 43.

(6) Cfr. loc. cit., n. 84.

ossia: *Nel numero complessivo* $p(p^2-1)$ *dei punti di* WEIERSTRASS *di un ente algebrico (non iperellittico) del genere* p *nessun punto può contare per più di* $(p-1)(p-2)/2+1$.

Ne segue subito che: *i punti di* WEIERSTRASS *fra loro distinti sono almeno*

$$\frac{2p(p^2-1)}{(p-1)(p-2)+2} = 2p+6+\frac{8(p-3)}{p(p-3)+4}.$$

Ossia: *per* $p=3, 5, 6$ *i punti di* WEIERSTRASS *fra loro distinti sono almeno* $12, 18, 20$; *per* $p>3$ *sono sempre in numero maggiore di* $2p+6$.

Questi risultati sono alquanto più espressivi di quelli ottenuti dal sig. HURWITZ nella Nota citata: cioè che $W < p(p-1)/2$, e che quindi il numero dei punti di WEIERSTRASS distinti (se si esclude il caso iperellittico) è sempre maggiore di $2p+2$ (7). Del resto anche HURWITZ ha avvertito che si potevano ottenere risultati più precisi mediante una più minuta discussione; la quale porterebbe ad esaminare quali valori dei ranghi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ siano effettivamente possibili (8). Volendo fare un tale esame seguendo l'indirizzo geometrico si potrebbe osservare che se ad es. il rango α_k è >1, esisterà sull'ente algebrico considerato una serie lineare, priva di punti fissi, d'ordine $1+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k\ (\leq 2k+1)$, e dimensione $(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+\ldots+(\alpha_k-1)$ (9). L'esistenza di una tal serie sarà generalmente una particolarità per l'ente algebrico, e quando la dimensione riesca >1 permetterà di assegnare un limite superiore pel genere. Se poi due ranghi, α_k, α_l, sono >1, si avranno sull'ente algebrico due particolari serie lineari senza punti fissi, le quali, prese insieme, serviranno pure per ottenere una rappresentazione dell'ente da cui segua di nuovo una limitazione pel genere. E così via.

---

(7) Quest'ultima proposizione serve in quella Nota per dedurne una semplice notevole dimostrazione del fatto che sopra un ente di genere >1 non possono esistere infinite corrispondenze algebriche biunivoche.

(8) Si vedano a questo riguardo le citate ricerche del sig. HAURE.

(9) Ciò in forza di osservazioni precedenti e di un teorema del sig. NOETHER. Cfr. anche il n. 87 della mia *Introduzione*.