Corrado Segre

Su una classe di superficie degl'iperspazi, legate con le equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine

Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **42** (1906-07), p. 1047–1079

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 20–49

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_20>

XXIV.

SU UNA CLASSE DI SUPERFICIE DEGL'IPERSPAZII LEGATE COLLE EQUAZIONI LINEARI ALLE DERIVATE PARZIALI DI 2° ORDINE

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino »,
Vol. XLII, 1906-07, pp. 559-591.

1. Quando si ha da trattare un'equazione differenziale ordinaria lineare, d'ordine n, per una funzione x della variabile u, si suol adoperare, e con vantaggio, quella curva (curva *integrale*) dello spazio S_{n-1}, che è luogo di un punto le cui coordinate projettive omogenee $x^{(i)}$ sono n soluzioni linearmente indipendenti di quell'equazione.

Abbiasi invece un'equazione lineare alle derivate parziali: ad esempio per una funzione x di due variabili u, v. Una rappresentazione geometrica analoga alla precedente sarà data da una superficie, che, in uno spazio qualunque, si ottenga prendendo per coordinate di punto altrettante soluzioni linearmente indipendenti di quell'equazione. La superficie non sarà più individuata projettivamente, com'era prima la curva; poichè le soluzioni linearmente indipendenti sono ora in numero infinito. Pur nondimeno quella rappresentazione geometrica avrà sempre molto interesse.

Finora pare che essa sia stata fatta soltanto con superficie dello spazio ordinario e per equazioni di 2° ordine: nel qual caso sulla superficie (che può prendersi ad arbitrio) riman fissato un sistema coniugato di linee [1]. Se invece si sale agli spazi superiori, si ottengono classi particolari di superficie, dotate, come vedremo, di proprietà geometriche molto notevoli. Così, ricorrendo allo S_5,

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, I, 1887, p. 133 e seg.

pur restando del resto nel caso delle equazioni a derivate parziali di 2^0 ordine, avremo quelle superficie di S_5, i cui ∞^2 piani tangenti formano una varietà definibile anche nel modo duale, cioè come inviluppo di ∞^2 iperpiani.

I metodi che applicheremo son tali che si potranno estendere quasi immediatamente ad equazioni lineari di ogni ordine, e con un numero qualunque di variabili indipendenti; sicchè ad esempio si potranno assegnare senz'altro le proprietà caratteristiche delle varietà a 2, 3,... dimensioni rappresentanti una equazione lineare a derivate parziali di dato ordine. Ricerche speciali si dovranno invece fare per quelle varietà che corrispondono a *particolari* forme di quest'equazione. Ed altre saran da svolgere pel caso che, invece di una equazione, se ne abbiano due o più (2). Se non erro, si troverà in questa direzione un fertile campo di studî analitico-geometrici da coltivare!

Non occorre dire che, se le varietà considerate stanno su una forma quadratica V_4^2, generale, di S_5, esse trovano subito applicazioni nell'ordinaria geometria delle rette. Così le superficie di S_5 più sopra accennate dànno, quando stiano su una V_4^2, quelle congruenze rettilinee dello spazio ordinario, che fan corrispondere alle asintotiche di una superficie focale le asintotiche dell'altra (le così dette *congruenze* W) (3).

Generalità sugli spazi osculatori ad una superficie in un suo punto (4).

2. Nello spazio S_n di dimensione n consideriamo una superficie Φ, definita come luogo del punto x le cui coordinate projettive $x^{(i)}$ (che di regola assumeremo omogenee, e muteremo in non-omogenee ponendo $x^{(0)} = 1$) sono funzioni date di due parametri u, v.

---

(2) Così in una Memoria del sig. E. J. Wilczynski, *Projective differential Geometry of curved surfaces,* comparsa ora nelle Trans. amer. math. Soc., 8, p. 233, si mette in relazione una superficie dello spazio ordinario con un sistema di due equazioni lineari alle derivate parziali di 2^0 ordine, soddisfatte dalle quattro funzioni di u, v, che dànno le coordinate omogenee di un punto della superficie.

(3) In fatti una tal congruenza è caratterizzata da ciò che le 6 coordinate delle sue rette, espresse in funzione di due parametri, son soluzioni di una stessa equazione lineare alle derivate parziali di 2^0 ordine. Darboux, *Leçons,* II, 1889, p. 345.

(4) Alcuni dei risultati che qui ritroviamo analiticamente furono ottenuti geometricamente dal sig. Del Pezzo nella Nota, *Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni,* Rend. Acc. Napoli, 1886.

Queste funzioni, come al solito, si supporranno, in tutto il campo da considerare, monodrome continue e finite con tutte le loro derivate che compariranno man mano (o che occorrano per la validità dei calcoli da farsi).

Le derivazioni rispetto ad u, v, di quelle e di altre funzioni, s'indicheranno coll'apporre gl'indici inferiori 1, 2 ai simboli delle funzioni stesse. Così i simboli $x_1^{(i)}$, $x_{12}^{(i)}$, f_{112} significheranno risp.

$$\frac{\partial x^{(i)}}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 x^{(i)}}{\partial u\, \partial v}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial u^2\, \partial v}.$$

Essendo Φ una *superficie*, i parametri u, v saranno *essenziali* nel sistema delle funzioni $x^{(i)}$; sicchè, in coordinate non omogenee, la matrice delle derivate $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$ non sarà nulla (*).

Infine avvertiamo che gran parte delle nostre considerazioni si potranno, a piacere, intendere riferite ad un *campo complesso*, oppure ad un *campo reale* (di variabili, di funzioni e di corrispondenti figure geometriche). Il lettore vedrà da sè, quando è che, per la validità di una proposizione in ogni caso, non è possibile restringere il campo agli elementi reali.

In questo 1^0 § rappresenteremo spesso i punti colle loro equazioni in coordinate d'iperpiani, od anche coi primi membri di queste equazioni. Così, posto

$$f \equiv \Sigma \xi^{(i)} x^{(i)},$$

ove le $\xi^{(i)}$ sono coordinate d'iperpiani variabili (non funzioni di u, v), il punto x che descrive la superficie Φ sarà rappresentato dalla forma f; e potremo anche parlare del punto x_1 rappresentato da f_1, ossia $\Sigma \xi^{(i)} x_1^{(i)} = 0$ (punto di coordinate $\partial x^{(i)}/\partial u$), ecc.

3. Ci proponiamo di esaminare gli spazi che congiungono successioni di punti di Φ infinitamente vicini ad un *punto fisso* (regolare) $x(u, v)$.

Una tal successione, che va concepita su una linea (regolare) tirata su Φ per x, si può rappresentare così:

$$\begin{aligned} &x\ (u, v), \\ &x'\ (u + du,\ v + dv), \\ &x''(u + 2du + d^2u,\ v + 2dv + d^2v), \\ &x'''(u + 3du + 3d^2u + d^3u,\ v + 3dv + 3d^2v + d^3v), \ldots \end{aligned}$$

(*) Senza invocare il passaggio a coordinate non omogenee, si potrebbe dire che non sarà nulla la matrice delle $x^{(i)}$, $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, e applicare poi questa considerazione alle ultime quattro linee del n. 3 (N. d. R.).

Scriviamo che un iperpiano ξ contiene questi punti. Ciò equivale ad annullare la forma lineare f del n^0 preced., e i suoi successivi differenziali totali rispetto ad u, v. Si ha così la successione di equazioni:

$$f = 0 \,, \tag{1}$$

$$f_1\, du + f_2\, dv = 0 \,, \tag{2}$$

$$f_{11}\, du^2 + 2f_{12}\, du\, dv + f_{22}\, dv^2 + f_1\, d^2u + f_2\, d^2v = 0 \,, \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} &f_{111}\, du^3 + 3f_{112}\, du^2\, dv + 3f_{122}\, du\, dv^2 + f_{222}\, dv^3 \\ &\qquad + 3\,[f_{11}\, du\, d^2u + f_{12}(du\, d^2v + dv\, d^2u) + f_{22}\, dv\, d^2v] \\ &\qquad + f_1\, d^3u + f_2\, d^3v = 0 \,, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

ecc. Lo spazio congiungente i punti $x\, x'\, x''\, x''' \ldots$ (*spazio osculatore*) è rappresentato, come intersezione d'iperpiani, da quelle equazioni; vale a dire congiunge i punti (1), (2), (3), (4), ...

Considerando anzitutto il caso di due soli punti successivi x, x', vediamo che la *tangente* $x\,x'$ a Φ in x, cioè la retta congiungente i punti (1) e (2), varia nel piano π (*piano tangente* a Φ in x) rappresentato dalle tre equazioni:

$$f = 0 \,, \quad f_1 = 0 \,, \quad f_2 = 0 \,. \tag{5}$$

È il piano dei tre punti x, x_1, x_2. Questi punti non sono allineati: se no, assumendo per es. la coordinata $x^{(0)} = 1$, si avrebbe che la matrice delle prime derivate delle altre $x^{(i)}$ sarebbe nulla, il che si escluse (n. 2).

4. Veniamo al piano $x\,x'\,x''$, rappresentato dalle (1), (2), (3): *piano osculatore* ad una curva di Φ passante per x. Teniamo fissa la tangente $x\,x'$; e cerchiamo il luogo dei piani osculatori che così si ottengono.

