Corrado Segre

Sulle congruenze rettilinee W di cui una od ambe le falde focali sono rigate

Atti. R. Acc. Scienze Torino, Vol. **49** (1913-14), p. 257–269

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 119–129

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_119>

XXIX.

SULLE CONGRUENZE RETTILINEE W DI CUI UNA OD AMBE LE FALDE FOCALI SONO RIGATE

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino »,
Vol. XLIX, 1913-14, pp. 257-269.

1. Una *curva* L sia tale che, per ogni suo punto, entro al piano osculatore, passi una retta di una congruenza lineare fissa N. Dico che la curva (cioè ogni sua tangente) starà in un complesso lineare di rette passante per N.

La cosa riesce intuitiva se riguardiamo L come costituita di punti *successivi*, infinitamente vicini, $\ldots a\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ Nel fascio dei complessi lineari passanti per N consideriamo quello che contiene la retta (tangente) aa_1. Per ipotesi nel piano (osculatore) aa_1a_2 sta una retta di N passante per a_1, e diversa in generale da aa_1. Così al complesso lineare considerato appartengono due rette di quel piano, passanti per a_1; e quindi gli apparterrà pure la retta $a_1\, a_2$. Da ciò si dedurrà similmente che il complesso contiene la $a_2\, a_3$; poi la $a_3\, a_4$, e così via.

Volendo invece una dimostrazione analitica, rappresentiamo le coordinate omogenee projettive $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ dei punti x di L come funzioni di un parametro t; indichiamo con apici le derivazioni rispetto a t, e con x', x'' i punti che han per coordinate le x_i', x_i''. La tangente in x ad L è allora la retta dei punti x, x', retta le cui 6 coordinate sono

$$(xx')_{ik} = x_i\, x_k' - x_k\, x_i' .$$

Il piano osculatore in x è il piano dei punti x, x', x'' (che non sono in generale allineati). Quindi una retta passante per x e giacente in questo piano ha le coordinate

$$\lambda\, (xx')_{ik} + \mu\, (xx'')_{ik} .$$

Per ipotesi, prendendo per λ e μ convenienti funzioni di t, si ha così una retta di una congruenza lineare fissa, cioè di due complessi lineari fissi. Ossia:

$$\Sigma\, a_{ik}\,[\lambda\,(xx')_{ik} + \mu\,(xx'')_{ik}] = 0$$

$$\Sigma\, b_{ik}\,[\lambda\,(xx')_{ik} + \mu\,(xx'')_{ik}] = 0\,,$$

ove le a_{ik}, b_{ik} son costanti. Poniamo, per brevità,

$$A = \Sigma\, a_{ik}\,(xx')_{ik}\,,$$

sicchè, derivando (rispetto a t),

$$A' = \Sigma\, a_{ik}\,(xx'')_{ik}\,;$$

e similmente

$$B = \Sigma\, b_{ik}\,(xx')_{ik}\,, \qquad B' = \Sigma\, b_{ik}\,(xx'')_{ik}\,.$$

Allora le due equazioni precedenti, eliminandone λ e μ, dànno:

$$AB' - BA' = 0\,,$$

il cui integrale

$$\alpha A + \beta B = 0$$

(ove α, β indicano costanti) esprime che le tangenti xx' di L stanno in un complesso lineare passante per la data congruenza: il che appunto volevamo dimostrare.

2. Ciò premesso, consideriamo una congruenza rettilinea W, che abbia per una falda focale una rigata sghemba R, e faccia corrispondere alle generatrici rettilinee di questa (o ad *un* sistema di tali generatrici, se R è una quadrica) un sistema di asintotiche dell'altra falda focale S, che non siano rette (¹).

