Corrado Segre

Aggiunta alla memoria: Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi

Rend. Circolo Mat. Palermo, Vol. **30** (1910), p. 346–348

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 115–118

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_115>

XXVIII.

AGGIUNTA ALLA MEMORIA : « PRELIMINARI DI UNA TEORIA DELLE VARIETÀ LUOGHI DI SPAZI » (1)

« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo »,
tomo XXX, 1910, 2° semestre, pp. 346-348.

Il sig. C. H. SISAM, dell'Università d'Illinois, mi ha fatto gentilmente osservare che vi sono eccezioni al teorema (n^0 21) enunciato a metà della p. 107 [qui a pp. 96-97]. Se cioè s'indica con A un punto, funzione di un parametro τ_1, con φ delle quantità, funzioni dei parametri $\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_k$, le varietà V_k luoghi dei punti

$$x = \varphi_0 A + \varphi_1 A^1 + \varphi_2 A^{11} + \ldots$$

forniscono esempi di tali eccezioni (2).

La ragione è ovvia. In quell'enunciato si doveva riportare una restrizione, già messa esplicitamente nella precedente p. 106, linea 15 [p. 95, linea 19], cioè: *La data* V_k *dev'essere tale che per un punto generico della varietà* W *luogo dei suoi* S_k *tangenti non passi un'infinità di questi spazi.* In fatti, come ivi è detto, è solo in quest'ipotesi che W ha la dimensione $2k - l + 1$ (supposto $\leq n$); e ciò conduce appunto (p. 107, linea 10 [p. 96, linea 19]) al nostro teorema (3).

Si può domandare: *quando è che una* V_k *presenta appunto quella particolarità, che per un punto generico di ogni suo* S_k *tangente passino sempre infiniti* S_k *tangenti?*

(1) Questi Rendiconti, tomo XXX (2° semestre 1910), pp. 87-121. [Questo volume, pp. 71-114].

(2) In relazione all'argomento di quel n^0 21, voglio pur avvertire che, fin dal principio dello scorso anno 1909, il Dr. SISAM, che allora studiava con me a Torino, mi aveva presentato un suo lavoro sulle V_3 che soddisfano quattro o più equazioni lineari omogenee di 2° ordine alle derivate parziali. Auguro che quella ricerca venga presto pubblicata.

(3) Rivedendo quel breve ragionamento riesce anche evidente la modificazione occorrente per estendere la proposizione alle varietà ora escluse.

Ciò porta a cercare *una varietà* W *luogo di spazi* S_k, *in numero* ∞^k *od anche minore, tale che per un suo punto generico passino* ∞^d, *con* $d > 0$, *di questi spazi.*

Premettiamo un'osservazione generale. Due S_k di W aventi in comune un punto si taglino generalmente secondo un S_m, ove $0 \leq m < k$. Allora, preso un S_k generico α di W, gli altri S_k incidenti ad esso passeranno pei singoli punti di un S_{k-m} fissato ad arbitrio entro α; e quindi saranno ∞^{d+k-m}. Siccome, per ipotesi, il numero complessivo degli S_k di W non supera ∞^k, dovrà essere $m \geq d$. Anzi, se $m = d$ dovranno essere incidenti ad α *tutti* quegli S_k (i quali saranno allora precisamente ∞^k): ossia gli S_k di W s'incontreranno tutti a due a due secondo spazi S_d.

Per $k = 2$, abbiamo una varietà W di al più ∞^2 piani. Sarà certo $d = 1$, e quindi anche (da $k > m \geq d$) $m = 1$. Tutti i piani s'incontreranno a due a due secondo rette variabili. Ne segue che essi stanno tutti in un S_3. Dunque: *le superficie* V_2, *i cui piani tangenti presentano la particolarità voluta, stanno in* S_3.

Sia invece $k = 3$.

Se $d = 1$ e anche $m = 1$, abbiamo W composta di ∞^3 S_3, che s'incontrano a due a due secondo rette variabili. Due S_3 determineranno un S_5, che conterrà ogni altro S_3 di W, perchè passerà per le tracce di questo sui primi due. Questa motivazione sarebbe insufficiente, se le rette d'intersezione degli S_3 a due a due fossero tutte fra loro incidenti. Esse però non potrebbero stare tutte in un piano, perchè ogni punto di W sta su alcuna di quelle rette. Passerebbero dunque per uno stesso punto O, comune a tutti gli S_3. Pel nostro problema iniziale della V_k, quest'ipotesi sarebbe assurda nel caso attuale: perchè dallo stare O su tutti gli S_3 tangenti alla V_3 si deduce subito che questa varietà sarebbe un cono (di vertice O), e quindi il numero dei suoi S_3 tangenti risulterebbe minore di ∞^3.

