Corrado Segre

Le linee principali di una superficie di S_5 e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese, Nota I
Le linee principali di una superficie di S_5 e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese, Nota II

Rend. R. Acc. Naz. Lincei, Vol. **30** (1921), p. 200–203
Rend. R. Acc. Naz. Lincei, Vol. **30** (1921), p. 227–231
in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 154–162

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_154>

XXXII.

LE LINEE PRINCIPALI DI UNA SUPERFICIE DI S_5 E UNA PROPRIETÀ CARATTERISTICA DELLA SUPERFICIE DI VERONESE (¹)

« Atti della Reale Accademia dei Lincei »,
Rendiconti ; Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali,
serie quinta, vol. XXX, 1921-1° semestre, pp. 200-203 e 227-231.

1. Data una superficie F appartenente a uno spazio S_5, e un suo punto regolare x, fra gl'iperpiani che segano F secondo linee con *punto doppio* in x, — ossia iperpiani passanti pel piano π tangente a F in questo punto, — ne esistono ∞^1 per cui x diventa una *cuspide*, e son quelli tangenti al noto cono quadrico V_4^2 di Del Pezzo uscente da π, che contiene i punti di F infinitamente vicini a x di 1° e di 2° ordine. Fra gli ∞^1 iperpiani ve ne sono poi, in generale, *cinque*, che dànno sezioni aventi in x un *tacnodo* (²).

Le 6 coordinate omogenee x_i del punto x di F siano funzioni dei due parametri u, v. Le derivazioni successive rispetto a questi s'indichino apponendo gl'indici superiori 1, 2, sicchè sia inteso che questi non significheranno esponenti di potenze ; e si scriva (ξx) in luogo di $\Sigma \xi_i x_i$, ecc. Si esprime che un iperpiano di coordinate ξ_i sega F in una curva avente in x un tacnodo, colla tangente nella direzione $du : dv$, ponendo le 6 equazioni :

$$(1) \qquad (\xi x) = 0 \,, \quad (\xi x^1) = 0 \,, \quad (\xi x^2) = 0$$

$$(2) \qquad (\xi x^{11})\, du + (\xi x^{12})\, dv = 0 \,, \quad (\xi x^{12})\, du + (\xi x^{22})\, dv = 0$$

$$(3) \qquad (\xi x^{111})\, du^3 + 3\, (\xi x^{112})\, du^2\, dv + 3\, (\xi x^{122})\, du\, dv^2 + (\xi x^{222})\, dv^3 = 0 \,,$$

(¹) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

(²) Questo fatto è rilevato alla fine del n. 24 dei miei *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi.* (Rend. Palermo, 30, 1910_2, p. 87 [qui a p. 71]), da citarsi in seguito brevemente con « *Prelimi* ». — Citerò invece con « *Sup.* » la mia Nota anteriore *Su una classe di superficie degl'iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine* (Atti Acc. Torino, 42, 1906-07, p. 559 [qui a p. 20]). Ivi al n. 4 s'incontra il cono V_4^2 su nominato.

dalle quali, eliminando le ξ_i, si ha per $du : dv$ l'equazione determinante

$$(4) \qquad | x, x^1, x^2, x^{11}\,du + x^{12}\,dv, x^{12}\,du + x^{22}\,dv,$$
$$x^{111}\,du^3 + 3x^{112}\,du^2\,dv + 3x^{122}\,du\,dv^2 + x^{222}\,dv^3 | = 0,$$

che determina appunto 5 direzioni $du : dv$, ossia 5 tangenti, e quindi poi 5 iperpiani ξ.

Le formole (1), (2), (3) provengono, per dualità, dalle (14), (22), (26) del n. 23 dei « *Prelim*[i] ». Ma esse si hanno anche subito direttamente, scrivendo i punti di F prossimi a x così:

$$x(u+du, v+dv) = x + x^1 du + x^2 dv + \frac{1}{2}(x^{11}du^2 + 2x^{12}du\,dv + x^{22}dv^2) + \ldots,$$

e sostituendo nell'equazione dell'iperpiano ξ (cfr. il n. 8 di « *Sup.* », ove f è l'attuale (ξx)). Se ξ verifica le (1), la sezione risulta con punto doppio in x, avendo ivi le tangenti date da $(\xi x^{11})\,du^2 + 2\,(\xi x^{12})\,du\,dv + (\xi x^{22})\,dv^2 = 0$. Perchè si abbia un tacnodo colla tangente $du : dv$ occorre: che questa annulli le 1° derivate di quella forma quadratica, il che dà le (2); e inoltre annulli la forma cubica in du, dv, che vien dopo nello sviluppo dell'equazione della curva: e ciò dà la (3).

