Corrado Segre

Le curve piane d'ordine n circoscritte a un $(n+1)$-latero completo di tangenti ad una conica e una classe particolare di superficie con doppio sistema coniugato di coni circoscritti

Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **59** (1923-24), p. 145–162

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 192–207

XXXVI.

LE CURVE PIANE D'ORDINE n CIRCOSCRITTE A UN $(n+1)$-LATERO COMPLETO DI TANGENTI AD UNA CONICA, E UNA CLASSE PARTICOLARE DI SUPERFICIE CON DOPPIO SISTEMA CONIUGATO DI CONI CIRCOSCRITTI

«Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino»,
vol. LIX, 1923-24, pp. 145-162.

§ 1. — Il sistema lineare di C_n.

1. In un piano π le curve algebriche d'ordine n, o C_n, che passano per tutti i vertici di un $(n+1)$-latero completo fisso, formano un sistema lineare; la cui dimensione $[n]$ si precisa subito, osservando che quelle curve del sistema, che contengono un punto di un lato, diverso dagli n vertici, si spezzano in quel lato e in un sistema analogo di C_{n-1}. Dunque $[n]=[n-1]+1$; da cui si ricava: $[n]=n$. Le C_n sono perciò ∞^n (ossia formano un sistema regolare).

Se sono $p_1=0, \ldots, p_{n+1}=0$ le equazioni dei lati dell'$(n+1)$-latero, l'equazione

(1) $$\Sigma \frac{\lambda_k}{p_k}=0,$$

ove le λ_k indicano costanti arbitrarie, rappresenta una C_n circoscritta al moltilatero e variabile in un sistema lineare ∞^n: questo sarà dunque il sistema di *tutte* le nostre C_n (1).

Nel seguito s'intenderà sempre che il *moltilatero fondamentale* sia circoscritto ad una conica (irriducibile) γ. Dirò Σ il sistema ∞^n di C_n relativo a questo caso.

---

(1) Cfr. ad esempio G. Darboux, *Principes de Géométrie analytique,* Paris, 1917, p. 246.

TEOREMA. — *Se un* $(n+1)$-*latero completo ha i suoi lati tangenti a una conica* γ, *le* C_n *circoscritte ad esso, che passano per un punto* M *non situato su alcun lato, segano, fuori di* M, *sulle due tangenti* r, s *di* γ *passanti per* M, *gruppi di* $n-1$ *punti, che si corrispondono nella projettività* $\mathcal{P}$ *segnata su* r, s *dalle tangenti di* γ.

In altre parole: *Ogni coppia* P, Q *di punti d'intersezione di* r, s *con un'ulteriore tangente generica di* γ *è tale che le* C_n *di* Σ *passanti per* M *e per* P *passano pure per* Q, *ossia che la terna di punti* MPQ *offre solo due condizioni alle* C_n *di* Σ *costrette a contenerla; sicchè le* C_n *stesse sono* ∞^{n-2}.

Per $n=2$ questo teorema è ben noto: dice che due trilateri circoscritti a γ sono iscritti in una C_2.

Per estenderlo ad n qualunque, ammetteremo vero il fatto analogo, quando n si sostituisca con $n-1$. Dunque, se togliamo un lato a dell'$(n+1)$-latero fondamentale, e consideriamo le ∞^{n-1} C_{n-1} circoscritte all'n-latero residuo, fra esse ve ne saranno ∞^{n-3} passanti per M, P, Q. Aggiungendo a, abbiamo ∞^{n-3} C_n di Σ contenenti quei 3 punti. D'altronde, dicendo b, c altri due lati (diversi da a) dell'$(n+1)$-latero, vi è pure una C_n di Σ passante per M, P, Q, che si compone della conica circoscritta al trilatero abc ed al triangolo MPQ, e degli $n-2$ lati diversi da a, b, c. Quest'ultima C_n evidentemente non sta nel sistema lineare ∞^{n-3} precedente; e quindi determina con esso un sistema lineare ∞^{n-2} di C_n di Σ passanti per M, P, Q. Il teorema è dunque provato.

2. Ne derivano numerose conseguenze.

Anzitutto, si fissi, oltre all'$(n+1)$-latero fondamentale di Σ, un $(m+1)$-latero completo circoscritto a γ, con $m \leq n$. *Per le* C_n *di* Σ *il passare per tutti i suoi vertici rappresenterà solo* m *condizioni:* cosicchè, ad esempio, le curve di Σ che passano per gli m vertici situati su uno stesso lato conterranno di conseguenza tutti gli altri vertici. In fatti, diciamo r quel lato, s e t altri due qualunque. Le dette curve, passando per ipotesi pei punti $rs=M$, $rt=P$, conterranno pure (n. 1) $Q=st$.

Si può anche dire così: *Se una* C_n *è circoscritta ad un* $(n+1)$-*latero completo composto di tangenti ad una conica* γ, *essa è circoscritta a* ∞^1 *altri tali* $(n+1)$-*lateri (e di conseguenza a* ∞^1 $(m+1)$-*lateri, con* $m \leq n$, che son *contenuti* in quelli). Basta fissare una tangente qualunque di γ come lato di un tale moltilatero, e dai suoi punti d'incontro colla C_n tirare le ulteriori tangenti a γ: si avranno così gli $n+1$ lati di un $(n+1)$-latero completo, a cui, per l'osservazione precedente, la C_n dovrà essere circoscritta.

