Corrado Segre

Sugli elementi curvilinei che hanno comuni la tangente e il piano osculatore

Rend. R. Acc. Naz. Lincei, Vol. **33** (1924), p. 325–329

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 186–191

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_186>

XXXV.

SUGLI ELEMENTI CURVILINEI, CHE HANNO COMUNI LA TANGENTE E IL PIANO OSCULATORE (1)

« Atti della Reale Accademia dei Lincei »,
Rendiconti; Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali,
serie quinta, vol. XXXIII, 1924-1° semestre, pp. 325-329.

1. Fissati (nello spazio ordinario, o in uno spazio superiore) tre punti A, B, C, distinti, non allineati, consideriamo *rami di 1° ordine di curve analitiche* aventi l'origine in A, per tangente (ordinaria) la retta AB, come piano osculatore il piano ABC.

I punti P di un tal ramo si possono rappresentare in serie di potenze di un parametro τ così (2):

$$P = A + \tau E + \tau^2 F + \tau^3 G + \dots, \tag{1}$$

ove E indicherà un punto della tangente in A, ed F del piano osculatore. Sarà dunque, per l'ipotesi:

$$E = \alpha A + \beta B, \quad F = \gamma A + \delta B + \varepsilon C, \tag{2}$$

indicando $\alpha \dots \varepsilon$ dei coefficienti numerici; tra cui β e ε saranno essenzialmente $\neq 0$.

Ma possiamo, mutando il parametro, far comparire sempre nella (1) i punti fissi B, C al posto di E, F. Infatti, sostituendo le (2), la (1) diventa:

$$P = (1 + \alpha\tau + \gamma\tau^2) A + (\beta\tau + \delta\tau^2) B + \varepsilon\tau^2 C + \tau^3 G + \dots$$

(1) Presentata all'Accademia nella seduta del 13 aprile 1924.

(2) Com'è ormai consuetudine, una relazione lineare omogenea *tra punti*, come la (1), sta per significare che, in un sistema di coordinate omogenee proiettive, essa vale, ogni volta che vi si sostituiscano i punti $P, A, E, \dots$ colle loro coordinate omonime $p_i, a_i, e_i, \dots$, (per ogni i).

Dividiamo il 2° membro pel coefficiente di A, e sostituiamo, nella rappresentazione del ramo, il parametro τ coll'altro

$$t = \frac{\beta\tau + \delta\tau^2}{1 + \alpha\tau + \gamma\tau^2}.$$

Ciò è lecito, perchè $\beta \neq 0$; e quella relazione fra t e τ, in un intorno di $\tau = 0$, dà t in serie di potenze di τ, il cui 1° termine è $\beta\tau$; e quindi anche darà τ, nell'intorno di $t = 0$, in serie di potenze di t, col 1° termine t/β. Verrà dunque, alterando P per un fattor numerico,

$$P = A + tB + \varepsilon\,(t/\beta + \ldots)^2\, C + (t/\beta + \ldots)^3\, G + \ldots,$$

che possiamo scrivere come serie di potenze di t così:

$$P = A + tB + t^2\, mC + \ldots, \tag{3}$$

ove m è un coefficiente costante, non nullo, $= \varepsilon/\beta^2$; e i puntini indicano, come sempre nel seguito, termini di grado superiore in t.

2. Un altro ramo di 1° ordine, soddisfacente alle condizioni poste in principio, avrà similmente i suoi punti Q rappresentabili in serie di un parametro u così:

$$Q = A + uB + u^2\, m'\, C + \ldots, \tag{4}$$

con $m' \neq 0$. Fra i punti P, Q dei due rami poniamo una corrispondenza analitica biunivoca, per cui l'origine comune A risponda a se stessa; cioè:

$$u = ht + kt^2 + \ldots, \tag{5}$$

ove $h \neq 0$. Sostituita questa nella (4), viene:

$$Q = A + htB + t^2(\ldots) + \ldots \tag{6}$$

La retta congiungente P e Q contiene pure il punto $(Q - P)/t$, ossia, per le (3) e (6), $(h-1)\,B + t\,(\ldots) + \ldots$ Se facciamo tendere t a 0, P tende ad A, mentre quell'ultimo punto tende a B, *se non è* $h = 1$. Dunque: *data fra due rami (uscenti da* A *colla stessa tangente e piano osculatore* [3]*), e però rappresentabili colle* (3) *e* (4)*) una corrispondenza biunivoca analitica* (5)*, la retta che unisce due punti omologhi che tendano ad* A *ha sempre per limite la tangente comune, a meno che sia* h $= 1$.

---

(3) Per la proposizione attuale basterebbe che i rami avessero comune in A la tangente.