Sia L una di queste asintotiche di S, l la corrispondente generatrice di R. Le ∞^1 rette della congruenza che hanno i loro fochi rispettivamente su quelle due linee, stanno nella congruenza lineare speciale composta delle tangenti a R nei punti di l (congruenza lineare che ha per *direttrici* l e la generatrice di R infinitamente vicina ad l). D'altronde ognuna di esse è pur tangente a S, per ipotesi, in un punto di L; sta cioè nel piano che in quel punto è tangente a S, vale a dire (essendo L asintotica) osculatore a L. Possiamo dunque applicare a L il lemma del n⁰ 1; e concludiamo: *Ogni asintotica*

(¹) Ricordo che (seguendo il sig. BIANCHI) si chiamano *congruenze* W quelle congruenze di rette che determinano tra le due falde focali una tal corrispondenza da mutare le asintotiche di un sistema in asintotiche: onde anche le asintotiche dell'altro sistema si muteranno in asintotiche.

di S, *del suddetto sistema, appartiene (con le sue tangenti) ad un complesso lineare di rette.* Questo complesso contiene la congruenza lineare delle tangenti ad R nei punti della generatrice l corrispondente a quell'asintotica L di S.

3. Supponiamo ora che anche S, come R, sia rigata. Si tratti cioè di *congruenze* W *le cui falde focali siano entrambe rigate.* In un'altra Nota ([2]) io mi ero occupato, come già aveva fatto il sig. Bianchi, del caso in cui alle generatrici rettilinee di una falda focale (o ad un sistema di tali generatrici, se si tratta di una quadrica) corrispondano sull'altra falda focale generatrici rettilinee. Ora invece siamo (secondo il n° 2) nell'altra ipotesi: che alle generatrici considerate di R corrispondano sulla S le asintotiche che *non* son rettilinee. Vedremo facilmente che quest'ipotesi non dà nulla di nuovo ([3]).

Applichiamo in fatti la proposizione del n. 2, tenendo conto che adesso la superficie S è rigata. Per ognuna, L, delle *curve* asintotiche di cui ivi si parla, il complesso lineare di rette, che ne contiene le tangenti, contiene tutte le rette che passano per un punto di L e giacciono nel rispettivo (piano osculatore di L, ossia) piano tangente di S: cioè tutte le tangenti ad S nei punti di L. In particolare tutte le generatrici della rigata S staranno in quel complesso lineare.

Variando L, il complesso lineare dovrà variare: perchè non possono tutte le tangenti di una superficie S (non piana) giacere in uno stesso complesso lineare. Varierà in un fascio di complessi lineari: se no, le generatrici di S, essendo comuni a tre complessi lineari, linearmente indipendenti, starebbero in una schiera di generatrici di una quadrica; non vi sarebbero asintotiche *curve.* Dunque *tutte le generatrici di* S *stanno in una congruenza lineare fissa.* — Diciamo $m\ n$ le direttrici (distinte od infinitamente vicine, ma sghembe fra loro) di questa.

([2]) *Le congruenze rettilinee* W *aderenti a due superficie rigate,* in questi Atti, 42, 1907, p. 539. [Questo volume, p. 9].

([3]) Cfr. M. Picone, *Sulle congruenze rettilinee* W, Rend. Palermo, 37, 1914_1. (L'estratto è uscito nell'ottobre 1913). Il risultato di questo Autore, per quel che riguarda l'attuale problema, non coincide con quello che qui otterremo (n° 6). Informato di ciò, il sig. Picone ha proseguito ulteriormente i suoi calcoli, giungendo infine a conclusioni concordanti colle nostre: come apparirà in una nuova Nota di lui, in quei Rendiconti.

Cfr. anche le parole di E. J. Wilczynski alla fine del § 9 della sua Memoria premiata *Sur la théorie générale des congruences,* Mém. (in-4°) de l'Acad. de Belgique, (2) 3, 1911.

4. Abbiam rilevato al n^0 2 che il complesso lineare che contiene L contiene pure la congruenza lineare delle tangenti a R nei punti di l: in particolare conterrà la stessa l. Ne segue intanto che non possono tutte le generatrici l di R appoggiarsi ad m; perchè in tal caso dovrebbero stare nella congruenza lineare (mn) testè definita. Le due rigate R, S starebbero in una stessa congruenza lineare: dal che si trae subito che, chiamando omologhi su R, S i punti di contatto delle rette che le toccano entrambe, ai punti di una stessa generatrice di R corrisponderebbero su S i punti di una generatrice (o di più generatrici) (4), e non già quelli di un'asintotica curva.

