Corrado Segre

Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve piane o spaziali

Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **56** (1920-21), p. 78–89

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 163–175

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_163>

XXXIII.

LE SUPERFICIE DEGLI IPERSPAZI CON UNA DOPPIA INFINITÀ DI CURVE PIANE O SPAZIALI

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino »,
Vol. LVI, 1920-21, pp. 75-89 (*).

Le superficie con ∞^2 linee piane e quelle con ∞^3 curve spaziali.

1. Il problema che qui mi son proposto di risolvere — determinare tutte le superficie [1] di S_5, o di spazi superiori, che contengono ∞^2 curve giacenti in spazi ordinari, — se anche può sembrare di carattere un po' particolare, vien trattato con metodi capaci di essere estesi a questioni analoghe; e conduce ad un risultato, che potrà trovare utili applicazioni in altri campi.

Premetterò la ricerca, molto ovvia, di quelle superficie di S_4 o spazi superiori che contengono ∞^2 linee *piane*.

Riduciamoci con projezione al caso di una superficie F appartenente a S_4; e consideriamo in questo spazio il sistema Σ dei piani delle ∞^2 linee piane C di F. Per ogni punto di questa passeranno (∞^1 C, e quindi anche) ∞^1 piani del sistema. Ne deriva che su ogni piano di Σ la rispettiva C è luogo di *fochi* per Σ (punti d'incontro con piani infinitamente vicini).

Ora, per un sistema ∞^2 di piani Σ *appartenente* ad S_4, i fochi di un piano generico formano una conica. Ciò è ben noto; ma qui convien ripetere il breve calcolo, per aggiungere un'osservazione che ci tornerà utile. Si rappresentino i piani di Σ colle equazioni $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, ove

$$\alpha \equiv a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, \qquad \beta \equiv b_0 + b_1x_1 + b_2x_2,$$

(*) Presentata nell'adunanza del 19 giugno 1921.

(1) Dicendo *superficie, linee*, ecc., non intendiamo punto che debban essere *algebriche*.

i coefficienti a_i e b_i essendo funzioni di due parametri variabili u, v. Un foco x di un piano $(u\ v)$, ossia l'intersezione di questo col piano $(u+du\ , v+dv)$, verificherà le equazioni $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, e inoltre $d\alpha = 0$, $d\beta = 0$, ossia:

$$\alpha^u\, du + \alpha^v\, dv = 0\,, \qquad \beta^u\, du + \beta^v\, dv = 0\,,$$

ove gl'indici superiori significano derivazione rispetto a u, o a v. Ne segue:

$$\mathrm{J} \equiv \alpha^u\, \beta^v - \alpha^v\, \beta^u = 0\,.$$

Quest'equazione fra $x_1\, x_2$ rappresenta appunto, entro al piano $(u\ v)$, la conica luogo dei suoi fochi. E non potrà svanire, cioè non potrà essere $J \equiv 0$. Invero ciò implicherebbe che le funzioni α e β soddisfano (identicamente rispetto a $u\ v\ x_1\ x_2$) ad un'uguaglianza priva di u, v, la quale però potrebbe contenere x_1, x_2. Se in questa relazione al posto di α e β si scrivono x_3 e x_4, essa diventerà l'equazione di una V_3 di S_4: la quale dovrebbe contenere tutti i punti degli ∞^2 piani di Σ. Ora una V_3 contenente ∞^2 piani è necessariamente un S_3: perchè la sua sezione con un iperpiano è una superficie contenente ∞^2 rette, ossia un piano. Il sistema Σ starebbe dunque in un S_3: contro l'ipotesi.

Ritornando alle ∞^2 linee piane di F, o della superficie di S_n avente F per projezione, resta dunque accertato che quelle linee saranno coniche: le quali potranno essere irriducibili, o no. Nel 1^0 caso, la superficie, com'è noto, non potrà essere altro che una rigata cubica di S_4, oppure una superficie del 4^0 ordine di VERONESE in S_4 o S_5. Nel 2^0 caso, le due rette che compongono una conica variabile nella ∞^2, non potranno prendere ∞^2 posizioni, perchè la superficie che le contiene non è un piano. Descriveranno dunque due ∞^1 di rette (che posson essere sovrapposte), associandosi ogni retta dell'una con ogni retta dell'altra: e per conseguenza essendo incidenti le rette dell'una ∞^1 alle rette dell'altra. Dovranno essere incidenti in uno stesso punto: se no, formerebbero i due regoli di una quadrica ordinaria, e la superficie starebbe in S_3. Dunque quelle rette formano due coni collo stesso vertice. Considerando l'insieme di due tali coni come un unico cono, concludiamo infine:

Se una superficie appartenente ad uno spazio superiore all'ordinario contiene ∞^2 linee piane, essa è un cono; o se no, una rigata cubica di S_4; *oppure una superficie del 4^o ordine di* VERONESE *di* S_5 *o di* S_4.