Per $n=4$ si ha un ben noto teorema di J. LÜROTH (²). Per n qualunque la proposizione è dovuta a G. DARBOUX (³), che la trae dalla rappresentazione analitica (1) di Σ, tenendo conto che le $p_k=0$ son tangenti di una conica (⁴).

3. Ritorniamo al teorema del n. 1; e applichiamo il fatto che, se sono R, S i punti di contatto di r, s con γ, la projettività $\mathcal{P}$ fra queste rette fa corrispondere al loro punto comune M rispettivamente S e R. In base a quel teorema si avrà che per le C_n di Σ passanti per M, il contenere, ad esempio, R è condizione equivalente al toccare s in M, o meglio ad avere in M incontro bipunto con s. Più in generale: *l'avere una* $\mathrm{C_n}$ *di* Σ *passante per* M *un incontro* m*-punto con* r *in* R (⁵) *ha per conseguenza un incontro* (m + 1)*-punto con* s *in* M; *e viceversa.*

COROLLARI. — 1⁰) Per una C_n di Σ la condizione di avere un punto doppio dato M (fuori di γ) equivale alle 3 condizioni: di passare per M e pei punti di contatto di γ colle due tangenti tirate ad essa da M.

2⁰) Le C_n di Σ che passano per un punto R fissato su γ (fuori dei lati del moltilatero fondamentale) tagliano ulteriormente la tangente r in R a γ secondo punti, in ognuno (M) dei quali hanno per tangente la seconda tangente tirata dal punto stesso (M) a γ: cosicchè quelle fra esse che passano (oltre che per R) per uno stesso ulteriore punto di r, si toccano quivi.

3⁰) Una C_n di Σ tangente a γ in un suo punto R (o avente un punto doppio in R) sega ulteriormente la tangente r in R a γ in punti che son tutti *flessi* per la C_n (o almeno punti ad incontro tripunto con una retta). Le tangenti stazionarie in questi punti sono pure tangenti di γ (⁶).

(²) *Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Curven vierter Ordnung*, Math. Ann., I, 1869, p. 37: vedi a p. 49.

(³) *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* [Mém. de Bordeaux] (Paris, 1873), p. 189. V. anche loc. cit. in (¹) p. 248.

(⁴) Citerò pure la Nota di N. WEILL, *Sur les points de base d'un faisceau linéaire de courbes algébriques*, Bull. Soc. math. de France, 29, 1901, p. 26; che ritrova questo teorema, anche sotto la sua prima forma.

(⁵) Vedremo poi (n. 5) che se $m>2$ ciò porta ad essere R multiplo per la C_n.

(⁶) Si abbia, ad esempio, una cubica; e si fissi un quadrilatero completo iscritto in essa. Nella schiera delle coniche iscritte nel quadrilatero si trova facil-

4°) Similmente se la C_n ha nel punto R di γ incontro 3-punto colla tangente r di γ, le sue ulteriori intersezioni con r sono per la curva, in generale, punti d'ondulazione. Ecc., ecc.

§ 2. — Alcune particolarità del sistema Σ nei punti della conica.

4. Riguardo al modo di comportarsi delle curve di Σ nei punti di γ rileviamo anzitutto questo fatto notevole: *Se una* C_n *di* Σ *passa per un punto* P *di* γ *(che non sia il punto di contatto di un lato del moltilatero fondamentale), essa avrà ivi con* γ *quella stessa moltiplicità d'intersezione che ha colla tangente in* P *a* γ.

Per dimostrarlo, assumiamo P come punto di coordinate omogenee $x_2 = x_3 = 0$; e γ sia rappresentata parametricamente dalle

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2t, \qquad x_3 = t^2, \tag{2}$$

sicchè P risponderà a $t = 0$. I lati dell'$(n+1)$-latero fondamentale $p_k = 0$ (n. 1) si potran rappresentare così (7):

$$p_k \equiv x_1 - a_k x_2 + a_k^2 x_3. \tag{3}$$

Le intersezioni di una C_n di Σ colla conica γ si avranno sostituendo le (2) nell'equazione (1) del n. 1: con che, tenuto conto delle (3), diventa:

$$\Sigma \frac{\lambda_k}{(1 - a_k t)^2} = 0. \tag{4}$$

D'altra parte, se pei punti della tangente a γ in P, cioè di $x_3 = 0$, introduciamo il parametro $\tau = x_2/x_1$, sicchè P risponderà a $\tau = 0$, le intersezioni di quella retta colla C_n (1) risponderanno ai valori di τ per cui

$$\Sigma \frac{\lambda_k}{1 - a_k \tau} = 0. \tag{5}$$

Dobbiamo dunque provare che, quando si sian ridotte le equazioni (4) e (5) a forma intera, la più bassa potenza a cui vi compare, rispettivamente, t o τ, è la stessa. Ma poichè il prodotto dei denominatori, nell'una e nell'altra, non contiene certo il divisore t,

---

mente che sono 9 quelle (irriducibili) tangenti alla C_3. Orbene i 9 punti di contatto hanno per tangenziali sulla cubica, rispettivamente, i suoi 9 flessi (e le tangenti di flesso sono pur tangenti, rispettivamente, alle 9 coniche).