Dirò *tangenti principali* di F in x le 5 rette nelle direzioni determinate dalla (4), e *linee principali* di F quelle che sono inviluppate da tali tangenti, ossia le linee integrali di quell'equazione differenziale (4). Per ogni punto di F ne passeranno in generale 5.

2. Per un'applicazione da farsi poi, converrà osservare che l'iperpiano ξ, a sezione tacnodale, che verifica le (1), (2), (3) per una radice $du : dv$ della (4), si può anche riguardare come un iperpiano tangente in pari tempo al cono quadrico V_4^2, prima nominato, relativo al punto x di F, ed all'analogo cono V_4^2 relativo al punto $(u + du, v + dv)$. In fatti, il 1° cono è rappresentato come inviluppo dalle (1) e: $(\xi x^{11})(\xi x^{22}) - (\xi x^{12})^2 = 0$. Si scriverà che ξ appartiene anche al 2° cono differenziando totalmente rispetto a u, v queste quattro equazioni. Con ciò, dalle (1) si ottengono soltanto le (2); e dall'altra (che è poi conseguenza delle (2)):

$$[(\xi x^{22})(\xi x^{111}) + (\xi x^{11})(\xi x^{122}) - 2\,(\xi x^{12})(\xi x^{112})]\,du +$$
$$+ [(\xi x^{22})(\xi x^{112}) + (\xi x^{11})(\xi x^{222}) - 2\,(\xi x^{12})(\xi x^{122})]\,dv = 0.$$

Ora quest'equazione, applicando convenientemente le (2), si viene a trasformare appunto nella (3).

3. Possiamo definire direttamente le linee principali anche così. Consideriamo la varietà V_3 luogo degli ∞^1 piani π tangenti a F nei punti x di una data linea L. Se quella varietà non è *sviluppabile* (ordinaria), e quindi tale che lungo ogni piano generatore ammetta un S_3 tangente fisso, vi sarà per ogni π un iperpiano (che lo unisce al piano successivo, incidente a π in x) contenente gli ∞^1 S_3 tangenti alla V_3 nei punti di π (« *Prelim*ⁱ » § 1): diciamo brevemente un iperpiano tangente alla V_3 lungo π. Orbene volendo che L sia linea principale di F, questo equivarrà a dire che: o la V_3 è sviluppabile; o, se no, per ciascun π l'iperpiano tangente alla V_3 lungo esso ha contatto quadripunto con L nel corrispondente punto x: cioè ne contiene l'S_3 osculatore, e non soltanto il piano osculatore, come avverrebbe per una linea qualunque.

Invero si pensi L rappresentata da $v = v(u)$. La V_3 è il luogo del piano π determinato dai punti x, x^1, x^2: cioè il luogo del punto $x + \lambda x^1 + \mu x^2$, al variare di u, λ, μ. L'S_3 tangente in quel punto ad essa è l'S_3 del punto stesso e dei suoi primi derivati, cioè x^1, x^2, $x^1 + v' x^2 + \lambda (x^{11} + v' x^{12}) + \mu (x^{12} + v' x^{22})$. Esso sta, comunque si prendan λ, μ, nello spazio determinato dai punti

$$x, \quad x^1, \quad x^2, \quad x^{11} + v' x^{12}, \quad x^{12} + v' x^{22}. \tag{5}$$

Questo sarà dunque, nel caso generale, l'iperpiano tangente alla V_3 lungo π. D'altra parte l'S_3 osculatore alla $v = v(u)$ in x è quello dei punti $x, x^1 + v' x^2, x^{11} + 2v' x^{12} + v'^2 x^{22} + v'' x^2, x^{111} + 3v' x^{112} + 3v'^2 x^{122} + v'^3 x^{222} + 3v'' x^{12} + 3v' v'' x^{22} + v''' x^2$. I primi tre di essi (che dànno il piano osculatore a L) stanno già sull'iperpiano (5). Dire che vi giace anche il 4° è come dire che vi sta $x^{111} + 3v' x^{112} + 3v'^2 x^{122} + v'^3 x^{222}$: ossia equivale a scrivere la (4).