2. Possiamo applicare questo risultato a determinare le superficie di S_5 o spazi superiori, che contengono una *triplice* infinità di curve appartenenti a spazi S_3. Una superficie Φ, con ∞^3 curve C siffatte, sarà projettata da ogni suo punto secondo una superficie F di S_4, o spazio superiore, contenente una retta p imagine del centro di projezione, e con ∞^2 curve *piane* C' appoggiate a p. F non è dunque una superficie di VERONESE. Se è una rigata cubica di S_4, allora Φ apparterrà ad S_5 e sarà del 4^0 ordine. Le C', essendo le ∞^2 coniche di F, *non* incontrano la retta direttrice di questa rigata. Perciò p non è la direttrice: sarà invece una generatrice di F. Le altre generatrici di questa superficie, non incontrando p, saranno projezioni di linee di Φ non passanti pel centro di projezione: dunque di rette. Φ sarà una rigata del 4^0 ordine di S_5, e le C saranno le sue ∞^3 cubiche sghembe. Se invece F è un cono, le cui generatrici sian projezioni di rette di Φ, poichè queste rette si projettano da ogni punto di Φ secondo rette concorrenti, saranno esse stesse concorrenti: Φ sarà un cono. Chè se, F essendo un cono, le sue generatrici non fossero projezioni di rette di Φ, ma bensì di curve piane; poichè ciò dovrebbe avvenire projettando da un punto generico di Φ, ne verrebbe che su questa starebbero ∞^2 curve piane; e quindi, applicando ancora il risultato finale del n. 1, Φ non potrebbe essere altro, di nuovo, che un cono. Adunque: *Se una superficie appartenente a uno spazio di dimensione* ≥ 5 *contiene* ∞^3 *curve appartenenti a spazi ordinari, e non è un cono, essa è una rigata razionale normale del* 4^o *ordine di* S_5: *le* ∞^3 *curve essendo le cubiche che stanno su questa rigata.*

Sui fochi di 1^0 e di 2^0 ordine di una doppia infinità di spazi ordinari in S_5.

3. Si abbia ora in S_5 un sistema Σ doppiamente infinito di spazi S_3. Cominciamo col fare per esso un calcolo perfettamente simile a quello del n. 1 relativo a un sistema ∞^2 di piani in S_4.

Indicando con $x_1 x_2 \ldots x_5$ le coordinate dei punti degli ∞^2 S_3, supponiamo che questi spazi sian rappresentati dalle due equazioni $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$, ove

$$\alpha \equiv a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3\,, \qquad \beta \equiv b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3\,,$$

i coefficienti a_i, b_i essendo date funzioni dei due parametri u, v. Indichiamo ancora con α^u, α^v, ecc. i polinomi lineari nelle x che son le derivate di α rispetto a u, v, ecc.

Un punto della retta comune ai due spazi (u, v) e $(u+du, v+dv)$ di Σ, ossia un *foco* del primo S_3, verificherà le equazioni

$$(1) \qquad x_4 = \alpha, \qquad x_5 = \beta,$$

e le

$$(2) \qquad \alpha^u\, du + \alpha^v\, dv = 0, \qquad \beta^u\, du + \beta^v\, dv = 0,$$

e quindi

$$(3) \qquad J \equiv \alpha^u \beta^v - \alpha^v \beta^u = 0.$$

Quest'equazione di 2⁰ grado in $x_1\, x_2\, x_3$ determina nell' $S_3\,(u\, v)$ di Σ una quadrica (*focale*), luogo di tutte le rette (*focali*) in cui quello spazio è segato dagli spazi infinitamente vicini di Σ (2). Essa non potrà svanire, cioè non potrà essere $J \equiv 0$, se Σ è *immerso* (come supporremo) in S_5. Ciò si vede collo stesso ragionamento del n. 1.

Diremo *regolo focale* dello spazio $(u\, v)$ quel regolo della quadrica focale (3), che è costituito dalle rette focali (2).