(7) Con ciò si esclude solo che uno di essi possa essere la tangente in P a γ, cioè la $x_3 = 0$.

o τ, farà lo stesso dimostrare che, tenendo le due equazioni nella forma attuale, e sviluppati i primi membri in serie di potenze di t, o τ, col supporre queste quantità convenientemente piccole in valor assoluto, le due serie cominciano con termini dello stesso grado. La (4) diventa:

$$\Sigma\lambda_k(1+2a_kt+3a_k^2t^2+4a_k^3t^3+\ldots)=0\,,$$

e la (5):

$$\Sigma\lambda_k(1+a_k\tau+a_k^2\tau^2+a_k^3\tau^3+\ldots)=0\,.$$

Per l'una come per l'altra l'esponente del primo termine non nullo è m, se, posto

(6) $$s_l=\sum_k\lambda_k a_k^l\,,$$

son nulle $s_0\,, s_1\,, \ldots, s_{m-1}$, ma non s_m.

5. Ma possiamo far di più: *precisare la natura della singolarità che una curva di Σ ha in un suo punto (diverso dai punti di contatto di γ coi lati del moltilatero fondamentale) ove abbia contatto* m*-punto con γ, e quindi* (n. 4) *colla tangente a γ.*

Prendiamo ancora in $x_2=x_3=0$ un tal punto P. Poniamo

(7) $$x_1=1\,,\qquad x_2=x\,,\qquad x_3=-y\,;$$

sicchè, in base alle (2), γ avrà per equazione

(8) $$y=-\frac{1}{4}x^2\,;$$

e per le (3) l'equazione delle C_n di Σ diventerà

(9) $$\Sigma\frac{\lambda_k}{1-a_kx-a_k^2y}=0\,.$$

Sviluppando quest'equazione in serie, ammettendo che $|x|$, $|y|$ sian sufficientemente piccole, viene, colla notazione (6):

$$\begin{aligned}&s_0+(s_1x+s_2y)+(s_2x^2+2s_3xy+s_4y^2)+\\&+(s_3x^3+3s_4x^2y+3s_5xy^2+s_6y^3)+\\&+(s_4x^4+4s_5x^3y+6s_6x^2y^2+4s_7xy^3+s_8y^4)+\ldots=0\,,\end{aligned}$$

ossia, ordinando secondo le s_l:

(10) $$s_0+s_1x+s_2(y+x^2)+s_3(2xy+x^3)+s_4(y^2+3x^2y+x^4)+\ldots+$$
$$+s_{2h-1}\left[\binom{h}{1}xy^{h-1}+\binom{h+1}{3}x^3y^{h-2}+\binom{h+2}{5}x^5y^{h-3}+\binom{h+3}{7}x^7y^{h-4}+\ldots+x^{2h-1}\right]+$$

$$+s_{2h}\left[y^h+\binom{h+1}{2}x^2y^{h-1}+\binom{h+2}{4}x^4y^{h-2}+\binom{h+3}{6}x^6y^{h-3}+\ldots+x^{2h}\right]+$$

$$+s_{2h+1}\left[\binom{h+1}{1}xy^h+\ldots\right]+\ldots=0. \text{ [8]}$$

In conseguenza, *se il contatto in* P *della* C_n *con* γ *è* m-*punto, con* m *pari* $=2h$, e quindi (fine del n. 4) è s_{2h} la prima fra le s che non è nulla, si vede che *la* C_n *avrà in* P *un punto* h-*plo, con tutte le tangenti coincidenti (nella* $y=0$, *tangente di* γ*)*. Ponendo nella (10) $y=\varrho x^2$, otteniamo un'equazione in x, il cui termine più basso, nell'ipotesi fatta, è in x^{2h} ed ha per coefficiente s_{2h} moltiplicato pel 1^0 membro di

$$(11)\quad \varrho^h+\binom{h+1}{2}\varrho^{h-1}+\binom{h+2}{4}\varrho^{h-2}+\binom{h+3}{6}\varrho^{h-3}+\ldots+1=0.$$

Sicchè, in corrispondenza alle h radici ϱ di questa equazione, si hanno altrettante curve $y=\varrho x^2$ osculatrici alla C_n [9]. Ne segue che *la* C_n *ha precisamente* h *rami distinti (di 1° ordine e 1ª classe) uscenti da* P, *con elementi differenziali di 2° ordine (curvature) dipendenti solo da* γ *e da* P. (Saranno rami rappresentabili con serie di potenze di x che cominciano così: $y=\varrho x^2+\ldots$, in corrispondenza ai valori indicati di ϱ).

Se invece il contatto della C_n *con* γ *in* P *è* m-*punto, con* m *impari* $=2h-1$, ossia è s_{2h-1} la prima s non nulla, l'equazione (10) mostra che *la* C_n *avrà in* P *un punto* h-*plo, con* $h-1$ *tangenti coincidenti nella tangente di* γ $(y=0)$ *e la rimanente* $(hs_{2h-1}x+s_{2h}y=0)$ *distinta da quella.* E, come nel caso precedente, si riconosce che *la* C_n, *oltre al ramo lineare tangente all'ultima retta, ha* $h-1$ *rami lineari (e di 1ª classe) osculati, rispettivamente, dalle curve* $y=\varrho x^2$, *ove per* ϱ *si mettan le diverse radici dell'equazione:*

$$(12)\quad \binom{h}{1}\varrho^{h-1}+\binom{h+1}{3}\varrho^{h-2}+\binom{h+2}{5}\varrho^{h-3}+\binom{h+3}{7}\varrho^{h-4}+\ldots+1=0.$$

---

[8] Anche ora, per dare a quest'equazione l'ordinaria forma intera e finita, si dovrebbe moltiplicarla pel prodotto dei denominatori della (9). Ma di nuovo accade che, per la natura di questo moltiplicatore $(1+\ldots)$, ciò non avrebbe conseguenze sulle deduzioni che trarremo dalla (10).

