Corrado Segre

Le coppie di elementi imaginari nella geometria proiettiva sintetica

Mem. R. Acc. Scienze Torino, Vol. **38** (1886), p. 3–24

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 208–236

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_208>

XXXVII.

LE COPPIE DI ELEMENTI IMAGINARI NELLA GEOMETRIA PROIETTIVA SINTETICA

« Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino »,
Serie II, Tomo XXXVIII, 1886, pp. 3-24.

> Aspirando la matematica a rimuovere eccezioni da regole ed a comprendere proposizioni differenti sotto uno stesso punto di vista, si trova spesso costretta ad estendere i concetti od a stabilirne dei nuovi, il che denota quasi sempre un progresso nella scienza.
>
> STAUDT (1).

È un fatto apparentemente strano che, malgrado la diffusione sempre maggiore che vanno acquistando i metodi puramente grafici dello STAUDT nella geometria proiettiva, la teoria degli elementi imaginari contenuta nei suoi *Beiträge zur Geometrie der Lage* rimanga affatto esclusa nell'insegnamento di quella scienza. Ciò almeno si deve pensare esaminando i vari trattati di geometria proiettiva sintetica che comparvero dopo quell'opera (tra i quali, per nominare solo qualcuno dei migliori, citerò quelli di STEINER-SCHRÖTER, REYE, CREMONA, THOMAE, HANKEL). Invero alcuni di essi escludono affatto la considerazione degli elementi imaginari, privandosi così di tutti i vantaggi che la loro introduzione porta in eleganza e generalità. Altri usano la locuzione *elementi imaginari* come un'espressione che viene introdotta non per significare un ente geometrico, ma solo per togliere eccezioni, dicendo ad esempio che due forme proiettive sovrapposte hanno due elementi uniti *reali od imaginari* solo per significare che possono anche non averne: in tal modo essi non possono considerare gli elementi imaginari come oggetto di studio e, se loro accade di ragionare su essi come si ragiona sugli elementi

(1) V. il principio della prefazione ai *Beiträge zur Geometrie der Lage.*

reali, cadono in contraddizione (2). Altri finalmente introducono gli elementi imaginari al modo di PONCELET e CHASLES dandone una rappresentazione reale *metrica*, introducendo ad esempio per definire una coppia di punti imaginari coniugati il loro punto medio ed il rettangolo delle loro distanze da un'origine fissa della loro retta; ma è chiaro che questo metodo, il quale se usato con rigore è buono per le relazioni metriche, non è più tale per le teorie grafiche della geometria proiettiva (3).

---

(2) Non mi pare che le poche pagine dedicate dal REYE (*Geometrie der Lage*, II. Aufl., 1. Abtheilung, p. 142 e seg.) agli elementi imaginari contengano, com'egli dice, i principii fondamentali della teoria di STAUDT. In fatti egli definisce gli elementi imaginari appunto come i due elementi uniti di una proiettività di forme di 1ª specie sovrapposte, la quale non abbia elementi uniti (reali). Tale definizione, che anche altri autori usano, mi pare assolutamente da rigettare, perchè contiene evidentemente in sè qualche cosa di assurdo, e nello stesso tempo introduce gli *elementi imaginari* come una locuzione che non sta per significare alcun ente geometrico. Essa rassomiglia alla seguente definizione che alcuni dànno di una coppia di punti imaginari coniugati di una retta: la coppia dei punti d'intersezione di questa con un circolo che non la incontri.

Ma non così faceva STAUDT. Questi definisce (*Beiträge*, n⁰ 116) un elemento imaginario (di 1ª specie) come un'involuzione ellittica su una forma fondamentale di 1ª specie insieme con uno dei due versi della forma; e si badi bene, è l'involuzione stessa (con quel verso) che egli chiama *elemento imaginario* e non già un suo elemento doppio, poichè per ipotesi essa non ha elementi doppi. Quindi l'elemento imaginario costituisce secondo STAUDT un vero ente geometrico (*reale*, benchè non sia della stessa specie di enti che l'elemento reale omonimo), intorno a cui è lecito ragionare e che si può quindi prendere come oggetto di studio.