4. Dopo ciò, si vogliano quei punti x che son *fochi di 2º ordine* dell' $S_3\,(u\, v)$ di Σ, ossia intersezioni di quello spazio con *due* spazi infinitamente vicini ad esso di Σ (3). Ciò è come dire che nello spazio $(u\, v)$ si considera la congruenza delle rette che vi segnano gli altri spazi di Σ, congruenza che comprende le ∞^1 rette focali: e si vogliono i fochi (ordinari) x di quella congruenza che spettano a queste ∞^1 rette.

Si può anche dire che un tal punto x è caratterizzato dallo stare, oltre che sulla retta focale (2) dello spazio $(u\, v)$ rappresentato dalle (1), anche sulla quadrica focale dello spazio infinitamente vicino $(u + du, v + dv)$. Perciò, oltre alle equazioni (1) e (2), da cui segue (3), dovrà soddisfare le equazioni che si deducono da (1) e (3) differenziandole totalmente rispetto a u, v, con x fisso: ossia le (2) ancora, e

$$(4) \qquad J^u\, du + J^v\, dv = 0.$$

Le (2) e (4) provano, riguardando $du : dv$ come un parametro, che il luogo di x è, nell' $S_3\,(u\, v)$, una curva generata da tre fasci projettivi:

(2) Cfr. i miei *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*. Rend. Palermo, 30, 1910_2, p. 87 [Questo volume, p. 71].

(3) Cfr. la mia Nota *Sui fochi di 2º ordine dei sistemi infiniti di piani, e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti*, Rend. Acc. Lincei, (5) 30, 1921_1, p. 67 [Questo volume, p. 149.

due fasci di piani, che generano il regolo focale sulla quadrica (3), e un fascio di quadriche. È dunque una *quintica* (*focale di 2° ordine*), che incontra in 2 punti le generatrici del regolo focale, e in 3 punti quelle dell'altro regolo della quadrica J. Possiam rappresentare questa curva colla equazione:

$$\begin{vmatrix} \alpha^u & \beta^u & J^u \\ \alpha^v & \beta^v & J^v \end{vmatrix} = 0 . \tag{5}$$

5. Quando è che su ciascun S_3 di Σ tutti i punti della quadrica focale si posson riguardare come fochi di 2^0 ordine?

Si può veder ciò con un calcolo identico a quello adoperato al n. 4 della Nota citata in ([3]). Oppure possiamo applicare, senz'altro, il risultato ivi ottenuto alla sezione che un S_4 generico fa nel nostro sistema Σ di ∞^2 S_3. Avremo una ∞^2 di piani tale che, per l'ipotesi, su ogni piano tutti i punti della conica focale (traccia della quadrica focale di un S_3 di Σ) son fochi di 2^0 ordine. Il n. 4 citato della suddetta Nota stabilisce che allora il luogo delle ∞^2 coniche focali è una superficie. Dunque, tornando a Σ in S_5, il luogo delle ∞^2 quadriche focali, anzi che una V_4 come in generale, sarà una V_3. E se poniamo la condizione che le quadriche focali generiche non si spezzino, la V_3 avrà per sezione con un S_4 generico una superficie contenente ∞^2 coniche irriducibili: dunque una F^3 (rigata), oppure una F^4 di VERONESE (dello S_4). Ne deriva ([4]) che la V_3 sarà una V_3^3 normale di S_5, luogo di una ∞^1 razionale di piani; oppure un cono V_3^4 projettante una F^4 di VERONESE (di S_4 o di S_5, che è lo stesso).

Effettivamente queste due specie di V_3 dello S_5 contengono ∞^2 quadriche ordinarie Q (coni nel 2^0 caso), che si tagliano a due a due in una retta, per la quale passano ∞^1 Q. Cosicchè il sistema degli ∞^2 S_3 delle Q è tale che su ogni S_3 ciascuna retta focale, come retta comune a infiniti di quegli spazi, è focale non solo di 1^0 ma anche di 2^0 ordine.

Dunque: *Se un sistema ∞^2 di spazi ordinari appartenente a* S_5 *è tale che su ogni suo* S_3 *generico la quadrica focale sia irriducibile, e*

([4]) V. le citazioni contenute nelle note ([474]) e ([593]) al mio articolo *Mehrdimensionale Räume* nell'*Encyklopädie der math. Wissenschaften*, Bd. III 2, p. 769.