[9] Sarebbe però da dimostrare che le radici della (11), come poi anche quelle della (12), son tutte distinte.

Da notare che, *se* h *è pari*, fra queste radici vi è sempre $\varrho = -1/2$ ([10]).

Riunendo i due risultati relativi ad m pari, od impari, tragghiamo: *Se una* C_n *di* Σ *ha in un punto di* γ *(diverso dai punti di contatto di* γ *coi lati del moltilatero fondamentale) precisamente la moltiplicità* h, *essa avrà* h *rami lineari passanti per quel punto, dei quali almeno* h $-$ 1 *saran tangenti ivi a* γ.

6. A meglio illustrare ciò che abbiamo ottenuto intorno ad elementi differenziali di 2^0 ordine delle C_n in punti di γ, conviene ricordare ed applicare il seguente teorema ([11]):

« Si abbiano nel piano due rami lineari C, C' di curve che tocchino nella comune origine P la retta p. Su una trasversale vicinissima a P, ma non passante per P, nè prossima a p, si prenda il birapporto dei tre punti, infinitamente vicini, d'intersezione della trasversale con C, C', p, e di un 4^0 punto arbitrario, ma a distanza finita da questi ([12]). Si otterrà un numero indipendente dalla trasversale considerata, come da quel 4^0 punto: dunque un *invariante projettivo*, relativo ai due rami tangenti C, C'. Se P è un punto proprio, quest'invariante non è altro che *il rapporto delle curvature di* C, C$'$ *in* P. Si può chiamarlo *birapporto della coppia d'elementi infinitesimi di* 2^o *ordine, fra loro tangenti.* — Ove P si assuma come origine delle coordinate x, y; e p come retta $y = 0$; sicchè i rami C, C' saran rappresentabili con serie $y = ax^2 + \ldots$, $y = a'x^2 + \ldots$; il birapporto in questione varrà a/a' ».

Applicando questa proposizione, col prendere: per C un ramo della C_n del n. 5, uscente da P e tangente a γ, ramo che è risultato essere $y = \varrho x^2 + \ldots$, con ϱ radice della (11) o della (12); e per C' la conica γ, rappresentata dalla (8); sarà $a = \varrho$, $a' = -1/4$; e quindi $a/a' = -4\varrho$. Dunque: *Moltiplicando per* -4 *ciascuna radice*

([10]) In fatti, sostituendo questo valore nella (12), e moltiplicando per 2^{h-1}, si ha un'eguaglianza che rientra nella 1ª delle due formole (34) a p. 253 del *Lehrbuch der Combinatorik* di E. Netto (Leipzig, 1901): basta porre in quella formola $p = 1$ e $2m = h - 2$.

([11]) V. la mia Nota *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie,* Rend. Acc. Lincei, (5) 6, 1897_2, p. 168; ove si troveranno anche altre citazioni [V. questo volume, p. 1].

([12]) Naturalmente, si può invece parlare di *limite* di quel birapporto, facendo *variare* con continuità la trasversale, tendendo ad una retta tirata per P, distinta da p.

ϱ *della* (11), *o della* (12), *si ottiene il birapporto di ciascun elemento di* 2° *ordine della* C_n *di* Σ, *tangente a* γ, *preso col corrispondente elemento di* 2° *ordine di* γ: ossia, se si preferisce, *il rapporto delle curvature* di questi elementi nel punto comune.

Rileviamo i primi casi, che vengono dal n. 5 pei primi valori di m ed h.

a) Se $m = 2$ e $h = 1$, la (11) dà $\varrho = -1$. Dunque: le C_n di Σ tangenti a γ in un punto, semplice per esse, hanno ivi curvatura *quadrupla* di quella di γ (13).

b) Se un punto P di γ è doppio per una C_n di Σ (ossia se la C_n ha in P incontro tripunto con γ), e uno solo dei 2 rami di questa passanti per P è tangente a γ, sarà $m = 3$, $h = 2$; la (12) darà $\varrho = -1/2$. Quel ramo della C_n avrà in P curvatura *doppia* di quella di γ.

c) Le C_n di Σ che hanno contatto 4-punto con γ in P hanno ivi un *tacnodo*, con 2 rami le cui curvature sono ben determinate in rapporto a quella di γ in P. Ecc. ecc.

7. Le proposizioni del n. 5 vanno anche confrontate con quelle del n. 2. Lì si era visto che le C_n di Σ passanti per m ($\leq n$) punti qualunque di una generica tangente p a γ passan di conseguenza per $m(m+1)/2$ punti determinati (inclusi quegli m): vertici di un $(m+1)$-latero completo circoscritto a γ. Orbene, si faccian tendere gli m punti al punto di contatto P di p. Si tratterà allora delle C_n che hanno in P incontro m-punto con p, ossia (n. 4) con γ: dunque appunto delle curve del n. 5. La natura che abbiam riconosciuto nella singolarità che queste C_n vengon ad avere in P dà subito la moltiplicità d'intersezione di due di esse in quel punto. Basta sommare quelle dei loro rami rispettivi, tenendo conto che per $m = 2h$ ogni ramo di una curva ha contatto *tripunto* con un determinato ramo dell'altra, e *bipunto* cogli altri rami; e analogamente per $m = 2h - 1$. Se $m = 2h$ quella moltiplicità d'intersezione risulta $h(2h+1)$; se $m = 2h - 1$ viene invece $h + (h-1)2h = h(2h-1)$. Ambi i numeri coincidono con $m(m+1)/2$: numero dei vertici del suddetto $(m+1)$-latero, che ora si è, per così dire, *schiacciato*.