Sarà fisso il rapporto $k = du : dv$. La (2) ci dà: $f_2 = -kf_1$, che sostituita in (3) la muta così:

$$f_{11}\, du^2 + 2f_{12}\, du\, dv + f_{22}\, dv^2 + f_1(d^2u - kd^2v) = 0 \,.$$

Ora questa equazione, al variare del punto x'', ossia di d^2u, d^2v, rappresenta un punto mobile sulla retta fissa che unisce il punto

$$f_{11}\, du^2 + 2f_{12}\, du\, dv + f_{22}\, dv^2 = 0 \tag{6}$$

al punto $f_1 = 0$. Da questa retta e dalla $x\,x'$ è determinato in generale un S_3: quello rappresentato, in coordinate d'iperpiani, da quelle ultime due equazioni e dalle (1), (2); quindi anche rappresentato dal sistema

$$(7) \qquad \begin{cases} (5) & f=0\,, \quad f_1=0\,, \quad f_2=0 \\ (6) & f_{11}\,du^2+2f_{12}\,du\,dv+f_{22}\,dv^2=0\,. \end{cases}$$

Vediamo dunque che i piani osculatori provenienti dalla tangente fissa sono ∞^1, e formano un fascio attorno a questa retta nello spazio S_3 (7), il quale evidentemente passa per π, in causa delle (5).

Lasciamo ora variare la tangente, cioè $du:dv$. L'S_3 prenderà ∞^1 posizioni, corrispondentemente alle infinite posizioni del punto (6). Le coordinate di questo punto essendo forme quadratiche di du, dv, il punto stesso descriverà *in generale* una conica, che sarà rappresentata, come inviluppo d'iperpiani, dall'equazione

$$(8) \qquad f_{11}f_{22}-f_{12}^2=0\,.$$

Le dette ∞^1 posizioni dello S_3 saran gli spazi che da π projettano i punti di quella conica, cioè *in generale* gli S_3 generatori di un cono quadrico V_4^2 rappresentabile, come inviluppo d'iperpiani, colle equazioni (5) e (8). *Sarà questo cono il luogo degli* ∞^2 *piani osculatori in* x *alle curve di* Φ *passanti per* x. Esso sta evidentemente, come gli S_3 (7), nello S_5 rappresentato da

$$(9) \qquad \begin{cases} f\;=0\,; \quad f_1\;=0\,, \quad f_2\;=0\,; \\ f_{11}=0\,, \quad f_{12}=0\,, \quad f_{22}=0\,. \end{cases}$$

Si può dire che *gl'iperpiani passanti per questo spazio son quelli che contengono tutti i punti di* Φ *infinitamente vicini ad* x *nel 1° e nel 2° ordine.*

5. Prima di proceder oltre notiamo quando è che si ha *eccezione* alle ultime cose dette (dove si metteva la condizione «*in generale*»).

Il punto (6) non descrive una conica, ma una retta, solo quando i tre punti f_{11}, f_{12}, f_{22} siano allineati. D'altra parte, se anche il punto (6) descrive una conica, gli S_3 che da π lo projettano formeranno un S_4, anzi che un cono quadrico V_4^2, se avviene che le (9) rappresentino un S_4 invece che un S_5. Questo caso abbraccia il precedente. Otteniamo come unica eccezione questa: che le sei equazioni (9) fra le $\xi^{(i)}$ sian tra loro legate linearmente; vale a dire che *esistano sei quantità* A, B, ..., F, *tali che per ogni valore dell'indice* i *sia*

$$Ax_{11}^{(i)}+Bx_{12}^{(i)}+Cx_{22}^{(i)}+Dx_1^{(i)}+Ex_2^{(i)}+Fx^{(i)}=0\,.$$

Allora *gli* ∞^2 *piani osculatori in* x *alle curve di* Φ *riempiono un* S_4, *anzi che un cono* V_4^2.

Ritorneremo poi diffusamente su questo caso.

6. Riprendiamo il caso generale.

Lo spazio S_3 che unisce i 4 punti successivi $x\,x'\,x''\,x'''$ è rappresentato dalle equazioni (1), (2), (3), (4). Fissiamo il piano $x\,x'\,x''$; cioè consideriamo solo quegli S_3 che osculano in x le linee di Φ aventi in x quel dato piano osculatore. Potremo assumere fisse du, dv, d^2u, d^2v; e far variare solo d^3u, d^3v. Ponendo di nuovo $k = du : dv$, e quindi $f_2 = -kf_1$, gli ultimi due termini della (4) si riducono a $f_1(d^3u - kd^3v)$; sicchè la (4) contiene solo un parametro variabile: il binomio $d^3u - kd^3v$. Le (1), (2), (3) son fisse. Dunque l'S_3 che stiam considerando descrive un fascio attorno al piano $x\,x'\,x''$, nello S_4 che unisce i punti (1), (2), (3) al punto $f_1 = 0$ ed a quello rappresentato dalla (4) in cui si sopprimano gli ultimi due termini. Ma la $f_1 = 0$ riduce la (2) a $f_2 = 0$; dopo ciò si semplifica anche la (3). Così quello S_4 risulta rappresentato dalle cinque equazioni:

$$(11)\quad \begin{cases} (5) & f = 0\,, \quad f_1 = 0\,, \quad f_2 = 0\,, \\ (6) & f_{11}\,du^2 + 2f_{12}\,du\,dv + f_{22}\,dv^2 = 0\,, \\ (10) & f_{111}\,du^3 + 3f_{112}\,du^2\,dv + 3f_{122}\,du\,dv^2 + f_{222}\,dv^3 \\ & \quad + 3\,[f_{11}\,du\,d^2u + f_{12}(du\,d^2v + dv\,d^2u) + f_{22}\,dv\,d^2v] = 0\,. \end{cases}$$

Confrontando colle (7) si vede che questo S_4 contiene, non solo il piano tangente π, ma anche l'S_3 luogo degli ∞^1 piani osculatori corrispondenti alla tangente fissa $du : dv$.

Noi vogliamo far variare non solo d^3u, d^3v, ma anche d^2u, d^2v, e du, dv; e cercare quale sarà il luogo dello S_4 (11).

Notiamo subito, guardando quelle equazioni, che questo luogo starà nello spazio determinato dai 10 punti

$$(12)\quad \begin{cases} f\,; \quad f_1\,, \quad f_2\,; \quad f_{11}\,, \quad f_{12}\,, \quad f_{22}\,; \\ \quad f_{111}\,, \quad f_{112}\,, \quad f_{122}\,, \quad f_{222}\,; \end{cases}$$

spazio che sarà *in generale* un S_9. Entro questo lo S_4 (11) si può riguardare come quello che projetta dal piano fisso π la retta congiungente i due punti (6), (10). Basta dunque che determiniamo il luogo di questa retta, luogo che starà nello spazio (*in generale* un S_6) che unisce i 7 punti f_{11}, f_{12}, f_{22}; f_{111}, f_{112}, f_{122}, f_{222}.

Al variare di $du : dv$ il punto (6) descrive una conica nel piano (f_{11}, f_{12}, f_{22}). Quanto al punto (10), vediamo che sta sulla retta dei due punti seguenti:

$$(13)\qquad f_{111}\,du^3 + 3f_{112}\,du^2\,dv + 3f_{122}\,du\,dv^2 + f_{222}\,dv^3$$

$$(14)\qquad f_{11}\,du\,d^2u + f_{12}\,(du\,d^2v + dv\,d^2u) + f_{22}\,dv\,d^2v\,.$$

Il 1° di questi descrive, nello S_3 $(f_{111}, f_{112}, f_{122}, f_{222})$, una cubica riferita projettivamente alla conica, per mezzo del parametro $du:dv$. L'altro, quando son date du, dv e si faccian variare solo d^2u, d^2v, descrive la retta tangente alla conica nel punto $du:dv$. Dunque la retta che unisce il punto (6) al punto (10) descrive, quando du, dv stian fisse, un fascio di rette attorno al punto (6), nel piano del punto (13) e della tangente nel punto (6) alla conica. Questo piano, al variar di du, dv, congiunge sempre gli elementi omologhi di due varietà semplicemente infinite, riferite projettivamente tra loro, risp. di 3° e di 2° grado, l'una di punti (la cubica), l'altra di rette (la conica) (5). Per conseguenza esso genererà una V_3 *del 5° ordine.*

Concludiamo dunque che *gli* ∞^3 S_3 *osculatori in* x *alle curve di* Φ *costituiscono in generale una* V_6 *del 5° ordine dello* S_9 (12). Questa V_6 è luogo di ∞^1 S_5 uscenti da π, ognun dei quali proviene dalle curve aventi in x una data tangente. Entro uno di quegli S_5 gli S_3 osculatori a curve che hanno uno stesso piano osculatore son gli S_3 di un fascio, sicchè generano un S_4.

Rileviamo anche il fatto che, se dallo S_5 (9), contenente la varietà V_4^2 dei piani osculatori in x, si projetta la nuova varietà V_6^5 luogo degli S_3 osculatori, si otterrà un S_5-cono V_7^3 luogo degli S_6 che uniscono lo S_5 (9) ai punti della cubica (13). Questa V_7^3 starà nello S_9 (12).

Gl'iperpiani passanti per (12) son quelli che contengono tutti i punti di Φ infinitamente vicini di 1°, 2°, 3° ordine al punto x.

7. Quando i 10 punti (12) fossero legati linearmente, sicchè esistessero 10 quantità $A_{111}, \dots, A_{11}, \dots, A_1, A_2, A$, tali che per tutti i valori dell'indice i fosse

$$\Sigma A_{pqr} x_{pqr}^{(i)} + \Sigma A_{pq} x_{pq}^{(i)} + \Sigma A_p x_p^{(i)} + A x^{(i)} = 0 ,$$

lo spazio a cui appartiene la varietà degli S_3 osculatori non sarebbe più un S_9: bensì un S_8, od un S_7, od un S_6 secondo che sono 1, 2, 3 le relazioni di quel tipo, linearmente indipendenti.

Tralascio di far cenno di altre particolarità che si posson presentare. E lascio pure di far la ricerca del luogo degli $S_4, S_5, \dots$ osculatori in x alle curve della superficie: ricerca che si presenta come totalmente analoga a quelle dei n[i] preced[i] sui piani ed S_3 osculatori.

---

(5) O, se si vuole, il piano congiunge sempre tre punti omologhi della cubica e di due punteggiate rettilinee fisse (tangenti alla conica), riferite tra loro projettivamente.

