I Grandi Matematici Italiani online

Corrado Segre

Corrado Segre

Su alcuni punti singolari delle curve algebriche, e sulla linea parabolica di una superficie

Rend. R. Acc. Naz. Lincei, Vol. **6** (1897), p. 168–175

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 1–8

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_1>

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

XXII.

SU ALCUNI PUNTI SINGOLARI DELLE CURVE ALGEBRICHE, E SULLA LINEA PARABOLICA DI UNA SUPERFICIE

« Atti della Reale Accademia dei Lincei »,
Rendiconti; Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali,
serie quinta, vol. VI, 1897 - 2º semestre, pp. 168-175.

1. Sia dato un punto, il quale stia, con singolarità qualunque, su una o più curve algebriche. Si soglion considerare per esso certi numeri invarianti per trasformazioni proiettive: come le multiplicità, immediate e successive, gli ordini dei vari rami completi, le loro classi, ecc., i contatti fra questi rami, ecc.: numeri da cui dipendono i caratteri plückeriani delle curve, le loro multiplicità d'intersezione nel punto nominato, ecc. All'infuori di questi vi sono altri *invarianti delle singolarità*, i quali si presentano in altre questioni, pure importanti.

Limitiamoci, per brevità, alle curve piane: sebbene, come il lettore vedrà, la considerazione seguente si possa subito estendere alle curve sghembe. Prendiamo in un piano due *rami parziali* di una stessa curva algebrica, o di due curve algebriche diverse, i quali abbiano la stessa origine O e la stessa tangente t, ed abbiano inoltre con questa un contatto ugualmente elevato, cioè μ-punto, o d'ordine $\mu - 1$, dove μ indichi un numero intero o fratto, maggiore di 1. Assumendo coordinate cartesiane xy con O per origine e t per asse delle x, lo sviluppo di y in serie di potenze di x sarà pel 1^0 ramo parziale

$$y = ax^{\mu} + \dots, \tag{1}$$

e pel 2^0 ramo

$$y' = a'x^{\mu} + \dots. \tag{1'}$$

Similmente, se si prende un altro sistema di coordinate cartesiane XY, differente da quello solo pel cambiamento dell'asse delle y, si avrà pel 1^0 ramo

$$Y = AX^{\mu} + \dots, \tag{2}$$

e pel 2^0 ramo

$$Y' = A'X^{\mu} + \dots. \tag{2'}$$

Ora le formole che legano i due sistemi di coordinate siano

$$x = pX + qY$$

$$y = rY.$$

Sostituendole nella (1), viene

$$rY = a(pX + qY)^{\mu} + \dots;$$

e qui ponendo per Y in ambi i membri lo sviluppo (2), e poi confrontando i termini simili, cioè con le stesse potenze di X, si hanno relazioni che possono servire a ricercare gl'invarianti sopra nominati. Limitandoci qui al confronto dei termini più bassi, cioè dei termini in X^{μ}, otteniamo subito

$$A = a\frac{p^{\mu}}{r}.$$

Analogamente pel 2^0 ramo, dagli sviluppi (1′) e (2′) si trae

$$A' = a'\frac{p^{\mu}}{r}.$$

Quindi

$$A : A' = a : a';$$

ossia: il rapporto $a : a'$ relativo agli sviluppi (1) e (1′) è indipendente dalle coordinate (cioè dalla scelta dell'asse delle y). D'altra parte quel rapporto ha un significato geometrico assai semplice: esso è il limite del rapporto $y : y'$ delle ordinate di due punti situati sui due rami e corrispondenti ad una stessa ascissa x, quando questa diminuisca indefinitamente. Abbiamo dunque il seguente risultato: *se una trasversale condotta secondo una direzione assegnata (diversa da quella della tangente) taglia i due rami nei due punti* P, P′ *e la tangente nel punto* T, *e la si fa variare in modo che venga a passare per l'origine* O *dei rami, il rapporto dei segmenti* TP, TP′ *tende ad un limite ben determinato, indipendente dalla direzione di quella trasversale.*

Evidentemente il limite del rapporto $TP : TP'$ è lo stesso che quello del birapporto $(MTP'P)$, ove M indichi un punto qualunque della trasversale, il quale rimanga a distanza finita dai tre punti

P, P', T, infinitamente vicini tra loro. Dunque: *quel limite, indipendente dalla direzione della trasversale, si può anche definire come il limite del birapporto* (MTP′P), *essendo* M *un punto qualunque che rimanga ben distinto dall'origine* O *dei rami.* Di qui appare che: *esso è un invariante, per trasformazioni projettive, del sistema dei due rami.*