---

(13) Non è dunque possibile (e ciò seguiva anche, del resto, dal teorema del n. 4) un'ordinaria osculazione, in un punto semplice, fra γ e una curva di Σ.

8. Ed ora una breve digressione.

Anzitutto, stiamo al caso a) della fine del n. 6, che — in conformità di quanto s'è detto dianzi — si può derivare come limite, dalla considerazione delle C_n di Σ circoscritte ad un trilatero di tangenti di γ, ove queste tangenti si avvicinino indefinitamente. Quando si fissa una curva piana qualunque γ (che non occorre più sia una conica, ma che per semplicità si supporrà *analitica*) con un suo punto ordinario P, e ad un'altra curva δ s'impone di esser circoscritta al trilatero che ha per lati la tangente a γ in P e due tangenti di γ che s'avvicinino indefinitamente a quella; si trova con facile calcolo che, al limite, δ risulta tangente a γ in P, con un elemento differenziale di 2^0 ordine ben determinato. Precisamente, se P è $x = y = 0$, e γ si può rappresentare nell'intorno di P con una serie $y = ax^2 + \ldots$, si trova che δ è rappresentabile con $y = 4ax^2 + \ldots$. Ossia, per le osservazioni generali del n. 6, δ ha in P curvatura *quadrupla* di quella di γ. Se adesso per γ si prende la nostra conica, ciò concorda col citato a) del n. 6.

Quella proposizione generale, relativa alle γ e δ, si trova già, in sostanza, in una Nota di CL. SERVAIS ([14]). Conviene tener presente che, essendo il contatto tripunto ordinario di due curve piane un fatto che si trasforma per correlazioni in se stesso, curve aventi a comune 3 tangenti infinitamente vicine sono anche curve a contatto tripunto ([15]). E allora si può anche ragionare così. L'ipotesi sulle due curve γ e δ ci dà un triangolo a lati infinitamente vicini, a cui è circoscritto il cerchio osculatore a δ, mentre — per l'osservazione precedente — gli è iscritto (in senso projettivo, senza distinzione fra « iscritto » ed « ex-iscritto ») il cerchio osculatore a γ. Detti R e r rispettivamente i raggi di questi due cerchi, e d la distanza dei loro centri, in generale si ha ([16]), appunto perchè l'uno è circoscritto e l'altro iscritto o ex-iscritto allo stesso triangolo, $d^2 = R(R \pm 2r)$. Ma nel caso attuale i due cerchi vengono a toccarsi, e quindi $d^2 = (R \pm r)^2$. Dal confronto delle due eguaglianze, e dal fatto che r non è nullo, segue $r = 4R$.

Un'altra proposizione generale, di natura analoga a quella di sopra relativa a γ e δ, trova pure luogo qui. Essendo ancora fissata

---

([14]) *Sur un certain cercle analogue au cercle de courbure,* Mathesis, 9, 1889, p. 105.

([15]) Cfr. un'altra Nota di CL. SERVAIS, *Sur le cercle osculateur,* a p. 136 dello stesso volume.

([16]) Formole di W. CHAPPLE (1746) e K. W. FEUERBACH (1822).

una curva analitica γ e un suo punto ordinario P, si supponga che un'altra curva η passi per un punto generico M che s'avvicina indefinitamente (in modo regolare) a P, e passi anche per quei 2 punti di γ, tendenti a P, nei quali γ ha per tangenti delle rette uscenti da M. Di nuovo un calcolo che non presenta difficoltà mostra che, se in prossimità di P γ è $y = ax^2 + \dots$, al limite η sarà rappresentabile con $y = 2ax^2 + \dots$. Perciò η, non solo risulta tangente a γ in P, ma anche viene ad avere ivi un ben determinato elemento di 2° ordine, e cioè (n. 6) curvatura *doppia* di quella che ha ivi γ (17). Se poi la curva variabile ha in M, e quindi al limite in P, un punto doppio, si trova che il fatto enunciato vale ancora, ove con η s'intenda un ramo di quella curva, uscente da M e passante pei 2 punti di γ sopra nominati, che tendono a P. Ancora quel ramo, al limite, avrà in P la curvatura *doppia* di quella di γ.

Ora si applichi ciò, prendendo per γ la nostra conica e per curva variabile una C_n di Σ. Sappiamo (n. 3) che, se questa ha un punto doppio M, essa passa pei 2 punti di contatto di γ colle tangenti tirate da M. Facciamo andare M nel punto P di γ. Otterremo per la C_n la proprietà che è nel n. 6 *b*).

§ 3. — Le superficie rappresentate da sistemi lineari contenuti in Σ.

9. Consideriamo una superficie F, dello spazio ordinario o di uno spazio superiore, rappresentata sul piano π mediante un sistema lineare Λ di C_n circoscritte ad un $(n+1)$-latero completo di tangenti ad una conica γ. Se Λ coincide col sistema Σ, ∞^n, di *tutte* quelle C_n, F sarà d'ordine $n(n-1)/2$, ed apparterrà (n. 1) ad S_n. Se no, potrà abbassarsi l'ordine di F, come si abbasserà la dimensione dello spazio d'appartenenza.