Se poi per ogni x di L i punti (5) stanno in un S_3, sicchè la V_3 è sviluppabile, ciò viene a dire che gli elementi omologhi delle prime 5 colonne del determinante (4) son legati da una stessa relazione lineare; e quindi, senz'altro, la (4) è verificata dalla L: ossia questa è una linea principale (3).

4. Quando F è una superficie *sviluppabile*, vale a dire un cono, oppure l'insieme delle tangenti di una curva di S_5, segue subito dalle ultime parole dette che *tutte* le linee segnate su F sono principali.

---

(3) Un'altra proprietà geometrica delle 5 tangenti principali è data da E. Bompiani al n. 7 della Nota *Sopra alcune estensioni dei teoremi di* Meusnier *e di* Eulero (Atti Acc. Torino, 48, 1912-13, p. 393).

Consideriamo invece il caso che F sia una superficie non sviluppabile, di quelle (studiate in « *Sup.* ») per le quali le 6 coordinate $x_i(u\,v)$ son soluzioni di una stessa equazione a derivate parziali (di LAPLACE):

$$Ax^{11} + Bx^{12} + Cx^{22} + Dx^1 + Ex^2 + Fx = 0\,, \tag{6}$$

ove $A, B, \ldots$ son date funzioni di u, v; e cerchiamo quali sono per essa le linee principali.

Applicando la (6) alle sei x_i, moltiplicando per ξ_i, — ove l'iperpiano ξ sia uno di quelli considerati al n. 1, — e sommando, si trae, grazie alle (1):

$$A\,(\xi x^{11}) + B\,(\xi x^{12}) + C\,(\xi x^{22}) = 0\,.$$

Quest'equazione, presa insieme colle (2), ammette due possibilità: 1°) è nullo il determinante dei coefficienti delle tre quantità (ξx^{11}), (ξx^{12}), (ξx^{22}), ossia si ha

$$Cdu^2 - Bdu\,dv + Adv^2 = 0\,, \tag{7}$$

cioè la direzione $du:dv$ è quella di una delle *caratteristiche* della superficie (« *Sup.* » nn. 13, 14, 15). Per ognuna di queste linee avviene che i piani tangenti nei suoi punti a F formano una V_3 sviluppabile (ordinaria); perciò (n. 3) le caratteristiche rientrano fra le linee principali. 2°) si ha:

$$(\xi x^{11}) = 0\,, \quad (\xi x^{12}) = 0\,, \quad (\xi x^{22}) = 0\,, \tag{8}$$

ossia ξ è l'iperpiano (*iperosculatore*) che sega F in una curva con punto *triplo* in x (« *Sup.* » n. 19) (4). Allora le (2) son verificate senz'altro, e resta la (3), che dà precisamente la terna delle tangenti a quella curva nel punto triplo (cfr. « *Sup.* » n. 21). E già al n. 22 di « *Sup.* », per questa classe di superficie, avevo chiamato quella terna di rette la *terna delle tangenti principali.*

Concludiamo dunque: *la quintupla delle tangenti principali di una superficie, non sviluppabile, di* S_5, *si scompone, nel caso che la superficie verifichi un'equazione di* LAPLACE, *nella detta terna di rette*

(4) Dalle sei equazioni (1) e (8) risulta che quest'iperpiano ξ è ben determinato: perchè, avendo escluso che F sia sviluppabile, è unica (« *Sup.* » n. 12) l'equazione (6) verificata dalle x_i, e quindi la matrice quadrata d'ordine 6 delle x_i e delle loro derivate prime e seconde ha la caratteristica 5.

e nella coppia delle tangenti alle caratteristiche (Hessiana di quella terna) ([5]).