Considerando su R una successione di generatrici infinitamente vicine $l\, l_1\, l_2\, l_3 \ldots$, potremo esprimere il fatto ricordato or ora (dal n. 2) così: la congruenza lineare che ha per direttrici ll_1 sta in uno stesso complesso lineare colla congruenza $(m\, n)$. Tenuto conto che le quattro rette $l\, l_1\, m\, n$ sono sghembe fra loro, ciò equivale a dire che queste rette stanno in una stessa *schiera rigata* (vale a dire sistema di generatrici di una quadrica sghemba). Similmente staranno $l_1\, l_2$ $m\, n$ in una stessa schiera rigata, la quale coinciderà colla precedente, avendo comuni con essa tre rette; e così $l_2\, l_3$ $m\, n$, ecc. Ossia R non è altro che una quadrica passante per $m\, n$, e della quale si assumono come generatrici $l \ldots$ quelle della stessa schiera di m, n.

5. Alla stessa conclusione si giunge analiticamente. Le coordinate l_{ik} della generatrice variabile l di R siano date funzioni di t. Per brevità scriviamo $(p\,,\,q)$ in luogo del polinomio $p_{12}\, q_{34} + \ldots$ che, uguagliato a zero, dà la condizione d'incidenza di due rette $p\,,\,q$. Le rette p tangenti a R nei punti di una l (ossia incidenti ad l ed alla infinitamente vicina) son quelle che soddisfano alle due condizioni

$$(p\,,\,l) = 0 \quad , \quad (p\,,\,l + l'dt) = 0\,,$$

vale a dire

$$(p\,,\,l) = 0 \quad , \quad (p\,,\,l') = 0$$

(sempre indicando con un apice la derivazione rispetto a t). Questa

---

(4) In fatti, se una retta g tocca due rigate R, S di una stessa congruenza lineare, rispettivamente in due punti che non siano singolari per la congruenza, ciò equivale a dire che due generatrici infinitamente vicine di R e due generatrici infinitamente vicine di S incontrano g, e quindi stanno nella schiera costituita dalle rette della congruenza lineare appoggiate a g. Le infinite rette dell'altra schiera che è incidente a questa toccheranno R, S nei punti delle generatrici passanti rispettivamente pei due punti di contatto di g.

V. anche il n. 9 della Nota citata in (2).

congruenza lineare di rette p sta in un complesso lineare che, al variar di t, varia entro un dato fascio. Ciò significa che da quelle due equazioni nelle p deve seguire:

$$\lambda (p , a) + \mu (p , b) = 0 ,$$

ove le a e b sono i coefficienti di due complessi lineari fissati in quel fascio, e λ , μ son convenienti funzioni di t. Sarà dunque, per ognuna delle 6 combinazioni ik:

$$\varrho\, l_{ik} + \sigma\, l'_{ik} = \lambda\, a_{ik} + \mu\, b_{ik} ,$$

ove ϱ , σ son funzioni di t.

Riguardando questa relazione come equazione differenziale per la funzione l_{ik} di t, e tenendo conto che a_{ik} , b_{ik} son costanti, si trova subito che l'integrale avrà la forma

$$l_{ik} = a_{ik}\, \varphi (t) + b_{ik}\, \psi (t) + c_{ik}\, \chi (t) ,$$

ove c_{ik} è costante, e le funzioni φ , ψ , χ non dipendono dagli indici $i\,k$.

Da queste espressioni delle coordinate della retta l segue che questa varia appunto entro una schiera rigata, ecc. ecc.

6. Sulla quadrica R sta, oltre alla schiera descritta da l, una seconda schiera rigata, avente per direttrici m , n , cioè situata in una stessa congruenza lineare colla serie delle generatrici di S. Perciò, applicando di nuovo un'osservazione ricordata al n. 4, la corrispondenza fra i punti di R , S che son fochi di una stessa retta della congruenza W muterà le generatrici di S in quella 2ª schiera di R. Ciò s'accorda col fatto che, la congruenza essendo una W, deve mutare ogni sistema di asintotiche di S in un sistema di asintotiche di R.