In ogni caso, alla conica γ risponde su F una curva Γ, *inviluppo* di un sistema ∞^1 di curve razionali L, d'ordine n, di F, corrispondenti alle tangenti di γ. Questo sistema di curve è tale che per ogni punto di F ne passan due, e che due qualunque s'incontrano in un sol punto. Così due L son sempre punteggiate biunivocamente

(17) Se γ si sostituisce col suo cerchio osculatore, η avrà per cerchio osculatore il limite di un cerchio passante per M e pei due punti di contatto del 1° cerchio colle tangenti uscenti da M. È evidente che il raggio di quel cerchio limite risulta metà di quello del 1°.

dalle altre. Ma il teorema del n. 1 mette in evidenza un fatto molto notevole relativo a questa corrispondenza tra due L. Esso dice, nella 2ª forma che gli abbiam dato, che la terna dei punti d'incontro a due a due di 3 tangenti di γ offre solo due condizioni alle C_n di Λ costrette a contenerli. E ciò, riportato ad F, dà che i 3 punti omologhi a quelli su F sono allineati. Dunque: *Tre linee* L *si tagliano a due a due in tre punti allineati* (18). Ossia: *Due* L *qualunque son punteggiate dalle altre per modo che le rette congiungenti le coppie di punti omologhi passano tutte pel punto comune alle prime due.*

Ne deriva una semplice costruzione per la F, quando si abbiano due delle L. Siano queste D, D', e diciamo O la loro intersezione. Per un punto P variabile su F passano due L, che dirò H e K, le quali incontrino D, D' rispettivamente nei punti h, h' e k, k': saranno quelli e questi allineati con O. D'altra parte saranno pure in linea retta P, h, k, come intersezioni di D, K, H; e P, h', k', come intersezioni di D', K, H. Chiamando dunque omologhi su D, D' i punti allineati con O, e quindi omologhe le corde di D, D' congiungenti coppie omologhe di punti (come le rette hk, $h'k'$), *i punti* P *di* F *si possono ottenere come intersezioni delle corde omologhe di* D, D'.

Si riconosce così che F è una di quelle particolari *superficie di* K. PETERSON (e di A. VOSS), di cui è data appunto questa costruzione nel n. 8 della mia Nota *Sulla generazione delle superficie che ammettono un doppio sistema coniugato di coni circoscritti* (19). Che F appartenga alla classe di superficie da cui s'intitola quella Nota, si scorge subito, considerando con una L la sua infinitamente vicina. La proposizione dedotta poc'anzi dal n. 1 si riduce allora a questa: fissata una L, le tangenti nei suoi vari punti alle altre L passanti per essi formano un cono (col vertice nel punto di contatto della L fissa coll'inviluppo Γ). Ciò mostra che le tangenti in un punto di F alle due L che vi passano sono *tangenti coniugate* di F; le L formano un reticolo coniugato; e i piani tangenti a F nei punti di una L formano un cono (col vertice in quel punto della L e di Γ). Si ha così per F un doppio sistema coniugato di coni circoscritti.

---

(18) Ne segue, se si è in un iperspazio: *le corde delle* ∞^1 *curve* L *sono trisecanti per* F.

(19) Atti Acc. Torino, 43, 1907-08, p. 553 [V. questo volume, p. 50].

Risulta pure, dalla coincidenza delle due L per un punto di Γ, e quindi delle due tangenti coniugate di F, che la linea Γ, inviluppo delle L, è un'*asintotica* di F ([20]).

10. Una conveniente rappresentazione analitica metterà nuovamente in evidenza la suddetta qualità delle nostre superficie F. Basterà scegliere in π delle opportune coordinate curvilinee.

Assumiamo come coordinate (ordinarie) della tangente variabile alla conica γ queste: $1, t, t^2$. Per un punto $(x_1\, x_2\, x_3)$ di π passan 2 tangenti, a cui rispondon 2 valori per t, e siano u, v. *Questi valori* assumiamo come coordinate curvilinee del punto ([21]). Sarà:

$$x_1 + ux_2 + u^2\, x_3 = 0$$

$$x_1 + vx_2 + v^2\, x_3 = 0$$

e quindi:

$$x_1 : x_2 : x_3 = uv : -(u+v) : 1\,.$$

Così l'equazione di una retta ξ nelle nuove coordinate di punto diventa un'equazione bilineare simmetrica fra u, v (in corrispondenza all'involuzione fra tangenti di γ, che ha ξ per *asse*). In particolare, se ξ è la tangente a γ che risponde al valore a del parametro t, viene

$$\Sigma \xi_i\, x_i = uv - a\,(u+v) + a^2 = (u-a)\,(v-a)\,,$$

com'era prevedibile.

Ciò premesso, ricordiamo (n. 1) che il sistema lineare Σ di C_n era dato dalla (1), ove le forme p_k rappresentavano le $n+1$ tangenti di γ, lati del moltilatero fondamentale. Se non si pongono altre condizioni alle C_n, ossia se Λ coincide con Σ, la superficie F, di S_n, sarà dunque rappresentata da $\sigma y_k = 1/p_k$. Ma, per quel che s'è detto, indicando con $a_0\, a_1 \ldots a_n$ i parametri di quelle $n+1$ tangenti ([22]), si ha: $p_k = (u-a_k)\,(v-a_k)$, onde

$$\frac{1}{p_k} = \frac{1}{(u-a_k)\,(v-a_k)} = \frac{1}{v-u}\left(\frac{1}{u-a_k} - \frac{1}{v-a_k}\right). \tag{13}$$

([20]) Per $n=3$, ossia quando il sistema Σ di π si compone delle C_3 circoscritte a un quadrilatero completo, la superficie del 3° ordine che esso rappresenta ha appunto, com'è noto, per asintotiche le linee rappresentate su π dalle coniche iscritte nel quadrilatero.