Ricordo, pel seguito, che la V_3^3 normale di S_5, quando non sia un cono, si può ottenere come luogo delle rette congiungenti i punti omologhi di due piani collineari (due qualunque dei suoi piani).

sia luogo di fochi di 2° ordine (cosicchè la quintica focale di 2° ordine svanisca); esso si comporrà degli S_3 *che contengono le* ∞^2 *quadriche di una* V_3^3 *razionale normale di* S_5, *oppure di quelli in cui stanno gli* ∞^2 *coni quadrici ordinari contenuti nel cono* V_3^4 *che da un punto projetta una* F^4 *di* VERONESE [5].

Applicazione alle superficie di S_5 con ∞^2 curve spaziali.

6. Premessa questa ricerca, veniamo ad applicarla al nostro oggetto principale, considerando quelle superficie immerse in S_5, sulle quali stanno ∞^2 curve C *appartenenti completamente* [6] a spazi ordinari.

Per ogni punto di una tal superficie F passeranno ∞^1 di quelle C, e quindi ∞^1 di quegli spazi ordinari. In conseguenza gli ∞^2 S_3 delle C formano un sistema Σ, pel quale ciascun punto di F, come intersezione di infiniti spazi, potrà riguardarsi quale foco di 1^0, 2^0, ... ordine degli spazi su cui giace. La quadrica focale di ogni S_3 dovrà dunque contenere la C di questo spazio; e poichè la C è, per ipotesi, completamente sghemba, quella quadrica sarà irriducibile.

Di più, la C di ciascun spazio è composta di fochi di 2^0 ordine per questo. Due casi saran possibili. O la quadrica focale di S_3 è tutta di fochi di 2^0 ordine: e allora (n. 5) le quadriche focali compongono l'una o l'altra delle V_3 di cui s'è detto or ora; e la nostra superficie F giace su una di quelle V_3. Oppure in ogni S_3 generico di Σ il luogo dei fochi di 2^0 ordine è una quintica (n. 4): la nostra C dovrà essere o questa C^5, o una parte di essa, cioè una quartica (di 1^a o di 2^a specie) od una cubica [7].

Se su una V_3^3 di S_5, o sul cono V_3^4, si prende una qualsiasi superficie, questa sega in generale ognuna delle ∞^2 quadriche giacenti nella V_3 secondo una curva che appartiene a un S_3. Così si hanno dunque, realmente, due grandi classi di superficie (algebriche e trascendenti) che rispondono al nostro problema.

Le *altre* superficie, cioè quelle che non stanno in una delle dette V_3 — sicchè su esse le ∞^2 curve spaziali C sono algebriche

(5) Talvolta diremo brevemente: il *cono* V_3^4 *di* VERONESE. Si tenga presente che anche la V_3^3 può essere un cono.

(6) Intendo dire che una C generica non sia, *nemmeno in parte*, una linea piana (in particolare una retta).

(7) Nella ricerca che mi portò a questa conclusione mi fu utile un'osservazione che ebbe a farmi nel giugno 1920 il mio amico Prof. G. FUBINI: osservazione da cui fui condotto a considerare la quintica focale.

d'ordine ≤ 5, — sono di conseguenza esse stesse algebriche. Le chiameremo, per brevità, superficie delle *specie isolate*. Per esse occorre fare uno studio apposito: il cui risultato sarà di ridurle a pochi tipi.

Le superficie delle specie isolate. Esclusione del caso di ∞^2 quintiche.

7. Possiamo anzitutto dire qualcosa intorno al numero dei punti d'incontro delle C a due a due.

Questo numero, trattandosi di superficie algebriche, non muterà al variare delle due C: in particolare ricorrendo a due C infinitamente vicine. Ma allora le intersezioni di queste staranno sulla retta comune ai loro S_3: che è una retta del regolo focale. Se la C è C^5 (la quintica focale di 2^0 ordine), o C^4 di 1ª specie, una tal retta la incontra in due punti (n. 4). Se invece è C^4 di 2ª specie, la incontrerà in un punto solo: se no, dovrebbe incontrarla in tre punti (in causa del noto comportamento della C^4 rispetto alle generatrici della quadrica che la contiene), in contraddizione col fatto che la C^4 è parte della quintica focale, che è incontrata in due soli punti dalle rette focali. Se infine è C^3, può incontrare la retta focale in due punti, od anche in uno.

Dunque: In quelle superficie delle specie isolate su cui le ∞^2 curve spaziali son quintiche, o quartiche di 1ª specie, queste curve s'incontrano mutuamente in due punti. In quelle su cui son quartiche di 2ª specie, in un punto solo. Le superficie con ∞^2 cubiche posson presentare l'un caso o l'altro.