(3) Nè quel metodo viene in generale usato con perfetto rigore. Così lo CHASLES (*Géométrie supérieure*, 2ᵉ éd., p. 55) dice che se il rettangolo suddetto supera il quadrato della distanza dell'origine fissa dal punto medio dato «... les deux points cherchés n'existent plus; on dit alors qu'ils sont imaginaires ». Ma così resta definito solo il significato della proposizione « i due punti sono imaginari » e non viene definita l'espressione « punti imaginari »; quindi non è logico introdurre questi punti, come si fa poi, nei ragionamenti e nei calcoli senza altre convenzioni.

Mi sia permesso riportare a questo proposito un altro passo della prefazione citata dello STAUDT. « Nella geometria analitica si chiama un punto *imaginario* se « le sue coordinate non sono tutte reali, e ciò pare assai semplice. Ma così non « si fa che trasportare il linguaggio dell'algebra alla geometria, e non si dimostra « affatto che un punto imaginario sia, similmente ad un punto reale, qualche cosa « d'indipendente dal sistema delle coordinate. Dove è, si domanderà ognuno, il « punto imaginario, se si fa astrazione dal sistema delle coordinate? Quindi in « tal modo la geometria si privava finora, per quanto riguardava gli elementi « imaginari, della intuizione che pel resto in lei si loda ed anche, a ragione, si « pretende ».

Aggiungerò finalmente che osservazioni analoghe a quelle che ho fatto ri-

La ragione per cui la teoria di STAUDT degli elementi imaginari non fu ancora introdotta nell'insegnamento della geometria proiettiva consiste probabilmente nella sua complicazione, la quale però in gran parte, bisogna ammetterlo col suo autore, è nella natura della cosa (4). Questa complicazione è prodotta dalla separazione di due elementi imaginari coniugati di una forma di 1ª specie, che STAUDT riuscì a fare aggiungendo ad un'involuzione ellittica che definirebbe la coppia di elementi i due *versi* della forma per dare rispettivamente i due elementi: idea bellissima e assai semplice nello stesso tempo, la quale corrisponde mirabilmente alla distinzione che si fa nell'analisi di due quantità complesse coniugate mediante un segno. Quella separazione e la considerazione continua dei versi nelle forme che essa richiede sono causa della notevole lunghezza della teoria: pure lo STAUDT dava ad essa tanta importanza che, non conoscendo ancora il modo di fare la separazione quando scrisse la *Geometrie der Lage*, non fece in questa che un breve cenno degli elementi imaginari.

Però se si osserva che in tutte le proposizioni di geometria proiettiva *elementare* quegli elementi non compaiono quasi mai separatamente, ma bensì a coppie di elementi imaginari coniugati, sorge spontaneo il pensiero che definendo solo queste coppie come involuzioni ellittiche e non esigendo la separazione si possano ottenere ancora quasi tutti i vantaggi di generalità raggiungendo nello stesso tempo assai

---

guardo ai modi con cui ordinariamente s'introducono gli elementi imaginari valgono per gli elementi all'infinito (punti, rette e piano). Il solo modo rigoroso d'introdurre ad esempio i *punti all'infinito* come enti geometrici, sì da poterne far uso nei ragionamenti, è di definirli non già come punti d'intersezione di rette parallele, cioè di rette che non hanno punti d'intersezione (come fanno in sostanza quasi tutti gli autori), ma bensì come sinonimo di *direzioni*, oppure, se si vuole, di *stelle di rette parallele.* La considerazione che si suol usare del fatto che quando due rette di un piano tendono a diventar parallele il loro punto d'intersezione s'allontana indefinitamente non può servire che per giustificare la scelta della locuzione *punto all'infinito,* ma non per definirla, se si vuole, come si deve volere (lo ripeterò ancora), che essa significhi un ente geometrico. Del resto si può vedere con quanta cura vada fatta l'introduzione degli elementi all'infinito (argomento in cui persino lo STAUDT, scrittore accuratissimo, lascia qualche cosa a desiderare) nelle importanti *Vorlesungen über neuere Geometrie* del PASCH.