([21]) V. Darboux, loc. cit. in ([3]) p. 183 e seg[i]; o in ([1]) p. 237 e seg[i].

([22]) La notazione è indipendente (e alquanto diversa) da quella del n. 4.

Si posson dunque assumere come formole per la rappresentazione di F su π:

$$y_k = \frac{1}{u - a_k} - \frac{1}{v - a_k}, \tag{14}$$

che rientrano appunto nel tipo $y_k = f_k(u) - f_k(v)$ del n. 8 della Nota citata in ([19]).

Se invece il sistema lineare Λ è determinato da alcune curve particolari di Σ, sì che F risulti rappresentata dalle formole

$$\sigma y_l = \sum_k \frac{\alpha_{lk}}{p_k},$$

le α essendo costanti; ancora la (13) ci consentirà di ridurre quelle somme che compaiono nel 2^0 membro alla forma $f_l(u) - f_l(v)$.

11. Altre proprietà della superficie F seguono ancora, subito, dalla rappresentazione piana.

Ad esempio, poichè le C_n di Σ con dato punto doppio passan di conseguenza (n. 3, corollario 1^0) per due determinati punti di γ, si avrà che tutti i piani tangenti di F (supposta iperspaziale) si appoggiano in due punti alla curva Γ.

Così, ai lati dell'$(n+1)$-latero fondamentale di π rispondono $n+1$ punti $(n-1)$-pli di F, congiunti a due a due da rette della superficie, corrispondenti ai vertici di quel moltilatero. Tutte le L passano per quei punti $(n-1)$-pli di F.

Gli $(m+1)$-lateri completi $(m \leq n)$ circoscritti a γ, di cui al n. 2, dànno che: $m+1$ curve L di F si tagliano a due a due in $m(m+1)/2$ punti, i quali presentano solo m condizioni alle sezioni iperpiane di F costrette a contenerli; vale a dire quei punti stanno in un S_{m-1} (o spazio minore). Come al n. 9 avevamo *rette trisecanti*, così vengono per F dei *piani* 6-*secanti*, S_3 10-*secanti*, ecc.

Facendo coincidere le $m+1$ curve L, abbiamo dal n. 7 che in un punto di Γ lo S_{m-1} *osculatore* a questa (cioè ad incontro m-punto) ha in generale con F $m(m+1)/2$ intersezioni coincidenti. In particolare le rette tangenti di Γ sono a contatto tripunto con F: a conferma dell'essere Γ un'asintotica. D'altronde dal n. 5 (per $m = 3$, $h = 2$) segue che il piano osculatore a Γ in un suo punto generico è ivi tangente a F. Invece gl'iperpiani a contatto 4-punto con Γ segano F in curve aventi in generale un tacnodo (n. 6, c). Ecc. ecc.

12. Ma, riguardo alla asintotica Γ, si può dal n. 5 trarre qualcosa di più significativo.

Premettiamo che, estendendo un concetto che fu ricordato al principio del n. 6, si ha questo teorema più generale [23]:

« Dati in uno spazio qualunque due rami lineari Γ, Γ' di curve analitiche, aventi in comune l'origine (O), la tangente e il piano osculatore, si fissi un fascio d'iperpiani il cui asse sia sghembo colla tangente; e in esso si considerino 4 elementi, cioè uno generico, e poi gl'iperpiani che projettano 3 punti infinitamente vicini a O presi rispettivamente sulla tangente, su Γ e su Γ', in modo che il loro piano non sia infinitamente prossimo ad uno passante per la tangente. Il birapporto di quei 4 iperpiani dipenderà solo dai due rami dati; e se s'introduce una metrica euclidea, sì che O risulti al finito, quel birapporto sarà uguale al rapporto delle prime curvature di Γ' e Γ in O ».

« Quando Γ e Γ' hanno le coordinate omogenee projettive dei loro punti rappresentabili in serie di potenze così: $\alpha_k + \beta_k t + m\gamma_k t^2 + \ldots$, $\alpha_k + \beta_k t + m'\gamma_k t^2 + \ldots$, il birapporto, o rapporto di curvature, vale m'/m ».

La superficie F sia quella, di S_n (n. 9), che è data dal sistema completo Σ; e quindi, in base alla (9) del n. 5, si può rappresentare colle

$$y_k = \frac{1}{1 - a_k x - a_k^2 y}\,. \tag{15}$$

Come punto O prendiamo il punto (unità) di F corrispondente a $P(x = y = 0)$ di π; e come ramo Γ precisamente la curva (asintotica) di F, che già indicavamo appunto con Γ. Essa passa per O, ed avendo per imagine su π la (8), sarà data, in serie del parametro x, in prossimità di O, da:

$$y_k = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} a_k x\right)^2} = 1 + a_k x + \frac{3}{4} a_k^2 x^2 + \ldots. \tag{16}$$

Prendiamo poi la sezione di F con un iperpiano tangente ad F in O: e precisamente un iperpiano che abbia ivi con Γ incontro m-punto, e quindi (n. 5) seghi F in una curva con punto h-plo, ove $m = 2h$, oppure $m = 2h - 1$. Se $m = 2h$ questa sezione iperpiana avrà h rami lineari uscenti da O, tutti tangenti a Γ; se $m = 2h - 1$, ne avrà solo $h - 1$ così fatti. Dicendo Γ' uno dei rami tangenti a

---

[23] V. una Nota, *Sugli elementi curvilinei che han comune la tangente e il piano osculatore,* che uscirà nei Rend. Acc. Lincei, (5) 33, 1924_1 [V. questo volume, p. 186].