8. Quando su una superficie F delle specie isolate le ∞^2 C s'incontrano a due a due in due punti, per due punti di F passeranno in generale almeno due C.

Invero, se per una coppia generica di punti passasse una sola C, per la coppia di punti d'incontro di due C dovrebbero passarne infinite. Gli ∞^2 S_3 delle C si taglierebbero a due a due in ∞^2 rette (le rette di siffatte coppie di punti), per ognuna delle quali passerebbero ∞^1 di quegli spazi. Perciò quelle rette sarebbero focali di (1^0 e di) 2^0 ordine pel sistema degli ∞^2 S_3. Questo sistema presenterebbe dunque il caso del n. 5; le quadriche focali dei vari spazi formerebbero una V_3^3 o V_3^4, su cui starebbero le C e quindi F: contrariamente all'ipotesi che F appartenga alle specie isolate.

9. Ora potremo dimostrare che *per le specie isolate le* C *non posson essere del* 5^0 *ordine.*

Supponiamo che siano di quell'ordine; e osserviamo anzitutto che le C generiche, pel modo come si comportano rispetto alle generatrici della quadrica focale (fine del n. 4), saranno di genere 2. Se no, dovrebbero tutte avere dei punti doppi. Ove questi fossero variabili, le due intersezioni di una C fissata con qualunque C infinitamente vicina sarebbero sempre infinitamente prossime al punto doppio della prima; e quindi la retta del regolo focale che deve contenerle sarebbe sempre *quella* retta focale che passa pel punto doppio: e non una *qualunque* retta del regolo focale, come dev'essere. Ove invece le ∞^2 C avessero comune un punto doppio, projettando la superficie F da questo su S_4 si otterrebbe una superficie con ∞^2 linee piane; e ne seguirebbe (n. 1) che F sta su un cono V_3^3 o V_3^4, contro la ipotesi (8).

Dopo ciò, poichè per due punti generici di F passano (n. 8) almeno due C, distinguiamo le due possibilità: che ne passino più che due, o solo due.

Nel 1^0 caso, considerando solo quelle C che passano per un punto fissato su F, avremmo che esse formano un sistema ∞^1 di *grado* 1 e d'*indice* > 2; e una proposizione di CASTELNUOVO (9) stabilisce che allora ogni curva di quel sistema è razionale.

Nel 2^0 caso, non potendosi più applicare quella proposizione, ricorriamo a quest'altra: Se una superficie (come la nostra F) contiene ∞^2 curve algebriche C, tali che a due a due si taglino in due punti, e che per due punti ne passino due, le C saranno di genere 0 od 1. Invero, fissata una α di queste curve, stabiliamo fra i suoi punti una corrispondenza biunivoca, ricorrendo a un'altra, γ, di esse, nel seguente modo. Detti m e n i due punti d'intersezione di α e γ, per ogni punto P di α e per m tiriamo quella C diversa da α che passa per questi punti: essa taglierà γ, oltre che in m, in un punto Q. Si conduca per Q e per n la C diversa da γ. Essa ta-

(8) Se le C sono del 5^0 ordine, si avrebbe anzi un assurdo: perchè le linee piane, projezioni di esse, dovrebbero pel n. 1 essere coniche. Ma, pel seguito, conveniva in questo punto non basarsi sull'ordine delle C.

(9) « Una superficie la quale contenga un sistema ∞^1 (algebrico) di curve (algebriche) di grado 1 e di indice superiore a 2, è razionale, ed è razionale ciascuna curva del sistema ». È data come corollario, nel n. 4 (p. 736) della Nota *Sulla linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti ad una curva algebrica,* Atti Acc. Torino, XXVIII, 1892-93, p. 727.

glierà α, oltre che in n, in un punto P'. La corrispondenza fra i punti P e P' di α è biunivoca; e si può vedere che essa non rimane fissa, mutando comunque γ. Perciò la curva α, ammettendo infinite corrispondenze algebriche biunivoche, sarà di genere 0 od 1.

In ambi i casi abbiamo che le ∞^2 C della superficie F non posson essere di genere 2: contrariamente a ciò che prima s'era detto. Resta dunque esclusa l'esistenza delle superficie isolate colle C del 5^0 ordine (*).

Le superficie delle specie isolate, con ∞^2 quartiche o cubiche.