(4) « È nella natura della cosa che la teoria degli elementi imaginari, da cui « il campo della geometria viene notevolmente esteso ed in pari tempo lo sguardo « generale sui teoremi viene facilitato, esiga una certa minutezza nella trattazione. « Persino nella proposizione che una retta è determinata da due punti vi sono « già sei casi da considerare ». (STAUDT, loc. cit.).

maggior semplicità. E ciò appunto accade, come io qui mi propongo di mostrare: e si ottiene una teoria rigorosa e semplicissima delle coppie di elementi imaginari, tale che si può esporre in qualsiasi corso di geometria proiettiva sintetica (5). La base del mio metodo consiste nella considerazione della trasformazione di proiettività mediante altre proiettività, considerazione assai feconda e di cui a mio avviso non fu ancor riconosciuta tutta l'utilità. Essa mi permise in particolare di dimostrare certe proposizioni sulle proiettività e sulle involuzioni nelle forme di 1ª specie col puro ragionamento su queste forme, mentre finora esse non si erano dimostrate che col calcolo o con costruzioni sulle coniche (6). Introdotta anche nella teoria di STAUDT essa potrebbe semplificarla in alcuni punti.

Ripeterò ancora del resto che il mio lavoro, occupandosi soltanto delle *coppie* di elementi imaginari coniugati, non ha in alcun modo lo scopo di sostituire l'ammirabile opera di STAUDT, neppure in parte. E se nel metodo che userò parmi vi sia qualche novità, lo stesso non dirò per i risultati qui esposti, i quali anzi sono tutti noti. Esposte le proposizioni grafiche principali relative alle coppie di elementi imaginari nelle forme fondamentali di 1ª specie, ne ho fatto varie applicazioni, ad esempio alla teoria metrica delle coppie stesse, alle coniche ed in particolare all'esagrammo di PASCAL, al teorema di CARNOT, a quello di STURM, ecc., per mostrare che la trattazione che propongo si può usare in tutto un corso di geome-

(5) Fu appunto pel corso di Geometria proiettiva che ero incaricato di fare quest'anno nella Università di Torino che imaginai questo metodo. Il chiar. prof. A. SANNIA introduce pure questa teoria nelle *Lezioni di Geometria proiettiva* che egli sta publicando (Napoli, Pellerano): di ciò e della corrispondenza che intorno ad essa abbiamo avuto e che non mi fu certo inutile nel pensare questo lavoro gli faccio qui i miei ringraziamenti. Appunto grazie alla publicazione di quel trattato posso qui risparmiarmi di dare alla mia esposizione un carattere affatto elementare, posso cioè omettere di entrare in dettagli troppo minuti, e permettermi invece alcune considerazioni e notazioni che forse non si addirebbero ad un corso di lezioni.

(6) Debbo fare eccezione per la *Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden* del sig. A. WIENER (Darmstadt, 1885), opuscolo che venni a conoscere solo dopo scritto il presente lavoro, e che ha vari punti di contatto colla prima parte di questo, come avrò cura di rilevare man mano che quelli si presenteranno.

Intorno alla teoria geometrica degli elementi imaginari non ho citato altri lavori che l'opera di STAUDT, benchè parecchi ve ne siano (come quelli di AUGUST, KLEIN, LÜROTH, ecc.) che a quella teoria si riferiscono; e ciò perchè nessuno, ch'io sappia, ha relazioni intime col mio scopo.

tria proiettiva e non soltanto nella teoria della proiettività nelle forme di 1ª specie.

Coppie armoniche. — Involuzioni.

1. È nota dalla teoria generale delle operazioni ed in particolare delle sostituzioni una proposizione che si può enunciare sotto la forma seguente:

Se due corrispondenze o trasformazioni univoche $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1$ in varietà qualunque sono tali che l'una di esse $\mathcal{P}$ sia trasformata in se stessa dall'altra $\mathcal{P}_1$, la relazione sarà reciproca, cioè anche $\mathcal{P}_1$ sarà trasformata in se stessa da $\mathcal{P}$. In tal caso il prodotto di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_1$ è commutativo, vale a dire la trasformazione che si ottiene applicando prima $\mathcal{P}$ e poi $\mathcal{P}_1$ è la stessa che si otterrebbe applicando prima $\mathcal{P}_1$ e poi $\mathcal{P}$; viceversa, se questo accade, ciascuna delle due trasformazioni $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1$ è trasformata in se stessa dall'altra. Due tali trasformazioni si dicono perciò *permutabili*.