Γ, la sua imagine su π è rappresentata in serie di x da: $y = \varrho x^2 + \ldots$, ove ϱ è radice dell'equazione (11), o (12), a seconda dei due casi. Avrà dunque Γ', sostituendo nella (15), per coordinate dei suoi punti:

$$(17) \qquad y_k = \frac{1}{1 - a_k x - a_k^2 \varrho x^2 - \ldots} = 1 + a_k x + (\varrho + 1)\, a_k^2 x^2 + \ldots .$$

Confrontando fra loro questi sviluppi (16), (17), che coincidono nei primi due termini, in conformità della fine del teorema dianzi citato, vediamo che il rapporto m'/m, ivi nominato, vale qui $4(\varrho + 1)/3$. Sarà dunque questo — ove si pongan per ϱ le diverse radici delle (11), (12) — il birapporto, o, se si preferisce, il rapporto delle curvature, di ognuno dei rami considerati di sezioni iperpiane di F rispetto al ramo dell'asintotica Γ.

Se, ad esempio, prendiamo $\varrho = -1/2$, quel rapporto diventa $2/3$. Esso ha luogo, in particolare, per $m = 3$, $h = 2$, cioè quando la superficie vien segata con un iperpiano che le sia semplicemente tangente nel punto O dell'asintotica Γ, e si confronta con Γ quel ramo della sezione che riesce appunto tangente a Γ. Quel valore $2/3$ risulta concorde con un noto teorema di E. BELTRAMI relativo alla 1ª curvatura delle asintotiche per superficie di S_3 (24).

In generale le proposizioni che ora qui si sono accennate per F *e* Γ *posson guidare ad estensioni iperspaziali di quel teorema di* BELTRAMI.

13. Diciamo infine una parola intorno a *casi particolari interessanti delle nostre superficie.*

Quando il sistema rappresentativo Λ di C_n ammette punti base in più di quelli che son nei vertici dell'$(n+1)$-latero fondamentale, si presentano delle notevoli *linee multiple* per F.

Sia M un tal punto base, e siano r, s le due tangenti a γ passanti per esso. Il teorema del n. 1 dice che, rispetto al sistema Λ, i punti di r e s si associano (colla projettività $\mathcal{P}$) così che ogni coppia di punti associati presenta una sola condizione alle curve di Λ costrette a contenerla. Dunque le rette r, s sono imagini di una linea doppia (in generale) Δ di F, lungo cui le due falde di F saranno nettamente staccate (se r e s sono distinte): rispondendo l'una ai punti di π prossimi ad r, l'altra ai punti prossimi ad s (il punto comune M risponde in generale ad una retta — o linea

(24) *Sur la courbure de quelques lignes tracées sur une surface,* Nouv. ann. de math., (2) 4, 1865, p. 258 (= Opere mate, I, p. 255).

superiore — di F che va dall'una falda all'altra). La linea doppia $\varDelta$ costituisce la sovrapposizione di due delle ∞^1 linee L (omologhe delle rette r, s). Quindi ancora, come per una L qualunque (n. 9), i piani tangenti nei punti di $\varDelta$ ad una stessa falda di F inviluppano un cono (col vertice su $\varDelta$ e sull'asintotica Γ). — Ogni L ha un punto doppio (nodo) nel suo punto d'incontro con $\varDelta$.

Analogamente si posson ottenere delle F con *linea tripla, quadrupla*, ecc. di natura particolare, obbligando le C_n di Σ a passare pei vertici di un *nuovo* trilatero, quadrilatero ... completo, circoscritto a γ. La linea in questione sarà rappresentata dai lati di questo moltilatero; ogni lato essendo imagine di una falda. Ecc.

14. Facendo coincidere le due rette r, s, o in generale i lati del moltilatero di cui s'è detto ora, si otterranno delle F con linee doppie, triple, ecc. *a falde coincidenti.*

Il sistema rappresentativo $\varLambda$ si comporrà allora di curve di Σ aventi in un punto R di γ incontro m-punto con questa linea (ossia colla tangente r a γ in R). Son le curve per cui al n. 5 abbiamo stabilito la singolarità in R. Avevamo visto al n. 3 che tutte quelle fra esse che passano per un punto generico della r hanno ivi incontro $(m+1)$-punto con una stessa retta, e quindi anche fra loro. Ne segue che ad r risponde su F una notevole linea $(m+1)$-pla, a falde coincidenti. Per $m=1$, si ha un'ordinaria *linea cuspidale.* In tutti i casi la rappresentazione piana, così semplice, dà modo di esaminare le singolarità delle sezioni piane o iperpiane nei punti della linea singolare, ritrovando fatti noti e ottenendone dei nuovi. Credo superfluo trattenermi su ciò.