Possiamo ancora dare allo stesso rapporto una forma metrica notevole. Assumiamo per asse delle y la normale in O a t; e consideriamo le curvature dei due rami nei due punti P, P' corrispondenti ad una stessa x infinitesima. Se facciamo i calcoli trascurando sempre gl'infinitesimi superiori, possiamo anzitutto riguardare come uguali fra loro (e uguali ad x) gli archi infinitesimi OP, OP' dei due rami. Quindi il rapporto delle curvature nominate, in P, P', sarà uguale al rapporto degli angoli (di contingenza) delle tangenti ai due rami in P, P' con la t. L'angolo che fa con t la tangente in P al 1^0 ramo si può sostituire con la propria tangente trigonometrica dy/dx, cioè, in causa della (1), con $\mu a x^{\mu-1}$; e similmente l'angolo di t colla tangente in P' al 2^0 ramo verrà uguale a $\mu a' x^{\mu-1}$: onde il rapporto dei due angoli sarà $a : a'$. Dunque: *la quantità invariabile per trasformazioni projettive, a cui si riferivano gli enunciati precedenti, è il limite al quale tende il rapporto delle curvature dei due rami in due punti infinitamente vicini all'origine* O, *situati su una stessa perpendicolare alla tangente* t. Le curvature dei due rami in P, P', cioè $\mu(\mu-1)\,a x^{\mu-2}$, $\mu(\mu-1)\,a' x^{\mu-2}$, acquistano valore (limite) nullo od infinito quando quei punti vengono in O, se è $\mu \gtrless 2$; mentre se $\mu = 2$ le curvature in O prendono i valori finiti $2a$, $2a'$. *Nel caso di* $\mu = 2$ *l'invariante considerato si può definire brevemente come il rapporto delle curvature dei due rami nella loro origine comune.*

2. Se son date una o più curve di un piano, passanti per O, basterà accoppiare in esse (ove esistano) rami parziali uscenti da O, i quali facciano parte di cicli (o rami completi) diversi [1], ma abbiano comune la tangente e l'ordine di contatto con questa: formando per tutte queste coppie di rami parziali i rapporti invarianti definiti nel n. 1 si otterranno degl'invarianti relativi alle date curve ed alle singolarità che esse hanno in O.

---

(1) Due rami parziali di uno stesso ciclo non darebbero evidentemente nulla di utile: l'invariante $a : a'$ si ridurrebbe per essi ad una radice dell'unità.

Così se O è un *ordinario* punto di contatto per due curve, oppure è punto di contatto per due rami lineari (di 1^0 ordine e 1^a classe) di una stessa curva, otteniamo come invariante il rapporto delle curvature in O delle due linee o dei due rami. La proposizione che stabilisce il carattere projettivo di questo rapporto è dovuta, pare, al sig. MEHMKE (2), ed anche al sig. WÖLFFING (3): quest'ultimo vi fu condotto da un'osservazione anteriormente fatta, e che citerò tosto, su un particolare punto di contatto di due rami. Prima però consideriamo, più in generale, una curva f avente in O un punto doppio con un'unica tangente t, e con due rami a contatto μ-punto con t, essendo μ un intero qualunque ≥ 2. Assumendo ancora O come origine delle coordinate e t come asse delle x, l'espressione di f, ordinata secondo le potenze crescenti di y, e (subordinatamente) di x, sarà

$$f \equiv (\alpha x^{2\mu} + \ldots) + y(\beta x^{\mu} + \ldots) + y^2(\gamma + \ldots) + \ldots ; \tag{3}$$

ove $\alpha\gamma \neq 0$, mentre β potrà anche esser nulla. Gli sviluppi in serie che rappresentano i due rami saranno dati dalle (1) e (1′), ove a e a' son le radici dell'equazione in $\mathbf{a}$

$$\alpha + \beta \mathbf{a} + \gamma \mathbf{a}^2 = 0 .$$

Quindi l'invariante $a : a'$ del n. 1 viene in questo caso ad esprimersi mediante il rapporto $\beta^2 : \alpha\gamma$ formato coi coefficienti di f; e però anche questa quantità $\beta^2 : \alpha\gamma$ (la quale, diminuita di 2, darebbe la somma dell'invariante primitivo col suo reciproco) sarà un invariante della curva f; il che si verifica anche direttamente trasformando la (3).