10. Veniamo al caso che le C sian del 4^0 ordine e 1^a specie.

Di nuovo, come in principio del n. precedente, si potrà asserire che le C generiche non avran punti doppi, e quindi saranno ellittiche. E poichè si tagliano mutuamente (n. 7) in due punti, si potrà, applicando ancora la proposizione di CASTELNUOVO (n. 9) alle ∞^1 C passanti per un punto di F, escludere che per due punti di questa passino più che due linee C. Ne passeranno dunque (n. 8) precisamente due.

Il sistema delle ∞^1 C contenenti un punto m di F si può porre in corrispondenza biunivoca colla serie dei punti, in cui una fissata di esse è segata, fuori di m, dalle ∞^1 C del sistema. Anche due C qualunque di F si posson punteggiare biunivocamente, segandole col sistema ∞^1 delle C passanti per un loro punto comune. Adunque le ∞^2 C ellittiche hanno ugual modulo; e il sistema delle ∞^1 C passanti per un punto qualunque di F è un ente ellittico, che ha pure quello stesso modulo.

Ora su F generiamo delle nuove linee così. Nel sistema ellittico (m) costituito dalle ∞^1 linee C che passano per un punto m di F, una g_2^1 accoppia le C. Prendiamo il luogo del punto d'intersezione, diverso da m, di due C di una stessa coppia: sarà una linea razionale L. Mutando la g_2^1 entro al sistema (m), cambierà L; ed è chiaro che per un punto di F passerà una sola di queste linee L: perchè da quel punto è individuata una coppia di C in (m), e quindi una g_2^1. Se poi fissiamo una C in (m), per un suo punto generico passerà una L, ed ogni L la incontrerà in un sol punto variabile. Perciò anche il fascio delle L è ellittico, e collo stesso modulo delle curve C.

Le L non dipendono dal punto m. Chè, se sostituendo ad m

(*) Nel volume ove questa Nota è pubblicata l'A. ha aggiunto quanto segue: « a p. 84, linee 2 a 5 [qui p. 170, linee 24 a 27], la proposizione, enunciata così in generale, non è esatta. Il risultato a cui ivi si vuol giungere sarà stabilito per altra via in una 2^a Nota » [qui a p. 176] (N. d. R.).

un altro punto di F ottenessimo altre curve analoghe alle L, una di esse, pur essendo curva razionale, sarebbe segata dal fascio ellittico delle L in un'involuzione ∞^1 ellittica: assurdo.

Dunque ogni L è incontrata in un sol punto da una generica delle ∞^2 C. Sicchè se tiriamo la C per due punti di una L, la C dovrà contenere la L (che è di sua natura irriducibile). Così ogni L fa parte di qualche C. Dimostriamo che il *resto* di una L generica, cioè quella linea Λ che colla L costituisce una C, è una curva ellittica. Come due C si tagliano in due punti, così ogni C passante per un punto m, fissato in modo generico sulla L, sega ancora la $L + \Lambda$ in un secondo punto. Al variare di quella C nel sistema (m), quel punto varierà su una delle due linee L, Λ, stabilendo una corrispondenza biunivoca fra la linea stessa e il sistema (m). E poichè questo sistema è ellittico, quella linea non potrà essere L (che è razionale); ma Λ: che così risulta essere ellittica.

Ora, poichè $L + \Lambda$ costituisce uno spezzamento di una quartica, segue che L sarà una retta e Λ una cubica ellittica. F contiene dunque ∞^1 rette: è una rigata ellittica. Le ∞^2 quartiche C sono incontrate in un punto dalle rette L; due C^4 s'incontrano in due punti, per ognun dei quali passa una L. È dunque F una rigata generata da due C^4 ellittiche in corrispondenza biunivoca, con due punti uniti: una rigata ellittica del 6^0 ordine ([10]).

Viceversa una rigata ellittica del 6^0 ordine di S_5 contiene in generale — com'è noto, e come del resto si verifica subito, — appunto ∞^2 quartiche ellittiche sghembe, le quali si tagliano mutuamente in due punti, e son tali che per due punti generici ne passan due. Questa F^6 non sta in un cono V_3^4 di VERONESE: perchè nell'ipotesi che vi stesse, segando cono e superficie con un S_3 passante pel vertice del cono, si giungerebbe ad un assurdo. E nemmeno sta *in generale* in una V_3^3: se no, i piani di questa, poichè formano una ∞^1 razionale, non potrebbero contenere le generatrici di F; e invece conterrebbero, rispettivamente, infinite linee direttrici; mentre F non ha *in generale* che due direttrici piane (due cubiche, che possono anche coincidere).