Così siam guidati al seguente risultato, intorno alla questione posta al n. 3: *Se una congruenza avente per falde focali due rigate sghembe* R , S , *fa corrispondere ad un sistema di asintotiche essenzialmente curve di* S *un sistema di generatrici rettilinee di* R, *sarà* R *una quadrica, e due di queste sue generatrici (distinte od infinitamente vicine) saranno direttrici per la rigata* S. *La congruenza farà corrispondere alle generatrici rettilinee di* S *la seconda schiera di generatrici di* R.

7. Alla proposizione del n. 2 aggiungiamo un'osservazione quasi evidente (e che non sarà certo nuova) intorno alle superficie S che hanno un sistema di asintotiche *curve* appartenenti a complessi lineari di rette.

Fissata una, L, di quelle asintotiche, le *seconde* tangenti principali di S nei punti di L (cioè le tangenti in questi punti alle asintotiche del secondo sistema) stanno tutte in una congruenza lineare, limite dell'intersezione del complesso lineare che contiene L con quello che contiene l'asintotica L_1 infinitamente vicina ad L.

Geometricamente ciò risulta subito dal fatto che ognuna di quelle tangenti, riguardata come congiungente due punti infinitamente prossimi, a e a_1, di L e L_1, essendo tangente principale di S, può pure considerarsi come intersezione dei piani tangenti in a, a_1: è dunque comune ai fasci di rette che vanno in quei piani da questi punti, fasci che stanno nei due complessi lineari di L, L_1.

Analiticamente: le 4 coordinate x_i dei punti x di S siano date funzioni di u, v, sì che le linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ siano i due sistemi di asintotiche. Indicando con a_{ik} $(i, k = 1, \ldots, 4)$ delle funzioni di u tali che $a_{ik} + a_{ki} = 0$, scriviamo l'equazione del complesso lineare di rette a cui appartenga, per ipotesi, la $u = \text{cost.}$, così:

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, y_k = 0$$

(essendo $x\, y$ due punti di una retta del complesso). Il piano che corrisponde al punto x di S rispetto a quel complesso lineare è il piano tangente in x ad S, e quindi il piano osculatore in x alla $v = \text{cost.}$ Contiene dunque i punti x', x'' (se cogli apici indichiamo le derivazioni rispetto ad u); sicchè:

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x'_k = 0$$

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x''_k = 0\,.$$

Derivando rispetto ad u la 1ª di queste identità e tenendo conto della 2ª abbiamo:

$$\Sigma\, a'_{ik}\, x_i\, x'_k = 0\,.$$

Questa esprime che la retta dei punti xx', vale a dire la tangente in x alla $v = \text{cost.}$, sta nel complesso lineare a'_{ik}, ben determinato quando u è fissata, e diverso dal complesso a_{ik} in cui pure varia quella retta.

8. Così gli ∞^1 complessi lineari di rette a cui appartengono, per ipotesi, le asintotiche L di un sistema, della superficie S, portano a considerare ∞^1 congruenze lineari, colle loro coppie di direttrici

g, h, e le rigate G, H descritte da queste (5). Quelle congruenze lineari costituiscono un complesso particolare (l'*inviluppo* della ∞^1 di complessi lineari), che contiene la congruenza delle *seconde* tangenti principali di S.

Se siamo nel caso del n. 2, cioè S è, con una rigata R, falda focale di una congruenza W che fa corrispondere alle L le generatrici di R, abbiam visto che il complesso lineare cui appartiene una L contiene la congruenza lineare che ha per direttrici la generatrice l di R, omologa della L, e la generatrice successiva l_1. Similmente il complesso lineare cui appartiene la successiva della L conterrà la congruenza lineare (l_1, l_2). Quindi la congruenza lineare (g, h), intersezione dei due complessi lineari, conterrà la schiera rigata comune alle congruenze (l, l_1), (l_1, l_2), vale a dire la schiera rigata delle tangenti principali di R nei vari punti di l (diverse da l). In altre parole, g ed h stanno nella schiera rigata $l\, l_1\, l_2$ osculatrice ad R lungo l.