Supponiamo ora che nella (3) sia $\beta = 0$: ciò si può interpretare geometricamente dicendo che la curva 1^a polare di un punto generico del piano rispetto ad f, invece di avere in O con t incontro μ-punto, ha incontro più elevato. Da $\beta = 0$ seguirà $a : a' = -1$. Dunque: una trasversale che tagli t in un punto T infinitamente vicino ad O incontra i due rami in due punti P, P' infinitamente vicini ad O, i quali sono equidistanti da T; o, se la trasversale è perpendi-

(2) *Einige Sätze über die räumliche Collineation und Affinität, welche sich auf die Krümmung von Curven und Flächen beziehen* (Zeitschrift für Math. u. Phys., 36, 1891). Qui anzi la proposizione è data (fra molte altre della stessa natura) in generale per curve sghembe. In una Nota successiva, dello stesso volume, essa viene estesa a trasformazioni puntuali più generali che quelle projettive.

(3) *Das Verhältniss der Krümmungsradien im Berührungspunkte zweier Curven* (Zeitschrift für Math. u. Phys., 38, 1893).

colare a t, sono simmetrici rispetto a t. Più brevemente: nell'intorno di O i due rami sono disposti simmetricamente rispetto alla tangente t. Oppure, sotto forma projettiva, profittando della rappresentazione di $a:a'$ come birapporto (n. 1): nell'intorno di O i due rami si possono riguardare come corrispondenti in un'omologia armonica di asse t e col centro in un punto arbitrario esterno a t.

Se è $\mu = 2$, l'equazione (3), o, se si vuole,

$$f \equiv \gamma y^2 + y\varphi_2 + \varphi_4 + \varphi_5 + \cdots, \tag{4}$$

dove le φ sono forme di x, y, degli ordini indicati dai loro indici, rappresenta una curva che ha in generale in O un *tacnodo* ordinario, punto di contatto di due rami completi di 1^0 ordine e 1^a classe. La supposizione che nella (3) sia $\beta = 0$, cioè che manchi il termine in x^2y, sicchè l'insieme dei termini di 3^0 grado contenga il fattore y^2, dà un particolare tacnodo, che si può chiamare *tacnodo armonico* o *tacnodo simmetrico*. Quest'ultima denominazione è usata dal sig. WÖLFFING, il quale s'è imbattuto in questa singolarità nello studio del covariante Hessiano, rilevando che: mentre un tacnodo ordinario di una curva f è triplo per la Hessiana di f, un tacnodo nel quale le due curvature siano uguali e opposte è quadruplo per la Hessiana (4). Avvertiamo, di passaggio, che ha luogo la seguente proposizione più generale (5): *Se una curva* f *ha in* O *un punto* s*-plo coll'unica tangente* t, *la sua Hessiana, la quale avrebbe in generale in* O *multiplicità* 3s — 3, *avrà invece una multiplicità maggiore solo quando nell'equazione di* f *riferita ad* O *come origine e a* t *come asse* y = 0 *manchino tutti quei termini di grado* s + 1 *che non contengono il fattore* y^{s}; *vale a dire quando la polare d'ordine* s + 1 *di* O *rispetto ad* f *contiene la retta* t *contata* s *volte* (cioè ha un punto $(s+1)$-plo P); *ossia quando* O *è punto* (s + 1)*-plo per una 1^a polare di* f (la 1^a polare del punto P ora nominato) (6).

Ritornando al tacnodo simmetrico, per esso si hanno, in quest'ultimo enunciato, ponendo $s = 2$, le seguenti proprietà caratteristiche: che la cubica polare del punto stesso si spezza nella tangente

(4) WÖLFFING, *Ueber die Hesse'sche Covariante einer ganzen rationalen Function von ternären Formen* (Math. Ann., XXXVI, 1889-90, p. 119).

(5) La si può trovare, ad esempio, in un mio lavoro che comparirà in un prossimo fascicolo del Giornale di BATTAGLINI. [Queste «Opere», vol. 1^0, p. 426].

(6) Sotto l'ultima forma questo teorema è contenuto in quello con cui finisce la Memoria del sig. E. KÖTTER, *Die Hesse'sche Curve in rein geometrischer Behandlung* (Math. Ann., XXXIV, 1888-89).

contata due volte ed un'altra retta; o che il tacnodo simmetrico è un punto doppio per f e triplo per una certa 1ª polare. Converrà ricordare anche l'interpretazione già accennata della condizione $\beta = 0$, vale a dire: mentre un tacnodo ordinario è semplice punto di contatto per la rete delle 1ᵉ polari, un tacnodo simmetrico O di f è punto d'inflessione con la tangente fissa t per la rete delle 1ᵉ polari. Ed aggiungiamo ancora che: se O è un tacnodo ordinario con la tangente t, la 1ª polare di un punto generico di t ha O per punto doppio con *una* tangente in t; mentre se O è un tacnodo simmetrico, *entrambe* le tangenti in esso alla 1ª polare di un punto generico di t cadono in t.

