Corrado Segre

Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti

Rend. R. Acc. Naz. Lincei, Vol. **30** (1921), p. 67–71

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 149–153

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_149>

XXXI.

SUI FOCHI DI 2° ORDINE DEI SISTEMI INFINITI DI PIANI, E SULLE CURVE IPERSPAZIALI CON UNA DOPPIA INFINITÀ DI PIANI PLURISECANTI

« Atti della Reale Accademia dei Lincei »,
Rendiconti; Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali,
serie quinta, vol. XXX, 1921-1° semestre, pp. 67-71.

1. Nella Memoria *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi* (Rendic. Circ. mat. di Palermo, tomo 30, 1910, p. 87 [qui a p. 71]) io avevo studiato principalmente le questioni legate a quelli che possiamo chiamare *fochi di 1° ordine*, per un sistema infinito di spazi: ossia punti, per ognuno dei quali passano *due* spazi del sistema infinitamente vicini. Ora si presentano dei problemi, la cui trattazione porta a considerare dei *fochi di 2° ordine* (o d'ordine superiore), cioè punti d'incontro di *tre* (o più) spazi successivi. In questa Nota, ed in altre che verranno poi, mi occuperò appunto di tali problemi.

2. Consideriamo, per ora, un sistema $\Sigma\,\infty^2$ di piani, *immerso* in S_4. Dette x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate di punti in questo spazio, rappresentiamo i piani colle equazioni $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, ove $\alpha \equiv a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$, $\beta \equiv b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$; i coefficienti a_i, b_i essendo date funzioni dei due parametri u, v, da cui dipendono i piani di Σ. Così le derivate di α, β rispetto a u, v (derivate che indicheremo con α^u, α^v, ecc.) saranno anche esse polinomi lineari in x_1, x_2.

Se un punto x è comune al piano (u, v) e a $(u + du, v + dv)$, e quindi è foco (di 1° ordine, in generale) per Σ, varranno, insieme colle $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, le $d\alpha = 0$, $d\beta = 0$, cioè:

$$\alpha^u\, du + \alpha^v\, dv = 0, \quad \beta^u\, du + \beta^v\, dv = 0, \tag{1}$$

e quindi:

$$J \equiv \alpha^u \beta^v - \alpha^v \beta^u = 0. \tag{2}$$

Questa equazione è di 2° grado in x_1, x_2. Dunque, com'è ben noto, i fochi (di 1° ordine) di un piano di Σ formano in generale una conica. La diremo *conica focale* del piano.

3. Se un punto è foco di 2° ordine, ossia sta su 3 piani infinitamente vicini π, π', π'' di Σ, esso, perchè è su π, π', sta sulla conica focale di π; e, perchè è su π', π'', sta sulla conica focale di π'. Per avere dunque nel piano (u, v) un foco di 2° ordine, basterà scrivere che il punto x sta sulla conica focale di questo piano, e su quella del piano $(u + du, v + dv)$. La 1ª condizione dà:

$$x_3 = \alpha, \quad x_4 = \beta, \quad J = 0; \tag{3}$$

la 2ª dà, come al n. 2, le (1), e in più $J^u\, du + J^v\, dv = 0$. Ne segue:

$$\begin{Vmatrix} \alpha^u & \beta^u & J^u \\ \alpha^v & \beta^v & J^v \end{Vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Sarà perciò quest'ultima equazione (doppia), che, insieme colle (3), caratterizzerà i fochi di 2° ordine [1].

Quella matrice, con due colonne lineari in x_1, x_2 e una quadratica, è annullata da 5 punti. Dunque: *su ogni piano di Σ vi sono in generale 5 fochi di 2° ordine (sulla conica focale).*

4. Dimostriamo ora che: se *tutti* i punti delle coniche focali di Σ son fochi di 2° ordine, il loro luogo non è una V_3, ma bensì una superficie (o una linea, se Σ si compone dei piani di S_4 passanti per una stessa retta).