5. Aggiungiamo che su una superficie non sviluppabile che verifichi un'equazione di LAPLACE, non solo non può svanire in ogni punto la coppia (7) delle tangenti alle caratteristiche (perchè A, B, C non possono essere tutte tre nulle identicamente); ma nemmeno può essere indeterminata la terna delle ulteriori tangenti principali. Invero questo fatto significherebbe che son nulle identicamente le 4 quantità (ξx^{pqr}), ove p, q, r valgono 1 o 2. La (39) di « *Sup.* » (n. 20) ci darebbe: $(\xi^r x^{pq}) = 0$; e questa colle (36) e (37) proverebbe che tanto le ξ^1_i quanto le ξ^2_i soddisfano quelle stesse 6 equazioni lineari omogenee (1) e (8), che individuano i rapporti delle ξ_i. Ne seguirebbe, per ogni combinazione ik, $\xi^1_i \xi_k - \xi^1_k \xi_i = 0$, $\xi^2_i \xi_k - \xi^2_k \xi_i = 0$; e quindi i rapporti $\xi_i : \xi_k$ sarebbero costanti: la superficie starebbe in un iperpiano ξ fisso, contro l'ipotesi.

6. Vogliamo ora riconoscere, per una superficie *qualunque* F appartenente a S_5, quando avviene che in tutti i suoi punti le tangenti principali siano indeterminate.

In base al n. preced^e possiamo già escludere le superficie non sviluppabili soddisfacenti a un'equazione di LAPLACE. Di conseguenza (« *Sup.* » n. 5 e n. 13) per un punto generico x della F il cono quadrico V_4^2 (n. 1) sarà irriducibile. Ciò posto, ci conviene mutare il problema nel suo duale entro S_5 (cfr. « *Sup.* » n. 10, « *Prelim^i* » n. 22). In luogo della superficie F, avremo una ∞^2 d'iperpiani; invece dei piani tangenti di F, il sistema Σ dei *piani caratteristici* di quella ∞^2 d'iperpiani. Al cono V_4^2 dianzi nominato risponderà la *conica focale* di un piano di Σ entro questo sistema ∞^2: tale conica nel caso attuale sarà dunque, per un piano generico, irriducibile. Quanto poi ai 5 iperpiani ξ del n. 1, essi si trasportano in 5 punti di quella conica focale, i quali, in base all'osserva-

---

([5]) Com'è già avvertito in nota al n. 23 di « *Sup.* », se l'equazione (6) è *parabolica*, ad esempio se la superficie è rigata, le linee principali si riducono al sistema *semplice* delle caratteristiche (per le rigate, il sistema delle generatrici rettilinee) ed un altro sistema semplice di linee. E. BOMPIANI (« *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negl'iperspazi* », Rend. Palermo, 37, 1914_1, p. 305: v. a p. 314) ha incontrato, fra quelle linee che egli chiama *quasi-asintotiche* per le rigate, questo secondo sistema di linee principali (nella sua notazione sono le $\gamma_{2,3}$), rilevando come la loro determinazione dipenda da un'equazione di RICCATI: sicchè vale un teorema analogo a quello noto di P. SERRET relativo alle rigate ordinarie.

zione del n. 2, si potranno riguardare come intersezioni della conica stessa con coniche focali infinitamente vicine: dunque come *fochi di 2° ordine* per Σ (6). Così il nostro problema si trasforma in questo: quando è che, non solo 5, ma tutti i punti di ogni conica focale di Σ sono fochi di 2° ordine.

Ora a tale questione risponde appunto il n. 4 della mia ultima Nota, ora citata, quando lo si applichi alla projezione su un S_4 del sistema di piani Σ. Si vede così che Σ è l'insieme degli ∞^2 piani contenenti le coniche di una superficie del 4° ordine di VERONESE. Per conseguenza il sistema dei piani tangenti di F, da cui Σ s'era ottenuto per dualità, sarà l'insieme dei piani tangenti di una superficie di VERONESE: e quindi F sarà appunto una tal superficie. Otteniamo dunque il seguente risultato:

Le sole superficie appartenenti a S_5, *per le quali sono indeterminate in ogni punto le 5 tangenti principali, ossia per cui tutte le linee son linee principali, sono le superficie sviluppabili e la* F^4 *di* VERONESE.

7. Il concetto di *linea principale* per una superficie di S_5 si può illustrare da un nuovo punto di vista, con la seguente considerazione, che è evidentemente capace di essere ulteriormente estesa.