9. Se, in particolare, R è una quadrica, staranno g ed h nella schiera di generatrici di R che è descritta da l. E considerando anche l'altra schiera di R, e le corrispondenti asintotiche di S, otteniamo la seguente proposizione:

Se una congruenza W *ha per falda focale una quadrica (non cono)* R, *l'altra falda focale* S *(quando non sia rigata) gode della proprietà che le sue tangenti principali dell'un sistema determinano, per sezione, fra i punti di* R, *una corrispondenza che fa accoppiare fra loro le generatrici di una schiera di* R; *e similmente le tangenti principali di* S *del secondo sistema, per la seconda schiera di generatrici di* R. Le tangenti principali di S (del 1° sistema), che s'appoggiano ad una coppia (g, h) di generatrici di R della 1ª schiera, escono dai punti di un'asintotica L di S del 2° sistema (cioè asintotica inviluppata da tangenti principali del 2° sistema). Quest'asintotica appartiene al complesso lineare di rette che contiene la congruenza lineare (g, h), e quella analoga infinitamente vicina (g_1, h_1). Similmente, scambiando i due sistemi, e mutando la 1ª schiera di R nella 2ª.

Si noti poi che, *se per una superficie* S *avviene che ognuna delle sue tangenti principali di un sistema si appoggi a due generatrici di*

---

(5) Si vede subito che G, H sono, in generale, le due falde focali di una congruenza W che fa corrispondere su esse due generatrici, come g, h. Cfr. (2).

una schiera di una data quadrica R, *omologhe in una corrispondenza involutoria assegnata entro quella schiera, ciò basta perchè* R *ed* S *si possan riguardare come le falde focali di una, anzi, di due congruenze* W.

Invero, siano $a\,a_1\,a_2$ punti infinitamente vicini di S tali che la retta aa_1 sia tangente principale di S, del detto sistema, appoggiata alla coppia g, h di generatrici omologhe della schiera nominata di R, e la retta a_1a_2 lo stesso, per la coppia g_1, h_1 infinitamente vicina a quella. Il complesso lineare C che congiunge le due congruenze lineari (g, h), (g_1, h_1), contiene le due rette aa_1, a_1a_2, e quindi fa corrispondere ad a_1 il piano aa_1a_2, che è osculatore in a_1 ad una asintotica, ossia tangente in a_1, o (ciò che al limite fa lo stesso) in a ad S (6). Di qui intanto si trae che il luogo L dei punti a le cui tangenti principali (del sistema considerato) si appoggiano ad una stessa coppia g, h della data corrispondenza involutoria è un'asintotica di S: perchè luogo dei punti a cui, rispetto ad un complesso lineare fisso C, corrispondono i piani tangenti in essi a S.

Consideriamo ora le tangenti comuni ad R, S; e precisamente le due rette che da un punto qualunque a di L, entro al piano α tangente in a ad S, si posson condurre a toccare la conica sezione di R con α. La corrispondenza che è data fra le generatrici di una schiera di R, produce per sezione con α una corrispondenza fra i punti della conica. Il fatto che le due congruenze lineari (g, h), (g_1, h_1) stanno nel complesso lineare C che contiene il fascio di rette $a\,\alpha$ si traduce in quest'altro: che le tracce di g, h sulla conica, e così pure le tracce di g_1, h_1 (infinitamente vicine a quelle), sono allineate con a. Ne segue che i punti di contatto b, b' della conica colle tangenti tirate da a si posson definire come le tracce di quelle rette l, l' della schiera rigata R, che son limiti delle rette doppie di quell'involuzione fra rette della schiera stessa, che è determinata dalla coppia g, h e da un'altra coppia g_1, h_1 della data corrispondenza, infinitamente vicina a quella. Perciò se un punto a si muove su S, in modo che la coppia g, h non muti, e descrive quindi una asintotica L, il corrispondente punto b (o b') su R descriverà una generatrice determinata l (o l'). La congruenza generata dalle tangenti comuni ab (oppure ab') di R, S è dunque una W.

---

(6) Anche questa considerazione infinitesimale si può sostituire con un breve calcolo, analogo ad altri che abbiam fatto precedentemente.