La dimostrazione di questa proposizione è semplicissima. Se un elemento qualunque A è trasformato da $\mathcal{P}$ in A', e se A, A' sono trasformati da $\mathcal{P}_1$ rispettivamente in A_1, A'_1, allora dall'ipotesi che $\mathcal{P}$ sia trasformata in se stessa da $\mathcal{P}_1$ segue che anche A_1, A'_1 saranno corrispondenti in $\mathcal{P}$. Quindi una coppia qualunque AA_1 di elementi corrispondenti in $\mathcal{P}_1$ sarà trasformata da $\mathcal{P}$ in $A'A'_1$, ossia in un'altra tale coppia, vale a dire $\mathcal{P}_1$ sarà trasformata in se stessa da $\mathcal{P}$. E la trasformazione risultante dall'eseguire successivamente $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_1$, cioè il *prodotto* $\mathcal{P}\mathcal{P}_1$, farà corrispondere ad un elemento qualunque A lo stesso elemento A'_1 che gli fa corrispondere il prodotto $\mathcal{P}_1\mathcal{P}$. L'inverso è pure evidente (7).

---

(7) Metto qui sul principio questo teorema appartenente alla teoria delle trasformazioni perchè esso ci sarà utile nel seguito, ed anche per notare che quantunque esso occorra spesso nelle ricerche geometriche si suole evitare senza ragione di basarsi su esso, rifacendone invece in ogni caso particolare la dimostrazione. Lo s'incontra ad esempio nelle ricerche sulle omografie che trasformano in se stessa una data quadrica, od un dato complesso lineare, sulle quadriche polari reciproche di se stesse rispetto ad altre quadriche od a complessi lineari, ecc. ecc. — Nella teoria delle sostituzioni lo si dimostra colle operazioni sui simboli così. L'ipotesi che $\mathcal{P}$ sia trasformata in se stessa da $\mathcal{P}_1$ è espressa da: $\mathcal{P}_1^{-1}\,\mathcal{P}\,\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$; di qui moltiplicando a sinistra per $\mathcal{P}_1$ segue: $\mathcal{P}\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1\,\mathcal{P}$, cioè la commutatività del prodotto. Viceversa da quest'ultima uguaglianza moltiplicando a sinistra per $\mathcal{P}_1^{-1}$ o per $\mathcal{P}^{-1}$ seguono le uguaglianze: $\mathcal{P}_1^{-1}\,\mathcal{P}\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$, $\mathcal{P}^{-1}\,\mathcal{P}_1\,\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ le quali esprimono che ciascuna delle $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1$ è trasformata in se stessa dall'altra.

2. In una forma geometrica fondamentale di 1ª specie un'involuzione ellittica verrà anche chiamata *coppia di elementi imaginari*, od anche *coppia di elementi doppi (imaginari)* della stessa involuzione (il che è lecito perchè non avendo l'involuzione ellittica *elementi doppi* nel senso primitivo della parola, si può dare a questa un significato nuovo; l'aggettivo *imaginari* impedirà di confondere i due significati). — Tali denominazioni s'introducono per togliere negli enunciati di teoremi relativi ad involuzioni le distinzioni di casi prodotte dal fatto che nella considerazione delle involuzioni iperboliche o paraboliche queste si possono sostituire colle coppie dei loro elementi doppi (*reali*), mentre ciò non si sarebbe potuto fare per le involuzioni ellittiche se non si dava per esse una nuova definizione di coppie d'elementi doppi (*imaginari*).

Ma introdotta così questa nuova specie di coppie d'elementi bisogna, per poterne far uso, definire le relazioni che esse possono avere tra di loro e colle coppie reali (*). Tali definizioni converrà siano fatte in modo che esprimano proprietà vere anche se le coppie considerate sono tutte reali.