3. I tacnodi simmetrici delle curve piane si presentano nello studio della linea parabolica di una superficie. Si ha cioè il seguente teorema: *Affinchè un punto semplice di una superficie algebrica* F *sia doppio per la linea parabolica, è necessario e sufficiente che per la curva intersezione di* F *col piano tangente nel punto questo sia un tacnodo simmetrico, oppure sia un punto triplo.*

Sia in fatti O un punto semplice di F, situato nella superficie Hessiana, e quindi sulla linea parabolica di F; in modo che il piano π tangente in O ad F seghi questa secondo una curva f avente in O un punto doppio (non triplo) con un'unica tangente t (tangente principale di F). Nel piano π la traccia del piano tangente in O alla Hessiana, cioè la tangente in O alla linea parabolica di F, sarà, com'è noto, quella retta t' la quale con t separa armonicamente tutte le coppie di tangenti in O alle prime polari dei punti di t rispetto ad f; o, ciò che è lo stesso, la congiungente di O all'unico flesso (diverso da questo punto) della cubica polare di O rispetto ad f (7). Nel caso ordinario, in cui O è una cuspide di 1ª specie per f, la retta t' è ben determinata e diversa da t. Se poi O è per f un tacnodo ordinario, la tangente t' alla linea parabolica coincide colla tangente principale t: perchè allora la prima polare di un punto di t rispetto ad f ha in O come *una* tangente la t. La retta t' diverrà indeterminata solo quando in t cadono *entrambe* le tangenti in O alla 1ª polare di un punto generico di t rispetto ad f: ossia (v. la fine del n. 2) quando O è per f un tacnodo armo-

(7) Si trova questa proposizione (enunciata nel 2º modo) a p. 21 della Memoria di CLEBSCH: *Zur Theorie der algebraischen Flächen*, 1863 (Journal für Math., 63). V. anche le dimostrazioni più geometriche dei sig. CREMONA e STURM nelle loro Memorie premiate sulla teoria delle superficie cubiche; ed una proposizione più generale alla fine di questa Nota.

nico. In questo caso dunque il piano tangente in O all'Hessiana coincide con π, vale a dire la curva parabolica di F ha in O un punto doppio.

Si può ottenere un teorema più generale col seguente calcolo, già iniziato dal sig. ROHN (8). Si prenda come origine il punto O, semplice per la superficie F, e come piano $z = 0$ il piano tangente ad F in O; e suppongasi che questo piano intersechi F secondo una curva avente in O un punto s-plo ($s \geq 2$). Si potrà porre

$$F \equiv (\alpha_s + \alpha_{s+1} + \ldots) + z(1 + \beta_1 + \ldots) + z^2(\gamma_0 + \gamma_1 + \ldots) + \ldots$$

ove le $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sono forme di x e y degli ordini (crescenti) indicati dai loro indici. Formiamo il determinante Hessiano di F e sviluppiamolo, ordinandolo, come F, secondo le potenze ascendenti di z, e, subordinatamente, secondo gli ordini nella coppia di variabili x, y. Si trova, se n è l'ordine di F, il prodotto di $-(n-1)^2$ per

$$H \equiv (\varphi_{2s-4} + \varphi_{2s-3} + \ldots) + z(\psi_{s-2} + \psi_{s-1} + \ldots) + z^2(\chi_0 + \chi_1 + \ldots) + \ldots,$$

dove le $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ sono forme di x e y degli ordini indicati dai loro indici. E precisamente si vede (come già osservò il sig. ROHN) che φ_{2s-4} è la forma Hessiana binaria di α_s; e che (qui c'importa aggiungere) φ_{2s-3} ha la seguente espressione

$$\varphi_{2s-3} \equiv 2\frac{s-2}{s-1}\beta_1\,\varphi_{2s-4} + \overset{11}{\alpha_s}\,\overset{22}{\alpha_{s+1}} + \overset{22}{\alpha_s}\,\overset{11}{\alpha_{s+1}} - 2\overset{12}{\alpha_s}\,\overset{12}{\alpha_{s+1}}.$$

dove gli apici superiori 1, 2 indicano derivazioni rispetto ad x, y. Quindi se φ_{2s-4} s'annulla identicamente, pel fatto che, ad esempio, $\alpha_s \equiv y^s$, rimane