Possiamo pensare i punti x di quelle coniche (3) come funzioni di tre variabili, cioè dei parametri u, v che fissano il piano, e della coordinata x_1. La terza delle equazioni (3) determina anzitutto x_2 come funzione implicita di u, v, x_1; mentre le prime due dànno x_3 e x_4 in funzione di u, v, x_1, x_2, e quindi anche di u, v, x_1. Basterà provare che, se queste funzioni verificano le (4), la matrice funzionale delle coordinate x_1, x_2, x_3, x_4, riguardate così come fun-

---

(1) Si può anche ottenere la (4) così. I piani di Σ passanti per un dato punto x corrispondono alle soluzioni u, v comuni alle due equazioni $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, nelle quali si sia posto quel punto dato. Rappresentando u, v come coordinate di punto in un piano ausiliario, sicchè le dette equazioni avranno per imagini due linee, si vede che una soluzione $(u\,v)$ sarà *doppia* (almeno), se dalle due equazioni si trae lo stesso valore per dv/du, e sarà *tripla* se inoltre vien lo stesso valore per d^2v/du^2. La 1ª ipotesi dà subito la (2). La 2ª porta ad una relazione, che, presa insieme colla (2), risulta equivalente a (4).

zioni di x_1, u, v, è nulla; ossia che:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & a_1 + a_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & b_1 + b_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \alpha^u + a_2 \frac{\partial x_2}{\partial u} & \beta^u + b_2 \frac{\partial x_2}{\partial u} \\ 0 & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \alpha^v + a_2 \frac{\partial x_2}{\partial v} & \beta^v + b_2 \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix} = 0 .$$

Ciò equivale a dire che è zero la matrice che si ottiene da questa sopprimendo la 1ª orizzontale e la 1ª verticale; ossia, semplificando, la matrice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u} & \alpha^u & \beta^u \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} & \alpha^v & \beta^v \end{vmatrix} .$$

Le derivate di x_2 rispetto a u e v, che qui compaiono, si calcolano derivando l'equazione $J = 0$ rispetto a queste variabili. Risulta:

$$\frac{\partial J}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u} + J^u = 0 , \quad \frac{\partial J}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial v} + J^v = 0 ;$$

sicchè, sostituendo nell'ultima matrice, questa risulta nulla, se ha luogo la (4): il che appunto avviene, per ipotesi.

Se le coniche focali dei piani generici di Σ non si spezzano, la superficie che viene a contenere queste ∞^2 coniche non potrà essere altro, com'è noto, che *la* F^4 *proiezione di quella di* VERONESE, o *la* F^3 *di* S_4 *(rigata)*. Dunque: *Son solo i sistemi* ∞^2 *di piani costituiti dai piani delle coniche di queste due superficie quelli per cui avviene che tutti i punti delle coniche focali sian fochi di 2° ordine, senza che queste coniche focali si spezzino* (²).

5. Una curva Γ, appartenente ad S_n, con $n > 3$, sia tale che esistano ∞^2 piani che la seghino in 6 (o più) punti. Proiettando Γ (se $n > 4$) su un S_4 da un S_{n-5} generico, si ottiene una curva C,

---

(²) Questa riserva è indispensabile. Le ∞^2 coniche, spezzandosi in coppie di rette, potrebbero costituire una superficie di S_4 anche nei seguenti modi: l'insieme di una rigata con direttrice piana e del piano di questa (le ∞^2 coniche componendosi di una generatrice della rigata e di una retta del piano, incidenti); oppure l'insieme di due coni, distinti o no, collo stesso vertice, e che possono anche ridursi a piani (le coniche componendosi con due generatrici rispettivamente dei due coni).

che godrà della stessa proprietà: i punti d'appoggio dei piani seisecanti di C essendo proiezioni dei punti d'appoggio di quelli di Γ.

Nel sistema $\infty^2 \Sigma$ costituito da quei piani di S_4 seisecanti di C, ogni piano avrà i 6 (o più) punti d'incontro con C come fochi di 2° ordine: poichè, essendo $\Sigma\, \infty^2$, dovranno per ogni punto di C passare ∞^1 suoi piani, e quindi quanti si vogliano piani infinitamente vicini. Ora, pel n. 3, i fochi di 2° ordine di ogni piano sono in generale 5 punti della conica focale: se no, infiniti, che costituiranno tutta quella conica, ove essa non si spezzi. Nelle nostre ipotesi, avendosi almeno 6 fochi di 2° ordine, dovrà appunto accadere che la conica focale di un piano generico di Σ, se è irriducibile, sia luogo di fochi di 2° ordine. Se invece essa si spezza, i 6 punti d'appoggio di ogni piano su C dovranno distribuirsi sulle due rette componenti la conica; sicchè C, e quindi anche Γ, starà su una rigata di plurisecanti (almeno trisecanti). Nel 1° caso, della irriducibilità, le ∞^2 coniche focali, e quindi anche la linea C, stanno, pel teorema del n. 4, su una superficie F^4 proiezione di quella di VERONESE, o su una F^3: i piani seisecanti essendo quelli delle ∞^2 coniche di queste superficie. Risalendo a S_n, se $n > 4$, abbiamo che i 6 (o più) punti d'appoggio degli ∞^2 piani plurisecanti di Γ sono su coniche, il cui luogo ha per proiezione *generica* in S_4 una delle due dette superficie. Sarà dunque il luogo stesso una superficie; e anzi, del medesimo ordine di quelle. Concludiamo (3):