8. Alle cose esposte si posson collegare le questioni relative alle *singolarità, che nel punto* x *possono avere particolari sezioni iperpiane di* Φ.

Fissiamo un iperpiano ξ passante per x, sicchè sia

$$f = 0 .$$

Sulla curva intersezione di ξ colla superficie Φ, al punto $x(u, v)$ sia successivo il punto $x'(u + du, v + dv)$. Scrivendo che questo sta su ξ, in modo più disteso che colla (2) del n. 3, abbiamo:

$$\begin{aligned} & f_1\, du + f_2\, dv \\ & + \frac{1}{2}(f_{11}\, du^2 + 2f_{12}\, du\, dv + f_{22}\, dv^2) \\ & + \frac{1}{6}(f_{111}\, du^3 + 3f_{112}\, du^2\, dv + 3f_{122}\, du\, dv^2 + f_{222}\, dv^3) \\ & + \ldots\ldots = 0 . \end{aligned}$$

In generale, cioè se non è $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, si otterrà così un sol valore per $du : dv$, dato da

$$f_1\, du + f_2\, dv = 0 .$$

La curva ha in x un *punto semplice.*

Ma se l'iperpiano ξ verifica le (5) del n. 3, cioè passa pel piano tangente π, allora avremo in generale due valori per $du : dv$, dati dall'equazione

$$f_{11}\, du^2 + 2f_{12}\, du\, dv + f_{22}\, dv^2 = 0 . \tag{15}$$

Diremo allora che la curva ha, in generale, un *punto doppio*, con due tangenti corrispondenti a quei due valori di $du : dv$.

Se poi ξ soddisfa non solo alle (5), ma alle (9), vale a dire se ξ passa per lo spazio, — che è in generale un S_5, ma può ridursi a un S_4 (n. 5), — in cui è immersa la varietà dei piani osculatori, allora l'equazione in $du : dv$ diventa in generale:

$$f_{111}\, du^3 + 3f_{112}\, du^2\, dv + 3f_{122}\, du\, dv^2 + f_{222}\, dv^3 = 0 . \tag{16}$$

Si ha allora come sezione iperpiana di Φ una curva con *punto triplo* in x, le tre tangenti essendo date da quest'ultima equazione.

Similmente gl'iperpiani passanti per lo spazio (12) della varietà degli S_3 osculatori segano Φ secondo curve con x *punto quadruplo.* Ecc. ecc.

9. Quando l'iperpiano ξ dà una sezione con x doppio, cioè con due rami passanti per x, i piani osculatori in x a quei rami staranno risp. nei due S_3 d'intersezione di ξ col cono V_4^2 luogo dei piani osculatori in x. Se però coincidono i due valori di $du:dv$ dati dalla (15), cioè se

$$f_{11}f_{22}-f_{12}^2=0\,, \tag{17}$$

nel qual caso diremo *per brevità* (senz'annettervi necessariamente il significato usuale) che la sezione iperpiana ha in x una *cuspide*, vi sarà in generale un solo ramo, un solo piano osculatore. Ed in fatti la (17), coincidendo colla (8) del n. 4, esprime che ξ è tangente al cono V_4^2.

Se poi si è nel caso particolare del n. 5, in cui questo cono è sostituito da un S_4, un iperpiano generico ξ passante per π darà una sezione di Φ, i cui due rami passanti per x hanno due piani osculatori giacenti insieme (e con π) nello S_3 d'intersezione di ξ con quel S_4.

10. Si possono, per mezzo del principio di dualità relativo ad S_n, trasportare le precedenti proposizioni, relative ad una superficie Φ, all'ente duale, cioè ad un *sistema* ∞^2 *d'iperpiani*.

Non è certo necessario scrivere qui tutti gli enunciati, che così si ottengono! Possiam riguardarli come impliciti nelle cose già scritte. Ma vorrei richiamare l'attenzione su di essi, perchè son proprietà d'*inviluppi*, in cui compajono fatti, che per gli ordinari inviluppi di ∞^2 piani dello spazio ordinario non si possono ancora considerare.

Così: si tratta anzitutto delle intersezioni di un *iperpiano fisso* ξ del sistema ∞^2 con uno, due, tre... *successivi* (n. 3). I successivi di 1^0 ordine dànno su ξ gli ∞^1 S_{n-2} di un fascio, avente per asse uno spazio Π_{n-3}. Il luogo di questo Π_{n-3} sarà in generale una varietà di dimensione $n-1$, *primo inviluppo* degli ∞^2 iperpiani. Considerando poi, coll'iperpiano fisso ξ e coi suoi successivi di 1^0 ordine, anche quelli di 2^0 ordine, si avranno come intersezioni ∞^2 S_{n-3} (duali dei piani osculatori del n. 4), distribuiti in ∞^1 fasci sugli ∞^1 S_{n-2} prima nominati. Gli ∞^1 assi S_{n-4} di quei fasci sono gli S_{n-4} di Π_{n-3}, tangenti (in generale) ad un cono quadrico V_{n-4}^2 avente per vertice un S_{n-6}. Questo S_{n-6} è la intersezione di ξ con tutti gl'iperpiani del dato sistema ∞^2 successivi a ξ del 1^0 e del 2^0 ordine. Il luogo di esso, al variar di ξ, sarà in generale una V_{n-4}, *secondo inviluppo* degli ∞^2 iperpiani. Ecc. ecc.

Se si è nello spazio S_5, ed è dato un sistema ∞^2 di S_4 (6), si avrà su uno generico ξ di questi anzitutto un piano Π_2; poi su questo, in generale, una conica come inviluppo di rette. S'intende che, nel caso speciale corrispondente a quello del n. 5, quell'inviluppo può degenerare in un fascio di rette del piano Π_2. — Variando ξ, si avranno in generale ∞^2 piani Π_2, costituenti la varietà V_4 *primo inviluppo* del dato sistema d'iperpiani. È una varietà corrispondente per dualità in S_5 a quella degli ∞^2 piani tangenti di una superficie. Ma non sono una stessa cosa! Come la superficie Φ ci aveva condotti a ∞^2 coni quadrici uscenti risp. dagli ∞^2 piani tangenti, così le nuove varietà di ∞^2 piani hanno in ciascun piano una conica inviluppo ben determinata. La coincidenza fra i due concetti avviene, come vedremo (n. 19), quando il caso speciale del n. 5 si presenta per ogni punto della superficie (o il fatto duale per ogni iperpiano del sistema ∞^2). Allora su ogni piano Π_2 risulta determinato un punto, il cui luogo è una superficie *secondo inviluppo* del sistema dato d'iperpiani. E i piani Π_2 si posson anche riguardare come i piani tangenti di questa superficie.

Le superficie soluzioni di equazioni lineari di 2° ordine.

11. D'or innanzi considereremo esclusivamente quelle superficie Φ dello spazio S_n, che presentano *in tutti i loro punti generici* la particolarità accennata al n. 5, cioè che i piani osculatori in un punto fisso x riempiono un S_4, anzi che un cono V_4^2. Come s'è visto poi al n. 8, gl'iperpiani generici passanti per quel S_4 (e non soltanto, come avviene in generale, quelli passanti per un certo S_5) segano Φ secondo curve aventi nel punto fisso un punto triplo. Chiamerò lo S_4 spazio *iperosculatore* in x a Φ.

Abbiam trovato (n. 5) che la proprietà analitica che caratterizza una tal superficie è questa: che le funzioni $x^{(i)}$ di u, v verifichino

(6) Questo caso troverà applicazione nella geometria della retta: agli *inviluppi di ∞^2 complessi lineari di rette.*

Se si tratta di ∞^2 complessi lineari *speciali,* si ricade nelle note proprietà infinitesimali di 1° e 2° ordine delle *congruenze di rette.* Cfr.: G. KOENIGS, *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé,* Thèse, Paris 1882 (specialmente p. 100 e seg.); E. WAELSCH, *Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen und Flächen,* Sitzungsber. Akad. Wien, 100, 1891, p. 158.

una stessa equazione della forma

$$(18) \qquad Ax_{11} + Bx_{12} + Cx_{22} + Dx_1 + Ex_2 + Fx = 0 ,$$

ove i coefficienti $A, \dots, F$ saranno ora funzioni determinate di u, v.

Se si considerano coordinate non omogenee, si può supporre che la primitiva coordinata omogenea $x^{(0)}$ sia $=1$; sicchè, sostituendola nell'equazione (18), risulta $F=0$. Dunque le n coordinate non omogenee verificano un'equazione della forma ridotta

$$(18') \qquad Ax_{11} + Bx_{12} + Cx_{22} + Dx_1 + Ex_2 = 0 .$$

Come esempi di superficie di questa specie (*la specie Φ*, come dirò per brevità d'or innanzi) possiam citare le *rigate*, ossia le superficie

$$x^{(i)} = \alpha^{(i)}(u) + v\,\beta^{(i)}(u) ;$$

e le superficie rappresentabili colle formole

$$x^{(i)} = \alpha^{(i)}(u) + \beta^{(i)}(v) .$$

Quelle corrispondono all'equazione differenziale $x_{11} = 0$; queste invece alla $x_{12} = 0$. Se poi si prendono per le $x^{(i)}$ funzioni *armoniche* di u, v, si otterranno superficie corrispondenti all'equazione $x_{11} + x_{22} = 0$.

Date 4 funzioni $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ di u, v, ad arbitrio, scrivendo che esse son soluzioni della (18), si ottengono 4 equazioni lineari omogenee fra le 6 quantità $A, B, \dots, F$. Se ne deduce che una qualunque superficie dello spazio ordinario S_3 appartiene alla specie Φ; corrisponde anzi ad infinite equazioni (18) essenzialmente distinte.