Se $d = 2$, e quindi anche (per la relazione $k > m \geq d$) $m = 2$, gli S_3 si segano a due a due secondo piani variabili, e quindi giacciono tutti in un S_4.

Infine rimane il caso $d = 1$ e $m = 2$. Due S_3 di W, se hanno in comune un punto, si segano secondo un piano. Ne segue che due S_3 incidenti ad un terzo saranno pure incidenti fra loro. Si potranno dunque ripartire tutti gli S_3 di W in sistemi, ognun dei quali si compone di spazi incidenti tra loro a due a due secondo piani variabili. Ciascuno di questi sistemi starà in un S_4, e sarà ∞^2 (il numero ∞^{d+k-m} di sopra).

Per la V_3 abbiamo così, che, se essa non sta in un S_5, dovrà comporsi di ∞^1 superficie giacenti rispettivamente in $\infty^1 S_4$, ognun dei quali contiene gli $\infty^2 S_3$ tangenti alla V_3 nei punti della rispettiva superficie. Si vede subito che questi $\infty^1 S_4$ dovranno formare una V_5 *sviluppabile* ordinaria [4]. In fatti essi sono tangenti alla V_3, ossia a tutte le linee tracciate su questa: onde (*Preliminari* n⁰ 4) su ciascun S_4 della ∞^1 sono punti *singolari* per questa tutti i punti della V_3 contenuti in quello. D'altronde l'insieme di tutti i punti singolari dello S_4 è uno spazio (*Preliminari* n⁰ 2); e qui dovendo questo spazio contenere tutta una superficie, sarà un piano o un S_3. Ma la prima ipotesi non è possibile, perchè allora la V_3 si comporrebbe di ∞^1 piani, sì che gli S_3 tangenti ad essa nei punti di un piano starebbero in un S_4, cioè formerebbero fascio; e non accadrebbe che per un punto di un S_3 tangente alla V_3 passino infiniti S_3 tangenti. Resta dunque soltanto l'ipotesi che ogni S_4 della ∞^1 abbia un S_3 di punti singolari: sicchè la ∞^1 si compone degli S_4 di una sviluppabile ordinaria. Risulta che la V_3 sarà il luogo di ∞^1 superficie giacenti rispettivamente negli S_3 di quella sviluppabile.

Effettivamente quando una V_3 è così costituita, sta cioè su una V_4 sviluppabile, i suoi S_3 tangenti stanno sugli S_4 tangenti di questa V_4, e quindi riempiono infinite volte, in generale, la V_5 luogo di quegli S_4.

Concludendo, la discussione fatta per $k = 3$ ci dà questo risultato: *Una* V_3 *tale che un punto generico di ogni suo* S_3 *tangente stia sempre su infiniti* S_3 *tangenti, o giace in un* S_5, *oppure sta su una* V_4 *sviluppabile ordinaria; e viceversa.*

Analiticamente, possiamo dire che un punto x da cui la V_3 è descritta, o è combinazione lineare di 6 punti fissi, oppure si può rappresentare in uno dei seguenti modi:

$$\varphi_0 A + \varphi_1 A^1 + \varphi_2 A^{11} + \varphi_3 A^{111},$$
$$\varphi_0 A + \varphi_1 A^1 + \varphi_2 A^{11} + \varphi_3 B,$$
$$\varphi_0 A + \varphi_1 A^1 + \varphi_2 B + \varphi_3 C,$$
$$\varphi_0 A + \varphi_1 B + \varphi_2 C + \varphi_3 D,$$

dove B, C, D indicano punti fissi, A un punto funzione del parametro τ_1 (rispetto a cui son fatte le derivazioni indicate dagl'indici

[4] S'intende qui per *varietà sviluppabile,* non solo quella costituita dagli spazi di data dimensione osculatori ad una curva fissa, ma anche un *cono* che projetti una siffatta varietà.

superiori), e le φ delle quantità funzioni dei parametri variabili $\tau_1 \tau_2 \tau_3$ (od anche, volendo, dei soli τ_2 e τ_3).

Tralascio di estendere a k qualunque la ricerca che così s'è fatta per $k = 2$ e $k = 3$. E finisco rilevando che il teorema di p. 107 [pp. 96-97], così completato, conduce, per via geometrica, alla risoluzione della seguente questione analitica: Come dev'essere un sistema di più che $k(k-1)/2$ equazioni lineari omogenee alle derivate parziali di 2^0 ordine, per una funzione di k variabili indipendenti, se le soluzioni linearmente indipendenti sono più che $2k$? e quale forma caratteristica si potrà dare a queste soluzioni?

Torino, 9 Luglio 1910.