3. Similmente si vedrebbe subito che: se fra i punti di 3 rami (uscenti da A colla stessa tangente e piano osculatore) si pongono corrispondenze univoche in tutti i sensi, e analitiche, come la (5), il piano che congiunge 3 punti omologhi che tendano ad A ha per limite il piano osculatore comune, a meno che i coefficienti delle corrispondenze soddisfino a ulteriori relazioni.

Facciamo il caso, che qui importa in special modo, che uno dei tre rami sia semplicemente la retta AB. I suoi punti O si posson rappresentare così:

$$O = A + \nu B, \tag{7}$$

essendo ν un parametro variabile. Prendiamo, insieme a questo, i due precedenti rami (3) e (4), descritti da P e Q. I loro parametri t, u saranno esprimibili in serie di ν:

$$t = \nu + e\nu^2 + \dots, \quad u = \nu + e'\nu^2 + \dots, \tag{8}$$

ove abbiam dato il coefficiente 1 al 1° termine, perchè vogliamo che le congiungenti OP, OQ non abbiano per limite la tangente comune AB (fine del n. 2). Segue, sostituendo:

$$P = A + \nu B + \nu^2 (e\, B + m\, C) + \dots \tag{9}$$

$$Q = A + \nu B + \nu^2 (e'B + m'C) + \dots \tag{10}$$

Il piano di O, P, Q contiene pure i punti $(P - O)/\nu^2$, $(Q - O)/\nu^2$, ossia, per le (7), (9), (10), $eB + mC + \nu(\dots) + \dots$, e analogo. Al limite per $\nu \to 0$, il piano conterrà i punti A, $eB + mC$, $e'B + m'C$. *Affinchè questo piano limite non sia precisamente il piano osculatore* ABC, *dovrà essere:*

$$e'/e = m'/m. \tag{11}$$

4. Fissiamo un fascio di piani (o d'iperpiani), il cui asse sia sghembo colla retta AB:

$$(\alpha x) = \lambda (\beta x), \tag{12}$$

ove (αx) significa $\Sigma \alpha_i x_i$, ecc.; e supponiamo che α sia precisamente quel piano del fascio che passa per A, sicchè $(\alpha a) = 0$. Saranno invece (βa) e (αb) non nulli. Consideriamo nel fascio i piani che contengono i 3 punti O, P, Q; e cerchiamo i corrispondenti valori di λ. Per P, mettendo nella (12), al posto delle x_i, le coordinate di P date da (9), abbiamo:

$$\nu (\alpha b) + \nu^2 [e (\alpha b) + m (\alpha c)] + \dots = \lambda [(\beta a) + \nu (\beta b) + \dots].$$

Di qua si ricava λ in serie di ν. Sarà:

$$(\beta a)\,\lambda = \{\nu\,(\alpha b) + \nu^2\,[e\,(\alpha b) + m\,(\alpha c)] + \ldots\} \cdot \{1 - \nu\,(\beta b)/(\beta a) + \ldots\}$$
$$= (\alpha b)\,\nu + [e\,(\alpha b) + m\,(\alpha c) - (\alpha b)\,(\beta b)/(\beta a)]\nu^2 + \ldots$$

Si può trarne, senz'altro, il valore λ_0 di λ relativo ad O, mettendo $e = 0$, $m = 0$; sicchè:

$$(\beta a)\,\lambda_0 = (\alpha b)\,\nu - \nu^2 \cdot (\alpha b)\,(\beta b)/(\beta a) + \ldots$$

Ne segue, sottraendo:

$$(\beta a)\,(\lambda - \lambda_0) = [e\,(\alpha b) + m\,(\alpha c)]\,\nu^2 + \ldots$$

Analogamente, se λ' è il valore di λ che spetta al piano passante per Q, sarà:

$$(\beta a)\,(\lambda' - \lambda_0) = [e'(\alpha b) + m'(\alpha c)]\,\nu^2 + \ldots$$

e quindi:

$$\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda - \lambda_0} = \frac{e'\,(\alpha b) + m'\,(\alpha c) + \nu\,(\ldots) + \ldots}{e\,(\alpha b) + m\,(\alpha c) + \nu\,(\ldots) + \ldots}\,.$$

Per $\nu \to 0$, tenendo conto di (11), viene [4]:

$$\lim \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda - \lambda_0} = \frac{m'}{m}\,.$$