Similmente si vede che ogni superficie di S_4 è una Φ; ma corrisponde in generale ad un'equazione differenziale ben determinata, perchè risultano determinati i rapporti dei coefficienti $A, B, \dots$

Invece nello S_n, con $n \geq 5$, una superficie data $x^{(i)}(u, v)$ è una Φ solo quando è nulla la matrice di $n+1$ linee

$$\left\| x_{11}^{(i)} \;\; x_{12}^{(i)} \;\; x_{22}^{(i)} \;\; x_1^{(i)} \;\; x_2^{(i)} \;\; x^{(i)} \right\| .$$

Data in S_3 (o S_4) una superficie arbitraria, essa si può sempre riguardare come projezione d'infinite superficie della specie Φ di un S_n. Esse si ottengono formando un'equazione lineare di 2° ordine, verificata dalle coordinate dei punti della data superficie; e poi assumendo, insieme con queste, come ulteriori coordinate, altre soluzioni particolari generiche di quella equazione.

12. È opportuno stabilire in quali casi una superficie *appartenente* ad S_n, per $n \geq 4$, verifica due o più equazioni (18) o (18′)

essenzialmente distinte. Dico che *ciò avviene solo quando la superficie è sviluppabile* [7].

In fatti, in quella ipotesi, prendendo ad arbitrio 4 delle n coordinate non omogenee, esse dovranno verificare due equazioni (18′) distinte. Il fatto richiesto si dovrà dunque verificare per una qualunque superficie projezione della data su un S_4.

In S_4 avremo che le 4 coordinate non omogenee $x^{(i)}$ annulleranno i determinanti del 4^0 ordine estratti dalla matrice

$$\left\| x_{11}^{(i)} \; x_{12}^{(i)} \; x_{22}^{(i)} \; x_1^{(i)} \; x_2^{(i)} \right\| .$$

Si vede facilmente che la proprietà da indagare non si altera per una trasformazione delle coordinate curvilinee u, v. Assumiamo dunque come nuove u, v due delle 4 coordinate $x^{(i)}$, e le rimanenti indichiamole con y, z. Così quella matrice diventa

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ y_{11} & y_{12} & y_{22} & y_1 & y_2 \\ z_{11} & z_{12} & z_{22} & z_1 & z_2 \end{matrix} \right\| = 0 ,$$

ossia

$$\left\| \begin{matrix} y_{11} & y_{12} & y_{22} \\ z_{11} & z_{12} & z_{22} \end{matrix} \right\| = 0 . \tag{19}$$

Dico che da questa relazione segue: o

$$z_{11} z_{22} - z_{12}^2 = 0 , \tag{20}$$

oppure y, z, u, v son legate da un'equazione lineare.

Supponiamo da prima che non si verifichi la (20). Non potranno esser costanti nè z_1, nè z_2; anzi, le funzioni z_1, z_2 di u e v si potran riguardare come variabili indipendenti l'una dall'altra, poichè il loro determinante funzionale non è nullo. La (19) mostra che è nullo invece il determinante funzionale di y_1, z_1; e così pure quello di y_2, z_2. Ne segue

$$y_1 = \varphi(z_1) , \qquad y_2 = \psi(z_2) . \tag{21}$$

Derivando rispetto a v ed u si ha:

$$y_{12} = \varphi'(z_1) \cdot z_{12} = \psi'(z_2) \cdot z_{12} . \tag{22}$$

---

[7] Intendo per *sviluppabile* una superficie di S_n, che sia un cono, oppure il luogo delle tangenti ad una curva.

Se $z_{12} \neq 0$, sarà $\varphi'(z_1) = \psi'(z_2)$ e quindi $=$ costante c. Dunque $\varphi(z_1) = cz_1 + d$, $\psi(z_2) = cz_2 + e$; sicchè le (21) diventano:

$$\frac{\partial}{\partial u}(y - cz) = d$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(y - cz) = e\ ;$$

e dànno:

$$y = cz + du + ev + f\,,$$

cioè un'equazione lineare tra y, z, u, v.

Se invece $z_{12} = 0$, cosicchè le (22) dànno soltanto $y_{12} = 0$, integrando avremo:

$$\begin{aligned} y &= \alpha(u) + \beta(v) \\ z &= \gamma(u) + \delta(v)\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Sostituiamo queste espressioni nella (19), che è ridotta a $y_{11}\,z_{22} - y_{22}\,z_{11} = 0$. Abbiamo

$$\alpha''(u)\cdot\delta''(v) - \beta''(v)\cdot\gamma''(u) = 0\,. \tag{24}$$

Se fosse $\gamma''(u) = 0$, la 2ª delle (23) darebbe $z_{11} = 0$; sicchè varrebbe la (20), che per ora si è esclusa. Essendo dunque $\gamma''(u) \neq 0$, la (24) ci dà:

$$\alpha''(u) = c\,\gamma''(u)$$

$$\beta''(v) = c\,\delta''(v)\,,$$

ove c sarà una costante. Integrando:

$$\alpha(u) = c\,\gamma(u) + du + e$$

$$\beta(v) = c\,\delta(v) + fv + g\ ;$$

e sostituendo nelle (23), si trae:

$$y = cz + du + fv + e + g\,,$$

ossia di nuovo un'equazione lineare.

Così, se la superficie che abbiam considerato in S_4 è *immersa* in questo spazio, cioè non sta in un S_3, dovrà ogni sua proiezione in un S_3 esser tale che, chiamando u, v, z tre coordinate projettive non omogenee, sia sempre verificata la (20), cioè

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\right)^2 = 0\,.$$

Ora quest'equazione caratterizza le superficie *sviluppabili* di S_3. Basterà dunque dimostrare che: *se una superficie* F *immersa in* S_n ($n \geq 4$)

ha per projezione generica su uno spazio ordinario una superficie sviluppabile, sarà essa stessa una superficie sviluppabile.

A tal fine si può stabilire anzitutto che *se* F *ha per projezione generica* F′ *su* S_3 *una rigata, sarà essa stessa rigata.* Dopo ciò si dimostrerà che *se* F′ *è sviluppabile, anche* F *sarà sviluppabile.*

Ci limiteremo al caso di $n = 4$. Quando per esso si sian svolte le dimostrazioni, se ne trarrà, con ragionamenti analoghi, e col passaggio da n ad $n+1$, la validità dei due teoremi per n qualunque.

Cominciamo dunque a supporre che la superficie F appartenente ad S_4 si projetti da ogni punto generico su S_3 secondo una superficie F' rigata. Se F non fosse anch'essa rigata, per ogni projezione che se ne fa, le linee di F che si projettano secondo generatrici rettilinee di F' sarebbero linee piane. E se P è un punto qualunque di F, O un punto generico di S_4, la retta PO dovrebbe sempre stare nel piano di qualche linea piana di F. Ma allora si projetti F da P su S_3. Ognuna delle linee piane di F passanti per P si projetterebbe secondo una retta (o segmenti di retta) della superficie projezione di F, e per ogni punto generico O di S_3 passerebbe qualcuna di queste rette: il che è evidentemente assurdo. Dunque F è rigata.

Introduciamo ora l'ipotesi che la projezione F' fatta dal centro O sia una sviluppabile: e cioè anzitutto sia l'insieme delle tangenti di una certa linea L'. Segniamo su ogni generatrice g di F il punto P che ha per projezione il punto P' in cui la corrispondente generatrice g' di F' tocca L'. Il luogo di P sarà una linea L di F, la quale avrà g per tangente nel punto P. Infatti, se L avesse in P un'altra retta t per tangente, questa dovrebbe pur sempre projettarsi secondo la tangente g' di L' in P'; sicchè il piano che risulterebbe determinato da t e g, e che sarebbe il piano tangente a F in P, dovrebbe contenere il centro O. Ora, data g su F in modo generico, noi possiamo sempre supporre che O sia preso fuori di tutti i piani tangenti a F nei punti di g. Sarà quindi F l'insieme delle tangenti ad L.

Se poi la projezione generica della rigata F su S_3 fosse un cono, anche F sarebbe un cono. Se no, per ogni punto generico O di S_4 passerebbe una retta incontrata in infiniti punti da tutte le generatrici di F; F riuscirebbe più volte rigata....

13. *Nel seguito escluderemo dalla nostra considerazione le superficie sviluppabili*; sicchè l'equazione (18) o (18′), verificata dalla superficie Φ data (con dati parametri u, v), sarà unica.

Usando ancora il simbolo $f \equiv \Sigma \xi^{(i)} x^{(i)}$ del n. 2 e seg.$^{\text{i}}$, se ξ è un iperpiano passante pel piano π tangente a Φ nel punto x, sarà

$$f = 0\,, \quad f_1 = 0\,, \quad f_2 = 0\,;$$

sicchè la (18), che, essendo verificata dalle $x^{(i)}$, varrà pure per f, ci dà

$$(25) \qquad A f_{11} + B f_{12} + C f_{22} = 0\,.$$

D'altronde sappiamo che quell'iperpiano segherà Φ secondo una curva avente in x un punto doppio, colle tangenti date (n. 8) da:

$$(15) \qquad f_{11}\, du^2 + 2 f_{12}\, du\, dv + f_{22}\, dv^2 = 0\,.$$

La relazione (25) esprime che questa coppia di tangenti (del campo binario du, dv) è armonica alla coppia di rette

$$(26) \qquad C du^2 - B du\, dv + A dv^2 = 0\,,$$

la quale sta fissa al variar di ξ attorno a π.

Abbiamo così una nuova proprietà delle superficie della specie Φ. *Le coppie di tangenti in un punto generico* x *alle sezioni iperpiane che hanno in* x *un punto doppio non sono tutte le* ∞^2 *coppie di tangenti in* x *a* Φ, *ma solo le* ∞^1 *coppie di un'involuzione, i cui raggi doppi saran le due rette* (26) ([8]).