11. Infine determiniamo quelle superficie di S_5 su cui le ∞^2 linee C sono cubiche sghembe, che si seghino a due a due in due punti.

Projettiamo una superficie sì fatta F da un suo punto generico P. Otterremo in S_4 una superficie Ψ con una retta p, imagine di

([10]) V. le indicazioni a p. 911 dell'articolo dell'Enciclopedia citato in ([4]).

P, e con ∞^1 coniche γ appoggiate a p, e incontrantisi fra loro mutuamente in un punto: cioè le coniche projezioni delle ∞^1 C^3 di F passanti per P. Su Ψ staranno pure ∞^2 C^3, che incontrano le coniche γ in coppie di punti. Fissiamo tre delle γ. Per esse passano ∞^2 V_3^2 dell'S_4. Basta infatti obbligare una V_3^2 a passare per i 3 punti in cui le tre coniche si tagliano mutuamente, e inoltre per 3 altri punti di ciascuna — in tutto 12 punti — perchè la V_3^2 contenga le tre γ. Ora, se una tale V_3^2 incontra Ψ in un punto ulteriore, essa conterrà ciascuna delle ∞^1 cubiche di Ψ uscenti da questo punto, perchè ne conterrà 7 punti: e dunque passerà per Ψ. Perciò: o l'intersezione di Ψ colla V_3^2 si compone in generale solo delle tre coniche, e quindi Ψ è del 3^0 ordine; oppure Ψ sta sulle ∞^2 V_3^2: ed anche allora dovrà essere d'ordine < 4, perchè per la superficie del 4^0 ordine di S_4 comune a due V_3^2 passan solo ∞^1, non ∞^2 V_3^2. È dunque Ψ del 3^0 ordine, appartenente a S_4, e perciò rigata. Su essa stanno le ∞^1 coniche γ appoggiate alla retta p: in conseguenza Ψ non è un cono, e p non è la direttrice della rigata; sarà dunque p una generatrice. Le altre generatrici di Ψ essendo sghembe con p, saran projezioni di rette di F. Dunque la superficie F di S_5 è una rigata razionale normale del 4^0 ordine.

È la superficie a cui eravamo giunti alla fine del n. 2, come quella che contiene, non solo ∞^2, ma ∞^3 curve spaziali. Tali curve sono le ∞^3 cubiche, e si segano infatti mutuamente in due punti.

Questa superficie sta su infinite V_3^3, per modo che nelle ∞^2 quadriche di una di queste varietà stanno rispettivamente ∞^2 C^3 della F^4. Così, si ha una tale V_3^3 nel cono che projetta la superficie da un suo punto; ed anche una V_3^3, che non è in generale un cono, nell'intersezione dei due coni V_4^2 che si ottengono projettando la F^4 da due corde di una sua cubica, astrazion fatta dallo S_3 di questa.

Perciò questa F^4 si potrebbe escludere dalle specie isolate. Ma se si riflette che, prendendo fra le ∞^3 sue cubiche una doppia infinità arbitraria, per es. una ∞^2 trascendente, esse *non stanno* nè sulle ∞^2 quadriche di una V_3^3, nè su quelle di un cono V_3^4 di VERONESE, si è condotti a collocare questa superficie a parte.

12. Dalla discussione iniziata col n. 9 risulta ormai che all'infuori della F^6 incontrata al n. 10, nelle superficie di S_5 delle *specie isolate* le C sono cubiche sghembe, oppure quartiche di 2^a specie; e che in ambi i casi (n^i 7 e 11) le C s'incontrano a due a due in un sol punto (tolta la F^4 del n. 11).

Segue da ciò, com'è ben noto, che in ognuna delle dette superficie le C formano un sistema lineare, una rete (omaloidica); e che la superficie si può rappresentare birazionalmente sul piano in guisa che le C abbian per imagini le rette del piano. Le sezioni iperpiane della superficie saran di conseguenza rappresentate da un sistema lineare ∞^5 di cubiche o di quartiche.

Effettivamente un sistema lineare ∞^n di curve piane del 3^0 ordine costituisce la rappresentazione (delle sezioni iperpiane) di una superficie appartenente a S_n, su cui stanno ∞^2 cubiche sghembe, in corrispondenza alle ∞^2 rette del piano. E per $n = 5$ si può riconoscere (ed avremo da ritornarci su) che la superficie non sta in generale nè su una V_3^3, nè su un cono V_3^4 di VERONESE.

Le superficie degli spazi superiori con ∞^2 curve spaziali.