10. Le considerazioni del n. 9 conducono naturalmente ad una soluzione del problema: *data una quadrica (non degenere)* R, *costruire le congruenze* W *di cui essa è falda focale* (7). Sarà anzi la seconda falda focale S quella che noi costruiremo.

Dimostreremo che *si può prendere ad arbitrio la corrispondenza involutoria fra le generatrici della 1ª schiera di* R, *determinata dalle tangenti principali di* S *del 1º sistema; e così pure l'analoga corrispondenza fra le generatrici della 2ª schiera [di]* R: *con la condizione che nessuna delle due corrispondenze sia un' involuzione ordinaria (cioè quadratica)* (8).

Si osservi che questo enunciato si può anche presentare in altro modo. Per ogni coppia g, h di generatrici omologhe della 1ª schiera di R, e per la coppia infinitamente vicina g_1, h_1, si considerino le due congruenze lineari che le hanno rispettivamente per direttrici, e si chiami di nuovo C il complesso lineare contenente queste due congruenze. Al variar della coppia (g, h) il complesso C descrive il sistema ∞^1 dei complessi lineari che contengono le asintotiche del 2^0 sistema di S (9). Dare, ad arbitrio, la corrispondenza fra le generatrici, come g, h, della 1ª schiera di R equivale a dare ad arbitrio un sistema di ∞^1 complessi lineari come C, entro la rete dei complessi lineari passanti per la 2ª schiera di R: giacchè la congruenza lineare intersezione di ogni complesso C col suo infinitamente vicino C_1 del dato sistema ∞^1 avrà per direttrici appunto due rette g, h, della 1ª schiera, omologhe nella 1ª corrispondenza. Analogamente per un 2^0 sistema ∞^1 di complessi lineari F, passanti per la 1ª schiera di R, e legati alla corrispondenza fra le generatrici della 2ª schiera.

Per un punto a si consideri il cono delle rette che vanno da a ad incontrare le varie coppie di generatrici g, h della 1ª schiera di R, omologhe nella corrispondenza data: cono che può anche riguardarsi come inviluppato dai piani che corrispondono ad a rispetto agli ∞^1 complessi lineari C. Se a sta su una superficie S, soluzione del nostro problema, il piano α tangente ad S in a sarà uno dei

(7) Cfr. un'altra costruzione nella nota a p. 5 della Memoria del BIANCHI *Sui sistemi coniugati permanenti nelle deformate delle quadriche,* Rend. Acc. Lincei, (5) 22, 1913_2, p. 3.

(8) Abbiamo così due funzioni di una variabile *arbitrarie.*

(9) Il complesso C risulterebbe *fisso* solo quando la data corrispondenza tra le generatrici della 1ª schiera di R fosse un'ordinaria involuzione: perciò appunto si è escluso questo caso.

piani ora nominati. Così pure, se, invece di quel cono, prendiamo il cono inviluppato dai piani corrispondenti ad a rispetto agli ∞^1 complessi lineari F.

Ciò posto, ad ogni punto a dello spazio si associ un piano α quando questo sia tangente ad entrambi quei coni uscenti da a. Otterremo così, in generale, (se esistono tali piani tangenti comuni) ∞^3 *elementi* composti di punto e piano incidenti (*faccette*, come dice il sig. BIANCHI). Ciò è l'equivalente geometrico di un'equazione (di PFAFF) ai differenziali totali fra le 3 coordinate non omogenee $x\,y\,z$ di punto, della forma

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

(ove X, Y, Z son funzioni date di quelle 3 coordinate). Noi vogliamo dimostrare che quegli ∞^3 elementi si posson raggruppare in ∞^1 sistemi costituiti ognuno dagli *elementi* (punto e piano tangente) di una superficie (*integrale*). E ciò è come dire che il 1^0 membro di quell'equazione, alterato per un conveniente fattore, si può esprimere come il differenziale totale di una funzione di x, y, z. È ben noto che la condizione perchè ciò avvenga (condizione d'integrabilità) è:

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \ldots = 0\,.$$

Dobbiamo mostrare che essa è verificata (10).