Queste due rette (26) saranno dunque *le tangenti in* x *alle sezioni iperpiane cuspidate.* Al n. 9 s'era visto che gl'iperpiani ξ i quali dànno sezioni così fatte sono in generale quelli passanti per π che verificano l'equazione quadratica

$$(17) \qquad f_{11} f_{22} - f_{12}^2 = 0\,.$$

Nel caso attuale, in cui ha luogo la (25) per ogni iperpiano contenente π, quest'equazione (17) si spezza in due equazioni lineari fra le $\xi^{(i)}$ ([9]). Ciò significa che per π passano, entro l'S_4 iperosculatore (n. 11), due S_3 (nei quali degenera, come inviluppo d'iperpiani, il cono V_4^2 del n. 4), tali che gl'iperpiani delle sezioni cuspidate in x son quelli che passano per l'uno o per l'altro di quegli S_3. Le tangenti (26) spettano risp. all'uno e all'altro sistema di sezioni.

([8]) Questa proprietà varrà in particolare per *tutte* le superficie di S_4, poichè esse son tutte (n. 11) della specie Φ. Cfr. K. Kommerell, *Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von 4 Dimensionen*, Dissertation, Tübingen 1897 (v. p. 25 e seg.); oppure *Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen*, Math. Ann., LX, 1905 (v. p. 556 e seg.).

([9]) Per ottenerle basta risolvere le (25) e (17) rispetto a $f_{11} : f_{12} : f_{22}$.

Esse coincidono, e con esse quei due S_3, quando

(27) $$B^2 - 4AC = 0\,,$$

cioè quando l'equazione (18) alle derivate parziali è *parabolica.*

14. Sulla superficie Φ le ∞^1 linee integrali dell'equazione differenziale (26), cioè le linee inviluppate dalle tangenti alle sezioni iperpiane cuspidate, formano in generale un sistema doppio, che diremo per brevità il sistema delle *caratteristiche* di Φ.

Projettiamo Φ su S_3 da uno spazio O di dimensione $n-4$, generico. Otterremo una superficie Φ', su cui le caratteristiche di Φ avranno per imagini un *sistema coniugato* di linee. In fatti, preso su Φ il punto generico x e il suo piano tangente π, l'iperpiano $O\pi$ sega Φ secondo una linea avente in x un punto doppio, le cui tangenti separano armonicamente le tangenti in x alle caratteristiche. Quella linea si projetta da O nella linea d'intersezione di Φ' col piano π' tangente in x' (projezione di x). Le tangenti in x' a questa seconda linea saranno dunque le tangenti principali di Φ' in x'; e poichè esse separano armonicamente le tangenti alle projezioni delle caratteristiche, saranno queste ultime rette *tangenti coniugate.*

Lo stesso fatto si può dedurre da una proposizione del sig. Darboux già citata al n. 1. Una projezione generica Φ' della data superficie Φ su uno spazio ordinario sarà ad es.^{0} quella che è rappresentata da 4 sole delle funzioni $x^{(i)}$ di u, v (le altre coordinate essendo poste, se si vuole, $=0$). Ora, poichè queste funzioni verificano l'equazione alle derivate parziali (18), la proposizione citata dice che sulla Φ' le linee integrali della (26), vale a dire appunto le projezioni delle caratteristiche di Φ, formeranno un sistema coniugato.

Le superficie della specie Φ son caratterizzate dal contenere un sistema di linee, che si projetta sempre in S_3 *secondo un sistema coniugato.* In fatti da quella proprietà deriva, invertendo il ragionamento geometrico fatto poc'anzi, che, in un punto generico x della data superficie, le coppie di tangenti alle sezioni cogl'iperpiani ξ passanti pel piano tangente π, cioè le coppie

$$f_{11}\,du^2 + 2f_{12}\,du\,dv + f_{22}\,dv^2 = 0\,,$$

sono armoniche ad una coppia fissa; sicchè esisteranno delle quantità A, B, C indipendenti da ξ tali che

$$Af_{11} + Bf_{12} + Cf_{22} = 0\,.$$

Questa deve valere in forza del passaggio di ξ per π, cioè in forza delle

$$f = 0\,,\quad f_1 = 0\,,\quad f_2 = 0\,.$$

Ne segue l'identità (rispetto alle $\xi^{(i)}$)

$$Af_{11} + Bf_{12} + Cf_{22} + Df_1 + Ef_2 + Ff = 0\,,$$

che coincide colla nostra definizione analitica delle superficie Φ.

15. Spezzando il sistema doppio delle caratteristiche nei due sistemi componenti, che corrispondono ai due fattori lineari dell'equazione (26), possiamo enunciare la proprietà trovata anche in quest'altro modo, più immediato, e che deriva da una nota proprietà dei sistemi coniugati sulle superficie dello spazio ordinario, e dal fatto (n. 12) che una rigata, la cui projezione generica su un S_3 sia sviluppabile, è essa stessa sviluppabile:

Su una superficie della specie Φ di uno spazio qualunque esistono in generale due sistemi ∞^1 di linee (i sistemi delle *caratteristiche*) *tali che le tangenti nei punti di una di esse alle linee dell'altro sistema formano una rigata sviluppabile.*

In altri termini: *i piani tangenti alla superficie Φ nei punti di una linea caratteristica sono gli ∞^1 piani tangenti di una superficie sviluppabile. Le generatrici rettilinee di questa son le tangenti alle caratteristiche dell'altro sistema.*

Nel caso parabolico (fine del n. 13), in cui i due sistemi semplici di caratteristiche coincidono, avremo che *in ogni punto della superficie Φ il piano tangente a questa coincide col piano osculatore alla linea caratteristica passante per quel punto.* Le caratteristiche si comportano come le *asintotiche* delle superficie di S_3; e si projettano in fatti secondo un sistema di tali asintotiche ([10]).

16. Escludendo per ora il caso parabolico, le proposizioni precedenti dànno il modo di *dedurre da una data superficie della specie che esaminiamo tutta una serie, in generale illimitata, di tali superficie.* Questo metodo corrisponde a quello noto, con cui, data una superficie dello spazio ordinario, sulla quale si conosca un sistema coniugato, se ne trae una serie di superficie, sulle quali si conoscerà pure un sistema coniugato ([11]).

Costruiamo le ∞^1 sviluppabili circoscritte alla data superficie Φ lungo le ∞^1 caratteristiche del 1^0 sistema. Il luogo degli spigoli di regresso di queste sviluppabili sarà una certa superficie Φ_1, la

---

([10]) Le *superficie rigate* sono (n. 11) superficie Φ del tipo parabolico. Il sistema semplice delle caratteristiche si compone per esse delle generatrici rettilinee.

([11]) DARBOUX, *Leçons*, II, p. 16.

quale avrà per tangenti le ∞^2 (generatrici delle sviluppabili, ossia) tangenti alle caratteristiche del 2^0 sistema di Φ. Su Φ_1 i detti ∞^1 spigoli di regresso, e le ∞^1 linee ognuna delle quali è segnata dalle tangenti ad una di queste caratteristiche, formano un doppio sistema; il quale si projetta secondo un sistema coniugato, ogni volta che si projetti Φ_1 su un S_3. In fatti una tal projezione ci riconduce ad un ordinario sistema ∞^2 di rette, avente per superficie focali le projezioni di Φ, Φ_1; e si tratta allora del noto fatto, che le due famiglie ∞^1 di sviluppabili contenute nella congruenza segnano su ciascuna superficie focale un sistema coniugato.

La superficie Φ_1 sarà dunque (n. 14) della nostra specie. La sua relazione con Φ è evidentemente reciproca.

Scambiando su Φ i due sistemi di caratteristiche, si ottiene invece di Φ_1 un'altra trasformata Φ_{-1}. Similmente procedendo in modo analogo su Φ_1, si trova, oltre a Φ, un'altra superficie Φ_2. E così via.

17. Traducendo sotto forma analitica questo metodo di trasformazione delle superficie della specie Φ, si ricade nella *trasformazione di* LAPLACE delle equazioni lineari alle derivate parziali di 2^0 ordine, appunto come avviene al DARBOUX colla trasformazione citata al principio del n. 16.

Semplifichiamo anzitutto l'equazione (18) alle derivate parziali, con un cambiamento delle variabili indipendenti u, v; cioè scegliendo queste in modo che i due sistemi di linee caratteristiche (26) vengano ad essere i sistemi $u = cost.$, $v = cost.$ (12). La (26) dovrà dunque avere nulli i coefficienti A, C; sicchè la (18) prenderà la forma speciale:

$$x_{12} + Dx_1 + Ex_2 + Fx = 0 . \tag{28}$$

Ciò fatto, consideriamo il punto particolare (13)

$$X = x_2 + Dx , \tag{29}$$

cioè quello le cui coordinate (omogenee) si deducono da questa formola, ponendo un indice superiore (i) ai simboli x, x_2, X. Esso

(12) S'intende dunque ancora escluso il caso parabolico.

In tal caso il DARBOUX dimostra (*Leçons*, I, p. 134) che, con una scelta conveniente dei parametri, la (18) si potrebbe ridurre alla forma particolare

$$x_{11} + Ex_2 = 0 .$$

(13) Cfr. DARBOUX, *Leçons*, II, p. 18.

starà evidentemente sulla tangente in x alla linea $u = cost.$ di Φ. Facciam variare x su una $v = cost.$; sicchè nella (29) si lasci variare solo u. Il punto X descriverà in generale una linea, la cui tangente conterrà il punto [14].

$$X_1 = x_{12} + Dx_1 + D_1 x \,.$$

Applicando la (28), questa formola si può scrivere così:

$$X_1 = (D_1 - F)\, x - E x_2 \,; \tag{30}$$

e applicando la (29):

$$X_1 = hx - EX \,, \tag{31}$$

ove

$$h = D_1 + DE - F \tag{32}$$

è un *invariante* [15] dell'equazione differenziale (28); l'altro invariante essendo

$$k = E_2 + DE - F \,. \tag{32'}$$

Se $h \neq 0$, il punto (31) è sulla retta che unisce i punti x, X, ed è diverso in generale da X. Per conseguenza la tangente in X alla linea che avevam fatto descrivere a quest'ultimo punto sarà precisamente la retta di x e X, cioè la tangente in x alla $u = cost.$ di Φ. Dunque la detta linea è lo spigolo di regresso della sviluppabile che vien generata da questa retta facendo percorrere ad x la $v = cost.$ Lasciando poi variare nella (29) non solo u, ma anche v, il punto X descriverà la superficie Φ_1 del n⁰ preced^e, luogo del detto spigolo di regresso.