13. Passiamo ora a quelle superficie con ∞^2 curve C di spazi ordinari, che appartengono a S_6.

Si projetti una tal superficie Φ su S_5 da un punto generico, esterno alla varietà M luogo degli ∞^2 S_3 delle C. Si otterrà una superficie F di S_5, della specie di cui ci siamo occupati finora. Di quali fra quelle specie?

Se F risultasse giacente in una V_3^3, sicchè gli S_3 delle sue ∞^2 curve spaziali, projezioni delle C, fossero quelli delle ∞^2 quadriche contenute in quella varietà; poichè essi (come subito si vede sulla V_3^3, anche se è un cono) formano un sistema tale che per un punto generico di S_5 ne passa uno solo; così in S_6 una retta generica (pel centro di projezione) incontrerebbe uno solo degli ∞^2 S_3 delle C: ossia incontrerebbe in un sol punto la varietà M. Ne seguirebbe — almeno ammettendo che Φ, e quindi anche M, sia analitica —, che M sarebbe un iperpiano di S_6: contro l'ipotesi che Φ sia immersa in S_6.

Invece potrà essere che F stia in un cono V_3^4 di VERONESE. In tal caso, concorrendo gli S_3 delle ∞^2 curve spaziali di F in un punto, lo stesso fatto dovrà accadere in S_6 per gli S_3 (di cui quelli son projezioni generiche) delle C di Φ: ossia la M sarà un cono. Projettando Φ dal vertice di questo cono su un S_5, si otterrà una superficie F' con ∞^2 linee piane. Queste linee non saranno coppie di rette, cioè F' non sarà un cono, perchè abbiamo escluso (v. la nota ([6])) che le C si ottengano accoppiando delle linee piane. E nemmeno può F' essere una rigata cubica di S_4: se no, Φ starebbe in un S_5. Resta dunque solo (n. 1) che F' sia una superficie di VERONESE. In conseguenza Φ sta su un cono V_3^4 projettante una superficie di VERONESE.

Infine F non può essere la rigata ellittica del 6^0 ordine (n. 10), perchè questa rigata ha S_5 per spazio normale.

Rimane dunque, oltre al caso precedente, solo quello che su F, e quindi anche su Φ, le ∞^2 curve spaziali siano una rete omaloidica di cubiche, o di quartiche di 2ª specie.

14. Se una superficie Θ con ∞^2 curve spaziali C è immersa in S_7, la sua projezione generica Φ su S_6 sarà della stessa natura. Ma Φ non potrà presentare quel caso del n. precedente in cui gli ∞^2 S_3 delle curve spaziali (projezioni delle C) passano per uno stesso punto. Se no, dovrebbe accadere lo stesso fatto per gli S_3 delle C di Θ; e allora (come al n. 13) projettando questa superficie su S_6 dal punto comune a quegli S_3 si dovrebbe ottenere una superficie di VERONESE, mentre Θ appartiene a S_7. Dunque Φ presenterà l'ultimo caso del n. precedente. E poichè lo stesso ragionamento si applica a spazi superiori ad S_7, si vede che, per le superficie di S_7 o spazi superiori contenenti ∞^2 curve spaziali, queste forman sempre una rete omaloidica di cubiche o di quartiche di 2ª specie.

Così la conclusione generale di tutta la ricerca viene ad essere questa:

Le superficie iperspaziali, che contengono ∞^2 curve appartenenti (completamente) a spazi ordinari, sono, oltre a quelle di S_4, *le seguenti*: 1^0) *Superficie di* S_5 *contenute in una* V_3^3 (*luogo di una* ∞^1 *razionale di piani*). 2^0) *Superficie di* S_5, *o di* S_6, *contenute nel cono* V_3^4 *che projetta da un punto una superficie del 4° ordine di* VERONESE. 3^0) *La rigata ellittica normale del 6° ordine di* S_5. 4^0) *Superficie razionali di* S_5 *e spazi superiori, rappresentabili sul piano mediante sistemi lineari di cubiche, o con particolari sistemi di quartiche* [11].

In una prossima Nota mostrerò come *il 4° caso si possa ridurre ulteriormente per ciò che riguarda le quartiche*; ed aggiungerò qualche applicazione.

---

[11] Le superficie delle prime due specie, cioè giacenti nelle V_3^3 o V_3^4, sono algebriche e trascendenti. Se ne posson costruire a piacere, ad esempio segando quelle due varietà con una forma qualunque, oppure ricorrendo alla rappresentazione birazionale delle due V_3 su un S_3.