D'altronde, indicando con σ una costante qualunque non nulla, il rapporto $(\lambda' - \lambda_0)/(\lambda - \lambda_0)$ ha lo stesso limite che il birapporto $(\sigma\lambda_0\,\lambda\lambda')$. Possiamo dunque concludere: *Dati due rami di 1° ordine Γ, Γ' aventi a comune l'origine* A, *la tangente* AB *e il piano osculatore* ABC, *si ponga fra i loro punti e quelli della* AB *una triplice corrispondenza analitica, univoca in ogni senso, che faccia corrispondere* A *a se stesso, e sia tale che il piano di 3 punti omologhi tendenti ad* A *abbia per limite un piano non passante per la tangente* AB [5]. *Se in un qualunque fascio di piani (od iperpiani) ad asse sghembo con questa retta si forma il birapporto di un piano fisso non passante per* A *coi piani proiettanti 3 punti omologhi della tangente, di Γ, e di Γ'; questo birapporto, col tendere di quei punti ad* A, *avrà un limite ben determinato, che non dipende nè dalla triplice corrispondenza, nè dal fascio di piani (o iperpiani) considerato.*

Quando i due rami Γ, Γ' sian rappresentati colle (3), (4), quel limite è risultato $= m'/m$. Quando invece Γ fosse dato, più in ge-

---

(4) Si tenga presente che $(\alpha b) \neq 0$, e che anche (αc) si può supporre non nullo.

(5) Si ottiene, ad esempio, una tale triplice corrispondenza, segando AB, Γ, Γ' coi piani (o iperpiani) di un fascio *generico*.

nerale, dalla (1) sotto le condizioni (2), e Γ' in modo analogo, col porre degli apici a $E, F, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$; poichè (fine del n. 1) $m = \varepsilon/\beta^2$, e quindi similmente $m' = \varepsilon'/\beta'^2$, quel birapporto limite varrà $\beta^2\varepsilon'/\beta'^2\varepsilon$.

5. Si può anche enunciare il risultato più concisamente così: *Se si prendono sulla tangente* AB, *su* Γ *e su* Γ' *3 punti infinitamente vicini ad* A, *sì che il loro piano non sia vicino ad uno contenente la* AB, *è costante* (ed $= m'/m$, ecc.) — *in un fascio di piani (od iperpiani) ad asse sghembo colla* AB — *il birapporto di un piano ben distinto da quello che passa per* A *e dei piani, infinitamente vicini, che vanno ai suddetti 3 punti.*

Ciò corrisponde a prendere pei parametri v, t, u valori infinitesimi (di 1° ordine). — Si noti che la condizione posta pel piano dei 3 punti, avendo come conseguenza che la retta di due di essi è ben distinta dalla tangente AB, conduce a condizioni analoghe alla $h = 1$ con cui finiva il n. 2; e quindi alle relazioni (8) tra i parametri. Da queste deriva che, scelto O, cioè v infinitesima, i punti P, Q (ossia i valori infinitesimi di t, u) sono arbitrarî solo in questo senso: che sono determinati a meno d'infinitesimi di 2° ordine; i corrispondenti valori di λ, λ' hanno già il termine principale (di 1° ordine) ben determinato. Non vi è dunque, nella arbitrarietà di P, Q, un contrasto coll'essere ben determinato quel tal birapporto.

6. Quando Γ, Γ' sian due rami situati *in un piano*, la condizione pei 3 punti O, P, Q di essere in un piano, che al limite non contenga la AB, significa che quei 3 punti sono *allineati* (su una retta che non tende ad AB). Si ricade così in un teorema contenuto nel n. 1 di una mia antica Nota (6), alla quale questa può servire di complemento.

Se invece Γ, Γ' sono in uno spazio S_n, con $n > 2$, e si proiettano su un iperpiano da un centro esterno al piano osculatore, si otterranno ancora due rami aventi comuni origine, tangente e piano osculatore; e per questi rami il *birapporto* sarà quello stesso di Γ, Γ'. Ciò appare subito, pensando che il fascio d'iperpiani con cui si proiettavano i punti di Γ, Γ' e della tangente AB sia scelto coll'asse passante pel suddetto centro di proiezione. Ripetendo la

(6) *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie*, in questi Rendiconti, serie 5ª, vol. VI, 1897, 2° sem., p. 168 [Questo volume, p. 1].

cosa, si vede che, anche per proiezioni (generiche) in spazi subordinati qualunque di S_n, il birapporto non muta.

La proiezione avvenga precisamente sul piano osculatore ABC. Allora si sa (vedi Nota cit.) che il birapporto delle due curve piane proiezioni (calcolato nel modo anzidetto) è uguale al rapporto delle loro curvature. Ma la 1ª curvatura di una linea sghemba, o iperspaziale, Γ in un punto A è determinata da A coi suoi due punti successivi, e quindi coincide con quella di una proiezione qualunque di Γ sul piano osculatore. Adunque *il birapporto di Γ, Γ' in* A *(quale è definito nel n. 4 o 5) coincide col rapporto delle prime curvature di Γ' e Γ in* A.