Che questa superficie Φ_1 appartenga alla nostra classe si può verificare analiticamente eliminando x e x_2 fra (29), (31), e la derivata di questa rispetto a v. Si ottiene subito per X un'equazione differenziale del tipo della (28): la *trasformata della* (28) *dedotta colla trasformazione di* LAPLACE (29).

18. Sia ora identicamente:

$$h = 0 \,,$$

sicchè la (31) si riduca a

$$X_1 = -EX \,.$$

---

[14] Ci atteniamo anche qui alla convenzione fatta fin dal principio: che gl'indici inferiori 1, 2 significhino derivazioni rispetto ad u, v.

[15] DARBOUX, II, p. 24. V. anche, ad es⁰, FORSYTH, *Theory of differential equations*, vol. 6ª, 1906, p. 44.

Assumiamo $x^{(0)} = 1$; la (28) avrà allora $F = 0$; e la (29) ci darà $X^{(0)} = D$. Sarà dunque

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{X}{X^{(0)}}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{X}{D}\right) = \frac{1}{D^2}(DX_1 - XD_1) =$$

$$= \frac{1}{D^2} X(-DE - D_1) = -\frac{h}{D^2} X = 0 \, .$$

In conseguenza il punto X definito dalla (29), quando in questa si lasci variare la sola u, starà fisso ([16]). La *linea*, che prima ottenevamo, si riduce ad un *punto* ([17]).

Le tangenti alle $u = cost.$ nei punti di una qualsiasi linea $v = cost.$ formano, in questo caso di $h = 0$, un *cono*. La superficie Φ è *l'inviluppo di* ∞^1 *coni*.

Analogamente se $k = 0$.

Le superficie, già citate al n. 11,

$$x^{(i)} = \alpha^{(i)}(u) + \beta^{(i)}(v) \, ,$$

per le quali l'equazione (28) si riduce a $x_{12} = 0$, hanno nulli entrambi gl'invarianti. Esse sono inviluppi di due famiglie di coni.

Le superficie Φ di S_5.

19. Quando lo spazio ambiente è S_5, come proprietà caratteristica delle nostre superficie Φ si può assumere questa: che *per ogni punto generico* x *vi è un iperpiano che sega la superficie secondo una curva avente in* x *un punto triplo.* Questi *iperpiani iperosculatori* alle Φ di S_5 sono, sotto qualche aspetto, analoghi ai *piani tangenti* delle superficie di S_3, come apparirà dal seguito.

Indichiamo con $\xi^{(i)}$ le coordinate omogenee dell'iperpiano iperosculatore alla superficie Φ di S_5 nel punto x. Potremo riguardarle come funzioni di u, v. Introduciamo poi, in generale, il simbolo

---

([16]) Si escluse in quest'ultimo calcolo che sia $D = 0$. Quando ciò fosse, sicchè la (28) si riducesse a: $x_{12} + Ex_2 = 0$, e la (29) a: $X = x_2$, ne seguirebbe subito che, per indici i diversi da 0, il rapporto $X_1^{(i)} : X^{(i)}$ non muta al mutar di i (essendo $= -E$). Se ne trae che $\partial(X^{(i)} : X^{(j)})/\partial u = 0$; cioè che al variar della sola u tutte quante le coordinate di X conservano inalterati i loro rapporti. Ancora X sarà fisso.

([17]) Se per una coppia di valori di u, v, e non per tutte, fosse $h = 0$, il punto X, invece di esser *fisso* al variar di u, verrebbe, in corrispondenza a quei valori, a cadere in un *punto singolare* (origine di un ramo superlineare, se siam nel campo delle funzioni analitiche) sulla linea da esso descritta.

$(\eta\, y)$ in luogo di $\Sigma\, \eta^{(i)} y^{(i)}$. Allora i legami fra il punto x e l'iperpiano ξ, che, in base al n. 5, eran rappresentati dalle (9), si scriveranno invece nel seguente modo:

$$(\xi x) = 0\,, \tag{33}$$

$$(\xi x_1) = 0\,, \quad (\xi x_2) = 0\,, \tag{33'}$$

$$(\xi x_{11}) = 0\,, \quad (\xi x_{12}) = 0\,, \quad (\xi x_{22}) = 0\,; \tag{33''}$$

o più brevemente, oltre alla (33):

$$(\xi x_p) = 0 \tag{34}$$

$$(\xi x_{pq}) = 0\,, \tag{35}$$

ove ciascuno degli indici $p\,, q$ può prendere i valori 1, 2.

Da queste relazioni, che legano fra loro le funzioni $x^{(i)}$ e $\xi^{(i)}$ di $u\,, v$, ne trarremo alcune altre.

Derivando la (33) rispetto ad una delle due variabili (corrispondentemente all'indice p), e sottraendo la (34), si ha:

$$(\xi_p x) = 0\,. \tag{36}$$

Derivando (34) (corrispond^e^ ad un indice qualunque q), e sottraendo (35):

$$(\xi_q\, x_p) = 0\,. \tag{37}$$

Infine derivando (36), rispetto alla variabile d'indice q, ed applicando la (37) cogl'indici scambiati:

$$(\xi_{pq} x) = 0\,. \tag{38}$$

Ora, date 6 funzioni $x^{(i)}$ di $u\,, v$, la superficie di S_5 luogo del punto x risultava una superficie della classe speciale Φ quando esistevano 6 funzioni $\xi^{(i)}$ tali da verificare con quelle $x^{(i)}$ le relazioni (33), (34), (35). Uno scambio di x e ξ ci fa passare da queste alle relazioni (33), (36), (38), che pure abbiam riconosciute valide. Dunque: *in S_5 la varietà degl' iperpiani iperosculatori ad una superficie della specie Φ è un particolare sistema ∞^2 d'iperpiani appartenente alla specie duale della specie Φ di superficie.*

L'inviluppo (primo) di questo sistema ∞^2 d'iperpiani, cioè (n. 10) *il luogo dei piani Π_2 corrispondenti per dualità ai piani tangenti di una superficie, coincide nel caso attuale col luogo dei piani tangenti della Φ.* Invero il piano Π_2 (secondo l'ultima parte del n. 10) relativo all'iperpiano ξ è l'intersezione di $\xi\,, \xi_1\,, \xi_2$. E le equazioni (33), ..., (37) esprimono che questi 3 iperpiani passano tutti per i 3 punti $x\,, x_1\,, x_2$, ossia pel piano π tangente in x a Φ: sicchè Π_2 coincide con π.

20. Aggiungiamo ancora alcune relazioni.

Derivando la (35) rispetto alla variabile corrispondente ad un indice r, abbiamo:

(39) $$(\xi x_{pqr}) + (\xi_r x_{pq}) = 0 .$$

Derivando la (37), in cui q si sostituisca con r:

$$(\xi_r x_{pq}) + (\xi_{rq} x_p) = 0 ,$$

che colla (39) ci dà

(40) $$(\xi_{rq} x_p) = (\xi x_{pqr}) .$$

Infine dalla (38), in cui p sia sostituito da r, derivando si ha

$$(\xi_{rq} x_p) + (\xi_{pqr} x) = 0 ,$$

che, combinata colla precedente, dà:

(41) $$(\xi_{pqr} x) = -(\xi x_{pqr}) .$$

21. Nel punto x della superficie Φ la terna delle tangenti alla sezione, con x triplo, fatta dall'iperpiano ξ, è rappresentata dall'equazione (16) del n. 8, che ora scriviamo così:

(42) $$(\xi x_{111})\, du^3 + 3\,(\xi x_{112})\, du^2\, dv + 3\,(\xi x_{122})\, du\, dv^2 + (\xi x_{222})\, dv^3 = 0 .$$

Possiamo facilmente vedere un legame fra i coefficienti di quest'equazione e quelli dell'equazione alle derivate parziali verificata dalle $x^{(i)}$, cioè la (18) del n. 11:

(18) $$A x_{11} + B x_{12} + C x_{22} + D x_1 + E x_2 + F x = 0 .$$

Moltiplichiamo questa per ξ_1, e poi sommiamo, estendendo a tutte le coordinate. Applicando le (36), (37) e (39), otteniamo:

$$A\,(\xi x_{111}) + B\,(\xi x_{112}) + C\,(\xi x_{122}) = 0 .$$

Analogamente si ha:

$$A\,(\xi x_{112}) + B\,(\xi x_{122}) + C\,(\xi x_{222}) = 0 .$$

Ora queste due relazioni esprimono che la coppia di tangenti

(26) $$C du^2 - B du dv + A dv^2 = 0$$

è armonica a tutte le coppie prime polari della terna (42). Ciò equivale a dire che quella coppia (26) è l'Hessiana di quella terna. Ricordando (n. 13 e seg$^{\text{i}}$) il significato della (26), concludiamo: *Le tangenti in* x *alle sezioni iperpiane che hanno* x *per cuspide, ossia le* *tangenti in* x *alle linee caratteristiche della superficie* Φ, *costituiscono la coppia Hessiana della terna di tangenti in* x *alla sezione iperpiana avente* x *per punto triplo* (18).