$$\varphi_{2s-3} \equiv s(s-1)\,y^{s-2}\,\overset{11}{\alpha_{s+1}};$$

e però φ_{2s-3} s'annullerà anch'essa solo quando α_{s+1} sia del 1^0 grado rispetto ad x. Premesso ciò, e venendo alla curva parabolica di F, osserviamo che essa è l'intersezione di due superficie; l'una delle quali, F, ha in O un punto semplice, col piano tangente $z = 0$ che dà una sezione f avente O s-plo; mentre l'altra, H, è tale che in essa la z a prima potenza è moltiplicata per forme di x, y di ordini $\geq s-2$, e che il piano $z = 0$ la sega secondo una curva f' avente in O multiplicità $s' = 2s-4,\ 2s-3,\ 2s-2, \ldots$ a seconda dei casi. Orbene da queste condizioni in cui si trovano le due superficie è permesso conchiudere che nei tre casi $s' = 2s-4$, $s' = 2s-3$, $s' = 2s-2$ il numero s' dà la multiplicità in O della linea d'inter-

(8) A p. 102 dello scritto: *Das Verhalten der Hesse'schen Fläche in den vielfachen Punkten und vielfachen Curven einer gegebenen Fläche* (Math. Ann., XXIII, 1883-84).

sezione, e che nei primi due casi le tangenti in O a questa sono le tangenti in O ad f' (9). Applicando anche le osservazioni precedenti otteniamo dunque i seguenti risultati. 1^0) *Se le* s *tangenti principali di* F *in* O *non coincidono tutte in una, la linea parabolica ha in* O *multiplicità* 2s — 4 *e per tangenti l'Hessiano binario del gruppo di quelle* s *tangenti principali* (ROHN, loc. cit.). 2^0) *Se le* s *tangenti principali di* F *in* O *coincidono in una retta* t, *la linea parabolica ha in generale in* O *multiplicità* 2s — 3 *e per tangenti: la retta* t *contata* s — 2 *volte, e le* s — 1 *rette costituenti la* 2^a *polare di un punto qualunque di* t *rispetto alla curva polare d'ordine* s + 1 *di* O *rispetto ad* f (*essendo* f *la traccia di* F *sul piano tangente in* O), *ossia le* s — 1 *rette che congiungono* O *ai flessi di questa curva d'ordine* s + 1. 3^0) *Perchè il punto* O *sia multiplo almeno secondo* 2s — 2 *per la linea parabolica è necessario e sufficiente che, oltre a coincidere in una retta* t *le* s *tangenti principali di* F, *la retta* t *contata* s *volte faccia parte della curva d'ordine* s + 1 *dianzi nominata, cioè che* O *sia punto* (s + 1)*-plo per una curva 1^a polare rispetto ad* f. (*)

---

(9) Ciò si dimostra segando con un piano qualunque passante per O, e in particolare con un piano passante per una di quelle tangenti di f', e calcolando la multiplicità d'intersezione in O delle sezioni fatte da quel piano nelle due superficie. Cfr. il n. 12 della mia Memoria già citata del Giornale di BATTAGLINI. [Queste « Opere », Vol. 1^0, p. 401].

(*) In un estratto del presente lavoro, che è stato trovato tra le carte dell'A., questi ha aggiunto in margine le due postille manoscritte che qui si trascrivono.

a) in fine della nota (3): « Pare invece che quella proposizione sia stata data « per la prima volta da H. J. STEPHEN SMITH, *On the focal properties of homographic « figures*, Proc. London math. soc., II, pp. 196-248; in Coll. math. papers, 1, fine « p. 562, è asserita quell'invarianza, ma non mi pare che vi sia una vera dimostra« zione. Teoremi relativi ad invarianti più generali che il rapporto delle curvature « sono dati da E. O. LOVETT, *Note on differential invariants of a system of* m *points « by projective transformation*, Amer. math. journal, 21, 1899. »

b) in margine di fianco al 2^0 comma del n. 2: « Per dualità o reciprocità « quel rapporto si muta nel suo inverso ». La giustificazione di quest'ultima affermazione è contenuta nel seguente calcolo, che si trova, insieme con altri calcoli appena avviati, in alcuni fogli manoscritti dell'A.:

« $$y = ax^2 + \dots;$$

« $$Y - ax^2 - \dots = (2ax + \dots)(X - x);$$

« $$(2ax + \dots)X - Y - ax^2 + \dots = 0;$$

» $$p = \frac{u_1}{u_2} = -2ax - \dots; \qquad q = \frac{u_3}{u_2} = ax^2 + \dots;$$

« $$x = -\frac{1}{2a}p + \dots; \qquad q = a\left(-\frac{1}{2a}p + \dots\right)^2 + \dots = \frac{1}{4a}p^2 + \dots$$

« quindi per dualità al rapporto a/a' risponde a'/a. Ossia: l'invariante di due rami « lineari si esprime anche nel modo duale, quando si scambino i due rami. » (N.d.R.).