Precisiamo l'*ordine infinitesimale di vicinanza*, per due piani infinitamente prossimi, di S_5, assumendoli in una ∞^1 di piani, che determiniamo con 3 punti $x\, y\, z$ funzioni di un parametro variabile t. Intenderemo cioè per «ordine di vicinanza» dei piani corrispondenti ai valori t, $t + dt$ del parametro, l'ordine infinitesimale, rispetto a dt come infinitesimo principale, del determinante

$$(9) \qquad | x(t), \quad y(t), \quad z(t), \quad x(t+dt), \quad y(t+dt), \quad z(t+dt) | .$$

È subito visto che questo numero non muta, se sostituiamo x, y, z con 3 punti qualunque, non allineati, combinazioni lineari di quelli, a coefficienti funzioni di t.

Sviluppando $x(t + dt)$, ... secondo le potenze di dt, risulta che il 1° termine nello sviluppo di quel determinante sarà in generale dt^3 moltiplicato pel determinante $D = | x\, y\, z\, x'\, y'\, z' |$. Dunque: in generale la vicinanza di due piani successivi è *del 3° ordine.* Perchè venga ad essere d'ordine superiore, dovrà annullarsi D.

(6) Cfr. la mia Nota precedente, alla p. 67 di questo vol. dei Rendiconti, *Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani, e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti* [qui a p. 149].

Supposto che ciò accada per ogni valore di t, s'annullerà pure la derivata di D: la quale è precisamente il coefficiente di $dt^4/2$ nello sviluppo di (9). Vediamo così che *se in una* ∞^1 *di piani l'ordine di vicinanza di due piani successivi generici è superiore al 3°, esso sarà almeno uguale a* 5. Questo caso, dell'annullamento identico di D, avverrà (« *Prelim^i* » § 1) quando la V_3 luogo degli ∞^1 piani ha lungo ogni piano un S_4 (od S_3) tangente, cioè ogni piano ha un foco (punto d'incidenza col piano successivo), sicchè: o tutti i piani son tangenti ad una stessa linea, luogo di quel foco; oppure passano tutti per uno stesso punto: il che escluderemo, non essendovi occasione allora ad ulteriori ricerche, perchè il determinante (9) riesce $\equiv 0$.

Siano dunque gli ∞^1 piani tangenti ad una stessa linea L, il cui punto variabile assumeremo per $x(t)$. Potremo allora prendere y in $x'(t)$; e il determinante (9), sviluppato, diventerà

$$|x(t), \quad x'(t), \quad z(t), \quad x(t+dt), \quad x'(t+dt), \quad z(t+dt)| =$$
$$= \frac{1}{12} dt^5 |xx'x''x'''zz'| + \frac{1}{24} dt^6 \left\{ |xx'x''x^{\text{IV}}zz'| + |xx'x''x'''zz''| \right\} + \ldots$$

Perchè questo risulti sempre infinitesimo d'ordine superiore al 5° dev'essere identicamente

$$(10) \qquad |xx'x''x'''zz'| = 0 .$$

Derivando, si vede che sarà nullo anche il coefficiente di dt^6; sicchè: *se l'ordine di vicinanza è superiore a* 5, *esso varrà almeno* 7. Ove la V_3 luogo degli ∞^1 piani non sia sviluppabile (ordinaria), e quindi sia determinato l'iperpiano che le è tangente lungo un piano generico $xx'z$, — iperpiano di questi punti e di x'' z', — la (10) dice che esso conterrà anche x''', cioè avrà contatto quadripunto in x colla L. (Se invece la V_3 è sviluppabile, ossia l'insieme dei piani osculatori di una linea, si potrà assumere z in $x''(t)$, e si riconosce subito che l'ordine di vicinanza di due piani successivi sale a 9).

In tal modo quelle varietà di ∞^1 piani, che s'erano già incontrate al n. 3 in relazione colle linee principali di F, risultan caratterizzate sotto un nuovo aspetto: in esse due piani successivi son più prossimi fra loro (ordine 7), che non nel caso generale (ordine 3), e nel caso di ∞^1 piani tangenti ad una linea, senz'altra particolarità (ordine 5).

Ritornando appunto al n. 3 e all'insieme dei piani tangenti di una superficie, potremo ora dire che: *mentre due piani tangenti successivi di una superficie hanno in generale vicinanza del 5° ordine, se i loro punti di contatto stanno su una stessa linea principale la vici-*

nanza è del 7° ordine (*almeno*). E il teorema finale del n. 6 si potrà anche enunciare così: *Se una superficie appartenente ad* S_5 *è tale che due piani tangenti successivi abbian sempre vicinanza d'ordine superiore al 5°, la superficie è sviluppabile* (l'ordine di vicinanza $= 9$), *oppure è la* F^4 *di* VERONESE (l'ordine di vicinanza è infinito, perchè i piani tangenti sono a due a due incidenti).