22. La detta terna di tangenti in x alla superficie Φ si potrebbe chiamare la *terna delle tangenti principali.* Essa serve in fatti a definire una corrispondenza fra le direzioni della superficie uscenti dal punto x, analogamente al modo in cui le tangenti principali di una superficie ordinaria di S_3 servono a definire la corrispondenza fra le tangenti coniugate.

Per veder ciò, consideriamo su Φ il punto successivo ad x nella direzione (du, dv). L'iperpiano iperosculatore in esso avrà le coordinate espresse da:

$$\xi + \xi_1 du + \xi_2 dv + \frac{1}{2}(\xi_{11}du^2 + 2\xi_{12}\, du\, dv + \xi_{22}dv^2) + \dots, \tag{43}$$

ove si mettan gli apici superiori alle ξ. Un punto qualunque del piano π tangente in x alla superficie ha le coordinate rappresentabili analogamente con

$$x + \lambda x_1 + \mu x_2, \tag{44}$$

ove λ, μ si posson riguardare come coordinate projettive interne a quel piano. Scriviamo la condizione perchè questo punto (44) stia nell'iperpiano (43), semplificando col sopprimere tutti i termini che risultan nulli dalle relazioni del n. 19. Rimane:

$$\begin{gathered} \lambda\,[(\xi_{11}x_1)du^2 + 2\,(\xi_{12}x_1)\,du\,dv + (\xi_{22}x_1)\,dv^2] \\ + \mu\,[(\xi_{11}x_2)\,du^2 + 2\,(\xi_{12}x_2)\,du\,dv + (\xi_{22}x_2)\,dv^2] = 0\,. \end{gathered} \tag{45}$$

Quest'equazione fra λ e μ rappresenta, nel piano π, la retta d'intersezione coll'iperpiano considerato, infinitamente prossimo a ξ. È soddisfatta da $\lambda = \mu = 0$; sicchè quella retta passa per x.

---

(18) Se è data una superficie della specie Φ appartenente, non più allo S_5 ma ad uno spazio superiore, projettandola su S_5 ed applicando il teorema precedente, si ha: *Su ogni superficie della specie* Φ *le terne di tangenti in un punto generico* x *alle sezioni iperpiane aventi* x *per punto triplo han tutte per coppia Hessiana la coppia delle tangenti alle linee caratteristiche (ossia delle tangenti alle sezioni iperpiane cuspidate in* x).

Se la superficie Φ corrisponde al tipo *parabolico* (n[i] 13 e 15), se cioè coincidono le due tangenti della detta coppia, coincideranno anche con esse (per una nota proprietà dell'Hessiano) due delle tre rette di ogni terna di tangenti a sezioni iperpiane con x triplo.

Supponiamo che la direzione sulla superficie segnata da questa tangente corrisponda ai differenziali $(\delta u, \delta v)$, cosicchè il punto di Φ successivo ad x in quella direzione sia

$$x + x_1\, \delta u + x_2\, \delta v .$$

Ciò si esprimerà ponendo nella (45) δu, δv al posto di λ, μ. Modificando in pari tempo la notazione dei coefficienti coll'applicare la relazione (40), otteniamo:

$$\begin{aligned}(46)\qquad &\delta u \cdot [(\xi x_{111})\, du^2 + 2\,(\xi x_{112})\, du\, dv + (\xi x_{122})\, dv^2] \\ &+ \delta v \cdot [(\xi x_{112})\, du^2 + 2\,(\xi x_{122})\, du\, dv + (\xi x_{222})\, dv^2] = 0 .\end{aligned}$$

Confrontando quest'equazione colla (42) si deduce: *Quando due punti di Φ infinitamente vicini ad* x *in certe due direzioni son tali che l'iperpiano iperosculatore alla superficie in uno di essi passa per l'altro, la direzione di quest'ultimo costituisce la polare di 1° ordine dell'altra direzione rispetto alla terna delle tangenti principali.*

Come si vede, qui, a differenza dalla proposizione analoga relativa allo spazio ordinario (ove, avendosi una *coppia* anzi che una *terna* di tangenti principali, la polarità risulta involutoria), la relazione fra due siffatte direzioni (du, dv), $(\delta u, \delta v)$, non riesce reciproca, in generale. Solo le due direzioni caratteristiche, costituendo l'Hessiano della terna, risultan corrispondenti in doppio modo nella detta corrispondenza.

23. La legge di dualità, che al n. 19 abbiam visto potersi applicare ai punti di Φ e iperpiani iperosculatori, porterebbe a considerare una terna di direzioni (du, dv) (determinatrici d'iperpiani iperosculatori successivi a ξ) corrispondente per dualità alla terna di tangenti principali (42). Ma le relazioni (41) del n. 20 provano che con ciò si ritrova la stessa terna (42): sicchè questa è *duale di se stessa* (convenientemente inteso!) (19).

Ne deriva, formando l'Hessiano, che anche le direzioni delle caratteristiche dànno per dualità ancora le stesse direzioni. In altre parole, l'equazione di 2° ordine alle derivate parziali, analoga alla (18), che ha per soluzioni le funzioni $\xi^{(i)}$ di u e v, avrà comuni colla (18) i tre primi coefficienti A, B, C. Ciò appariva già dal calcolo del n. 21.

---

(19) Non si trovi contraddizione fra questo risultato e la fine del n. precede! Al n. 22 le direzioni (du, dv) d'iperpiani e $(\delta u, \delta v)$ di punti *non eran considerate in modo duale*; in quanto che per l'una di esse bisognava spingersi fino agl'infinitesimi di 2° ordine, mentre per l'altra bastavan quelli di 1° ordine.

Come sulla superficie Φ abbiamo considerato il sistema doppio delle linee caratteristiche, integrali dell'equazione differenziale (26), così converrà considerare il sistema triplo delle ∞^1 linee integrali dell'equazione differenziale (42), cioè le linee che han per tangenti le tangenti principali di Φ. Son le analoghe delle *linee asintotiche* delle superficie di S_3 [20]. Una linea qualunque tracciata su Φ ha in ogni suo punto x incontro *tripunto* coll'iperpiano iperosculatore in x a Φ (poichè quest'iperpiano contiene tutti i piani osculatori). Ma se la linea fa parte del detto sistema triplo, l'iperpiano iperosculatore a Φ in ogni suo punto avrà sempre con essa incontro *quadripunto* (cioè conterrà sempre l'S_3 osculatore alla curva). Ciò si deduce dal teorema del n. 22; ove du, dv sian presi in modo da soddisfare l'equazione (42), cioè corrispondentemente ad una tangente principale. Oppure anche, direttamente, dal n. 3, ove si supponga che l'iperpiano ξ di S_5 verifichi le (9) del n. 4: risultano allora soddisfatte le (1), (2), (3), (4), cioè i passaggi di ξ per $x\,x'\,x''\,x'''$, purchè du, dv si assoggettino alla condizione

$$f_{111}\,du^3 + 3f_{112}\,du^2\,dv + 3f_{122}du\,dv^2 + f_{222}\,dv^3 = 0\,,$$

che equivale alla (42).

Sulla V_4 luogo dei piani tangenti ad una superficie.

24. Abbiasi in S_n una superficie *qualunque* (non più necessariamente della specie Φ).

Riferiamo i vari punti ad un sistema di coordinate non omogenee (poniamo, cioè, come al solito, $x^{(0)} = 1$). Il piano π tangente alla superficie in un suo punto generico x avrà i suoi punti rappresentabili colla formola

$$y = x + \lambda x_1 + \mu x_2\,; \tag{47}$$

s'intende che ai simboli x ed y si affiggeranno successivamente gli apici superiori 1, 2,..., n.

---

[20] Nel caso *parabolico* (ad es. per le rigate) il sistema triplo viene a comporsi di un sistema semplice e del sistema delle caratteristiche contato due volte. Per questo ultimo abbiam già rilevato alla fine del n. 15 una più stretta affinità colle ordinarie *linee asintotiche*.

Lasciando variare nella (47) i 4 parametri u, v, λ, μ, il punto y descriverà la varietà luogo dei piani tangenti alla data superficie. Dico che, *se questa non è sviluppabile, nè sta in un* S_3, *quella varietà sarà di dimensione* 4; cioè quei 4 parametri saranno essenziali.

In fatti l'ipotesi contraria equivale a dire che son nulli tutti i determinanti di 4° ordine estratti dalla matrice delle 1e derivate delle y rispetto ai 4 parametri. Ossia

$$\| x_1 + \lambda x_{11} + \mu x_{12},\ x_2 + \lambda x_{12} + \mu x_{22},\ x_1,\ x_2 \| = 0\,,$$

e semplificando:

$$\| \lambda x_{11} + \mu x_{12},\ \lambda x_{12} + \mu x_{22},\ x_1,\ x_2 \| = 0.$$

Ora, considerando un determinante del 4° ordine estratto da questa matrice, in corrispondenza a 4 qualunque delle n coordinate, e scrivendo che esso è nullo, qualunque siano λ e μ, si vengono a scrivere delle relazioni che si posson compendiare così: son nulli tutti i determinanti del 4° ordine estratti dalla matrice

$$\| x_{11} \quad x_{12} \quad x_{22} \quad x_1 \quad x_2 \|\,.$$

Dal n. 12 segue che ciò avviene solo quando la data superficie è sviluppabile, oppure sta in uno spazio ordinario.

25. Supponiamo ora che la superficie non sia sviluppabile, ed appartenga allo S_5. Se appartenesse ad uno spazio più elevato, considerando una projezione generica su S_5 si vedrebbe che rimangono ancora valide le proposizioni che otterremo.