11. A questo scopo mettiamo quella condizione sotto forma geometrica.

Fissato un elemento $(a\,,\,\alpha)$ di una varietà ∞^3 di elementi, prendiamo un punto a_1 infinitamente vicino ad a, nel piano α (11); e sia α_1 il piano infinitamente prossimo ad α che forma elemento con a_1. Le rette aa_1, $\alpha\alpha_1$ hanno per limiti due rette del fascio di centro a e piano α, le quali si corrisponderanno in una ben determinata projettività. La condizione d'integrabilità che abbiamo ricordata equivale a dire (12) che *questa projettività è un'involuzione* (sarà poi l'in-

(10) Possiamo anche dire così. Ognuno dei due coni uscenti da a, fra i cui piani tangenti deve trovarsi α, ci dà un'equazione alle derivate parziali, di 1^0 ordine, per la funzione z di $x\,,y$, che definisce la superficie S. Il nostro asserto equivale a questo: che queste due equazioni alle derivate parziali sono *in involuzione*.

(11) Od anche a una distanza da α che sia infinitesima d'ordine superiore rispetto al segmento aa_1.

(12) VOSS, *Zur Theorie der allgemeinen Punktebenensysteme*, Math. Ann., XXIII, 1884, p. 45 (v. p. 51).

voluzione delle *tangenti coniugate* per la superficie integrale contenente l'elemento (a, α)).

Ora la varietà ∞^3 di elementi sia precisamente quella definita al n. 10, coi due sistemi ∞^1 di complessi lineari, o colle corrispondenze tra le due schiere di R. Sia (a, α) un suo elemento, sicchè il piano α corrisponda ad a rispetto ad un complesso lineare C del 1^0 sistema, e ad uno F del 2^0. Diciamo C_1 e F_1 rispettivamente due complessi lineari di quei sistemi, infinitamente vicini a C e F. La congruenza lineare di C, C_1 abbia per direttrici g, h (della 1^a schiera di R); e quella di F, F_1 abbia per direttrici r, s (della 2^a schiera). Siano p e t rispettivamente le rette delle due congruenze che stanno nel fascio di rette $a\alpha$.

La retta p è comune a C_1 e F, e quindi contiene due punti per ognun dei quali passa un fascio di rette della congruenza C_1F. Sia b quello, fra questi due punti, che è infinitamente vicino ad a (a essendo un analogo punto singolare per la congruenza CF, infinitamente prossima a quella). La retta t_1 condotta da b ad incontrare r, s sta nei complessi F, F_1: sicchè il piano che corrisponde a b rispetto ad F, e quindi anche rispetto a C_1, è il piano $p\,t_1$. La retta t_1 starà pure nel complesso C_1: è dunque comune a C_1 e F_1.

Analogamente si trova su t un punto c, infinitamente vicino ad a, tale che la retta p_1 condotta da c ad appoggiarsi su g, h risulta comune a C_1 e F_1.

Le due rette p_1, t_1 così ottenute, infinitamente prossime rispettivamente a p, t, s'incontrano. Questo fatto essenziale appare subito considerando la quadrica Q, che contiene le due coppie di rette, mutuamente appoggiate, g, h e r, s, e che inoltre passa per a. Su essa in fatti giaceranno di conseguenza p, t e poi anche p_1, t_1, le quali risultano generatrici di diverso sistema.

Sia a_1 il punto d'incontro di p_1, t_1. Sarà infinitamente vicino ad a. Poichè le rette p_1, t_1 sono comuni ai complessi C_1 e F_1, il punto a_1 forma elemento, della nostra varietà ∞^3 di elementi, col piano α_1 che unisce le rette stesse. Questo piano taglia α secondo la retta $b\,c$. In conseguenza nella projettività fra rette del fascio $a\alpha$, che abbiam definito in generale al principio di questo n^0, saranno rette omologhe i limiti delle due rette aa_1, bc. Ora queste sono evidentemente rette polari l'una dell'altra rispetto a Q; e tali si conserveranno al limite. Quella projettività sarà dunque l'involuzione che ha per raggi doppi le due generatrici p, t di Q. La integrabilità della varietà ∞^3 di elementi è così dimostrata.