8. Il fatto che l'ordine infinitesimale di vicinanza di due piani di S_5 salta da 3 a 5, da 5 a 7, da 7 a 9, rientra in una proposizione generale relativa agli S_k di S_{2k+1}, con k pari.

Introduciamo per questi S_k le coordinate di GRASSMANN: determinanti d'ordine $k+1$ estratti dalla matrice delle coordinate omogenee di $k+1$ punti indipendenti. Indichiamole con p_r, ove r sia un numero $1, 2, \ldots, \binom{2k+2}{k+1}$, con cui si rappresenti una determinata permutazione di $k+1$ fra gl'indici $1, 2, \ldots, 2k+2$ di quelle coordinate omogenee di punti. Anzi, indichino 1 e 2, come pure 3 e 4, e poi 5 e 6, ecc., delle permutazioni *complementari*, nel senso che, prese insieme nell'ordine indicato, costituiscano una permutazione pari di tutti gl'indici $1, 2, \ldots, 2k+2$. Allora, *nell'ipotesi fatta che k sia pari*, il determinante delle coordinate dei $2k+2$ punti che determinano due S_k, p e q, si potrà scrivere come forma bilineare alternata delle coordinate di questi spazi: $[p, q] = (p_1 q_2 - p_2 q_1) + (p_3 q_4 - p_4 q_3) + \ldots$ (7). E così il determinante analogo a (9), che serve a valutare l'ordine di vicinanza di due S_k, viene a rappresentarsi con $[p(t), \; p(t+dt)]$; che, sviluppando $p(t+dt)$ secondo le potenze di dt, diventa $\Sigma [p, p^a] \, dt^a/a!$ (significando con p_r^a la derivata d'ordine a di p_r rispetto a t). L'ordine di vicinanza sarà dato, in ciascun caso, dal primo indice a che comparirà effettivamente in questa serie: vale a dire dal primo a tale che la $[p, p^a]$ non sia nulla. Come al n. preced° si riconoscerà che quest'ordine è almeno uguale a $k+1$.

Ciò premesso, supponiamo che *l'ordine di vicinanza sia $m+1$* (*almeno*), cioè che sian nulle, identicamente rispetto a t, tutte le $[p, p^a]$ con $a \leq m$. Dico che saran pure nulle tutte le $[p^b, p^c]$ con $b + c \leq m$. Invero da $[p, p^{a-1}] = 0$, derivando rispetto a t, e tenendo conto che $[p, p^a] = 0$, segue $[p', p^{a-1}] = 0$, per $a \leq m$.

---

(7) Cfr. il principio della mia Memoria *Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni* (Ann. mat., (3) 27, 1918, p. 75).

Quindi anche $[p', p^{a-2}] = 0$; sicchè, derivando e basandosi sulla precedente, si ha $[p'', p^{a-2}] = 0$. Così pure sarà $[p'', p^{a-3}] = 0$; e derivando, e valendosi dell'ultima, si trae: $[p''', p^{a-3}] = 0$. E così via.

Fissando ora che $m + 1$ sia pari $= 2\mu$, avremo dunque:

$$[p, p^m] = 0, \quad [p', p^{m-1}] = 0, \quad [p'', p^{m-2}] = 0, \ldots, [p^{\mu-1}, p^\mu] = 0,$$

e derivando:

$$[p, p^{m+1}] + [p', p^m] = 0, \quad [p', p^m] + [p'', p^{m-1}] = 0, \quad [p'', p^{m-1}] + \\ + [p''', p^{m-2}] = 0, \ldots, [p^{\mu-1}, p^{\mu+1}] + [p^\mu, p^\mu] = 0,$$

donde, essendo $[p^\mu, p^\mu] = 0$, segue $[p, p^{m+1}] = 0$; sicchè l'ordine effettivo di vicinanza risulta almeno $m + 2$, e non $m + 1$.

Concludiamo che: *in* S_{2k+1}, *quando* k *è pari, l'ordine infinitesimale di vicinanza di due* S_k *è sempre dispari.*