Il luogo dei piani tangenti alla superficie sarà una V_4 rappresentata dalla (47). L'iperpiano S_4 tangente a questa V_4 in un suo punto y avrà per equazione, nelle coordinate di punto variabile X:

$$\left| X - y\,,\ \frac{\partial y}{\partial u}\,,\ \frac{\partial y}{\partial v}\,,\ \frac{\partial y}{\partial \lambda}\,,\ \frac{\partial y}{\partial \mu} \right| = 0\,,$$

ossia

$$| X - x - \lambda x_1 - \mu x_2\,, x_1 + \lambda x_{11} + \mu x_{12}\,, x_2 + \lambda x_{12} + \mu x_{22}\,, x_1\,, x_2 | = 0.$$

Semplificando rimane

$$| X - x\,,\ \lambda x_{11} + \mu x_{12}\,,\ \lambda x_{12} + \mu x_{22}\,,\ x_1\,,\ x_2 | = 0\,,$$

o, se si preferisce, sotto forma di determinante di 6° grado (quello di 5°, delle derivate seconde e prime delle x, orlato):

$$(48)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & 0 & 0 \\ X-x & x_{11} & x_{12} & x_{22} & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Quest'equazione non varia se λ, μ mutano, conservando un rapporto fisso: il che è come dire che il punto y (47) descrive in π una retta passante per x. Dunque: *nei punti di una retta tangente alla superficie è fisso l'*S_4 *tangente alla* V_4. *La* V_4 *ha in generale solo* ∞^3 (*e non* ∞^4) S_4 *tangenti.*

Dato un punto x della superficie, gli ∞^1 iperpiani tangenti alla V_4 lungo le ∞^1 rette tangenti in x a quella son rappresentati dalla (48), in cui $u . v$ son fisse e varia il rapporto $\lambda : \mu$. La (48) è soddisfatta da tutti i punti

$$X = x + lx_1 + mx_2 ,$$

qualunque siano l ed m; sicchè quegli ∞^1 iperpiani contengono tutti il piano π tangente in x alla superficie (com'era anche evidente geometricamente). E poichè la (48) contiene λ, μ al 2° grado, gl'iperpiani stessi costituiranno un cono inviluppo di 2ª classe. Si riconosce facilmente che questo non è altro che il cono quadrico V_4^2 già considerato alla fine del n. 4.

26. Ciò che ora c'importa rilevare è: in qual caso la V_4, luogo dei piani tangenti alla data superficie, ha un S_4 tangente fisso lungo *tutti* i punti di uno stesso piano tangente (non solo in quelli di una stessa retta tangente alla superficie).

Bisognerà che l'equazione (48), in cui u e v sian fissate, non muti al variar del rapporto $\lambda : \mu$. Ossia: il 1° membro della (48) deve potersi rappresentare così:

$$(49)\qquad (a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2) \cdot \Sigma \xi^{(i)} (X^{(i)} - x^{(i)}) .$$

Le 5 coordinate $\xi^{(i)}$ saranno dunque proporzionali tanto ai suddeterminanti della 1ª colonna nel determinante del 5° ordine

$$(50)\qquad | x_{11} \quad x_{12} \quad x_{22} \quad x_1 \quad x_2 | ,$$

quanto ai suddeterminanti della 2ª colonna, ed a quelli della 3ª. Ne segue che questo determinante (50) è identicamente nullo.

Viceversa se questo fatto accade, saranno i suddeterminanti delle colonne 1ª, 2ª, 3ª del determinante (50) proporzionali fra loro, ossia a certe 5 quantità $\xi^{(i)}(u, v)$; e la (48), sviluppata secondo la 1ª linea, si ridurrà alla forma (49): sicchè per valori generici di λ, μ rappresenterà un iperpiano fisso.

Ricordando il significato dell'annullarsi del determinante (50) (e passando da S_5 a spazi superiori), concludiamo: *Le superficie di* S_n ($n \geq 5$) *della specie* Φ, *cioè imagini di equazioni lineari di* 2° *ordine alle derivate parziali, son le sole superficie per le quali la* V_4 *luogo dei piani tangenti è tale da avere in tutti i punti di ciascuno di quei piani un* S_4 *tangente fisso.*

27. Così una V_4, luogo dei piani tangenti ad una superficie, ammette *in generale* (n. 25) ∞^3 S_4 tangenti, e solo ∞^2 quando la data superficie è della specie Φ (senz'essere una superficie sviluppabile). Rimane però la questione, se anche per altre superficie possa presentarsi il caso particolare di soli ∞^2 S_4.

Assumendo di nuovo S_5 come spazio ambiente, la superficie dovrà esser tale che nei punti di un suo piano tangente siano ∞^1 (e non uno solo, come nel n° preced^e^) gl'iperpiani tangenti alla V_4: essi formano allora un inviluppo di 2ª classe (n. 25). Avremo dunque una ∞^2 d'iperpiani di S_5, contenente ∞^2 inviluppi semplicemente infiniti di 2ª classe. La varietà duale in S_5 sarà (una ∞^2 di punti, cioè) *una superficie contenente* ∞^2 *coniche.*

Ora un teorema del sig. DARBOUX (21) ci prova che una tal superficie, quando non stia in spazi inferiori ad S_5, è necessariamente la nota superficie del 4° ordine di VERONESE (22). Qui appunto non è il caso di considerare una superficie di S_3 o di S_4: perchè i piani delle coniche starebbero anche in quello spazio; e per la dualità di S_5 si trasformerebbero in piani passanti per una retta fissa o per un punto fisso, che non possono comprendere gli ∞^2 piani tangenti di una superficie propriamente detta.

---

(21) *Sur le contact des courbes et des surfaces,* Bull. Soc. Math. de France, (2) 4, 1880. A p. 370 si trova la proposizione, secondo cui in S_3 le sole superficie contenenti ∞^2 coniche sono: le quadriche, le rigate cubiche e le superficie del 4° ordine di STEINER. Ne segue che se una superficie *immersa in* S_5 contiene ∞^2 coniche, projettandola da una retta generica su S_3 si deve ottenere precisamente una superficie di STEINER.

(22) Cfr. i lavori di VERONESE e SEGRE del 1884-85; oppure i capi 14° e 15° del trattato di E. BERTINI, *Introduzione alla Geometria projettiva degli iperspazi,* Pisa, Spoerri, 1907.

Quanto alla superficie di VERONESE, sappiamo che gli ∞^2 piani delle sue coniche si trasformano per dualità negli ∞^2 piani tangenti di una superficie, che è di nuovo una superficie di VERONESE. La V_4^3 luogo di quei piani tangenti (e anche dei piani delle coniche) ammette solo ∞^2 S_4 tangenti, ognun dei quali la tocca non lungo un piano tangente della superficie, ma bensì lungo il piano di una conica.

Oltre che per le superficie della specie Φ, si presenta solo per la superficie del 4° ordine di VERONESE *il fatto che la* V_4 *luogo dei piani tangenti ammetta soltanto* ∞^2 S_4 *tangenti* (*anzi che* ∞^3).

Generalizzazioni.

28. Come già fu accennato in principio (n. 1), parecchie delle cose esposte si possono subito estendere in due direzioni: sia cioè passando da equazioni differenziali di 2° ordine ad equazioni d'ordine superiore, sia passando da due variabili u, v, a tre o più.

Così si può considerare quella classe di superficie, per le quali avviene che la varietà degli S_3 osculatori in un punto x è immersa in un S_8 (*iperosculatore*), anzi che in un S_9 (cfr. n. 7); sicchè gl'iperpiani per quello S_8 (anzi che per un S_9) dànno (n. 8) sezioni iperpiane aventi in x un punto quadruplo. Son le superficie, le cui coordinate di punti si possono rappresentare con soluzioni $x^{(i)}(u, v)$ di un'equazione lineare alle derivate parziali di 3° ordine, come quella del n. 7, ossia (mettendo solo in evidenza i termini colle derivate terze):

$$(51)\qquad Ax_{111} + Bx_{112} + Cx_{122} + Dx_{222} + \dots = 0 .$$

Un ragionamento analogo a quello del n. 13 proverà che le terne di tangenti in un punto $x(u, v)$ alle sezioni iperpiane aventi ivi un punto triplo son tutte *apolari* od *armoniche* alla terna fissa

$$(52)\qquad Adv^3 - Bdudv^2 + Cdu^2dv - Ddu^3 = 0 .$$

Questa terna dà le tangenti delle nuove *linee caratteristiche* della superficie. — E procedendo come al n. 21 si troverà che la stessa terna fissa è anche apolare alle quaterne delle tangenti in x alle sezioni iperpiane che hanno x per punto quadruplo.

Particolare interesse avranno, come prima le superficie Φ appartenenti ad S_5, le superficie di questa nuova classe che sono immerse in S_9. Allora gli ∞^2 S_8 iperosculatori (v. sopra) costituiscono una varietà, che per dualità in S_9 corrisponde nuovamente ad una superficie della stessa classe.

Si estendano invece le ricerche nell'altro senso: prendendo cioè, non più una superficie, ma una V_k luogo del punto le cui coordinate $x^{(i)}$ sono date funzioni di k parametri $u_1, u_2, \dots, u_k$. Si consideri, ad esempio, il caso che queste funzioni siano integrali particolari di un'equazione di 2° ordine

$$\Sigma A_{pq} \frac{\partial^2 x}{\partial u_p \, \partial u_q} + \Sigma A_p \frac{\partial x}{\partial u_p} + Ax = 0 \,. \tag{53}$$

Allora accadrà che, entro la stella delle tangenti nel punto x alla V_k (stella che genera l'S_k tangente in x a questa varietà), i coni quadrici *luoghi* delle tangenti in x alle sezioni iperpiane che hanno x doppio (sezioni fatte da iperpiani generici passanti per l'S_k), e così pure i coni cubici *luoghi* delle tangenti a quelle particolari sezioni iperpiane che hanno x triplo, saranno tutti *apolari* od *armonici* ad una stessa forma fissa, cioè al cono *inviluppo* di 2ª classe

$$\Sigma A_{pq} \eta_p \eta_q = 0 \,, \tag{54}$$

che costituisce il *cono caratteristico* della data equazione (53).