Se una curva iperspaziale ammette ∞^2 piani che la incontrino in 6 punti (almeno), ma non infinite rette trisecanti, essa: o appartiene a S_5 *e sta su una superficie* F^4 *di* VERONESE; *oppure appartiene a* S_4 *e sta sulla* F^4 *proiezione della superficie di* VERONESE, *od anche sulla* F^3 *rigata: i piani plurisecanti essendo quelli delle* ∞^2 *coniche di queste superficie.*

Si avverta che per le curve con ∞^2 piani 5-secanti la proposizione ora ottenuta non sarebbe più vera: come si potrà riconoscere sulle curve composte che incontreremo.

6. Finirò coll'osservare brevemente (lasciando ad altri di sviluppare questi cenni) come la considerazione dei fochi di 2° ordine permetta di giungere facilmente a determinare per l'S_4 tutti i casi possibili di sistemi *algebrici* ∞^2 di piani *del 2° ordine*, cioè tali che per un punto generico di S_4 ne passino due. (Non dico di quelli del 1° ordine, perchè — molto ovvii — son già conosciuti da tempo).

---

(3) La questione qui risolta mi era stata posta dall'amico CASTELNUOVO. Tratterò poi anche un problema più generale.

Basta notare che in un siffatto sistema Σ ogni foco di 2^o ordine, trovandosi su 3 piani infinitamente vicini di Σ, dovrà stare di conseguenza su infiniti; e precisamente su ∞^1, se non è comune a tutti i piani di Σ: nel qual caso questi si otterrebbero proiettando da quel punto le rette di una congruenza di 2^o ordine di S_3. Potranno dunque aversi solo più questi due casi: 1^o) Sono ∞^2 i fochi di 2^o ordine; ma essendo anche ∞^2 i piani, bisognerà che ogni piano abbia ∞^1 fochi di 2^o ordine. Ne segue che la conica focale di ciascun piano si spezza: se no, si tratterebbe (n. 4) dei sistemi degli ∞^2 piani delle coniche di una F^3 o F^4, i quali sistemi sono rispettivamente di 1^o e di 3^o ordine, non del 2^o. Su ogni piano si avranno così una o due rette luoghi di fochi di 2^o ordine; e queste rette riempiono, per ipotesi, una superficie. Se sono ∞^2, daranno un piano incontrato in rette da tutti i piani di Σ; se sono ∞^1, per ognuna di esse passeranno ∞^1 piani di Σ. 2^o) I fochi di 2^o ordine (o almeno le posizioni di un tal foco al variare del piano di Σ) son solo ∞^1, ossia hanno per luogo una linea algebrica segata in 5 punti (o meno, se non si tratta di tutti i fochi di 2^o ordine) dai piani di Σ.

Questo 2^o caso offre uno speciale interesse. Si parta, ad esempio, da una linea algebrica L, che può essere riducibile, appartenente ad S_4, della quale si sappia che la proiezione generica su S_3 ammette precisamente 2 quadrisecanti. Allora si potrà asserire che gli ∞^2 piani quadrisecanti di L (i quali, per l'ipotesi, formeranno un sistema di 2^o ordine) incontreranno certo di conseguenza in un punto (il 5^o foco di 2^o ordine) un'altra linea: che però potrebbe essere indeterminata, su una superficie incontrata secondo linee da tutti quei piani.

Rientra in questa proposizione il noto teorema che gli ∞^2 piani di S_4 appoggiati a 4 rette generiche incontrano di conseguenza una 5^a retta. Anche i piani che incontrano in 3 punti una quartica razionale normale e si appoggiano a una retta generica, formano un sistema ∞^2 di 2^o ordine; e quindi dovranno incontrare un'altra linea, che risulta facilmente essere ancora una quartica. E altri casi sono stati incontrati, con tutt'altro metodo, da M. PIERI (4).

---

(4) *Sulla geometria proiettiva delle forme di 4^a specie.* Giorn. di matem., 28, 1890, p. 209. I piani che incontrano una C^4 razionale normale e 3 sue corde, incontrano un'altra C^4. — I piani che incontrano una C^3 sghemba, due rette appoggiate ad essa, e una sua corda, incontrano un'altra C^3. — I piani che s'appoggiano a 3 rette e ad una conica incidente a due di esse, incontrano un'altra conica.