3. La prima relazione tra elementi che si suol considerare nella geometria di posizione s'incontra nei gruppi armonici. Consideriamo due coppie reali armoniche AB, CD ed esprimiamo la loro relazione sostituendo ad esse le involuzioni che le hanno rispettivamente per coppie di elementi doppi (o, come diremo più brevemente, *relative* ad esse) e che indicheremo rispettivamente con AB e CD. È chiaro che quella relazione consiste in ciò che queste due involuzioni sono permutabili, poichè l'involuzione AB, ad esempio, trasforma C e D rispettivamente in D e C, e quindi l'involuzione CD è trasformata in se stessa dalla AB. Viceversa se due involuzioni non ellittiche distinte sono permutabili, le coppie dei loro elementi doppi sono armoniche. — Ciò premesso:

Due coppie distinte qualunque diconsi armoniche se le loro rispettive involuzioni sono permutabili.

Questo enunciato, che fu dimostrato se le due coppie sono entrambe reali, servirà per definizione nel caso contrario. Due involuzioni distinte permutabili si diranno anche *armoniche*, come le relative coppie.

(*) Nella presente Memoria le frasi «coppia reale», «conica reale» significano «coppia di punti reali», «conica a punti reali»; nei lavori successivi un ente si chiamerà invece «reale» quando coincide col suo coniugato (N. d. R.).

Di due coppie armoniche una almeno dev'essere reale; cioè due involuzioni armoniche $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_1$ non possono essere entrambe ellittiche. In fatti se ad un elemento qualunque A sono coniugati A' in $\mathfrak{I}$ e A_1 in $\mathfrak{I}_1$, poichè $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{I}_1$ sono permutabili sarà ad A' coniugato in $\mathfrak{I}_1$ lo stesso elemento A_1' che ad A_1 è coniugato in $\mathfrak{I}$; e le due involuzioni $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{I}_1$ saranno determinate rispettivamente dalle coppie di elementi coniugati AA', A_1A_1' e AA_1, $A'A_1'$. Ora dei tre modi di dividere in coppie 4 elementi uno solo conduce a coppie che si separano, cioè a coppie di elementi coniugati in un'involuzione ellittica.

4. Se due coppie reali sono armoniche, ciascuna è una coppia di elementi coniugati nell'involuzione relativa all'altra. Se una coppia reale ed una coppia imaginaria sono armoniche, la coppia reale è una coppia di elementi coniugati nell'involuzione ellittica relativa alla coppia imaginaria, giacchè essa è trasformata in se stessa da quest'involuzione ellittica. Anche gl'inversi sono evidenti. Si vede dunque che è una proprietà caratteristica delle coppie (reali) di elementi coniugati in una involuzione di qualunque specie quella di essere armoniche alla coppia di elementi doppi di questa; ciò conduce alla seguente definizione di *coppia imaginaria di elementi coniugati* di un'involuzione:

Dicesi che una coppia imaginaria qualunque appartiene ad un'involuzione, ovvero è una coppia di elementi coniugati in questa, quando essa è armonica alla coppia degli elementi doppi dell'involuzione (cioè quando la relativa involuzione ellittica è permutabile con questa).

E da ciò che si è visto alla fine del n^0 precedente segue che: *Un'involuzione ellittica (o parabolica) contiene soltanto coppie reali; un'involuzione iperbolica contiene invece infinite coppie imaginarie (le quali sono le coppie di elementi doppi delle involuzioni ellittiche contenenti la coppia degli elementi doppi dell'involuzione iperbolica).*

5. Si sa che due involuzioni distinte $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_1$, le quali non siano entrambe iperboliche, hanno una determinata coppia reale comune [8]: d'altronde esse non possono certo in tal caso aver comune una coppia

---

[8] Ciò si prova assai facilmente se una sola delle $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_1$ è ellittica; ma se entrambe sono ellittiche si ricorreva finora (se non erro) per dimostrarlo alla rappresentazione su una conica, od alla teoria metrica. Invece si può darne anche in tal caso una dimostrazione la quale non faccia uso che delle proposizioni grafiche più elementari relative alle forme proiettive di 1ª specie (V. p. 95 delle *Lezioni* citate del prof. SANNIA).

imaginaria (n^0 4). Se poi $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_1$ sono entrambe iperboliche, una coppia ad esse comune sarà coppia di elementi doppi dell'involuzione contenente le coppie di elementi doppi di $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_1$; sicchè anche allora vi è una sola coppia comune, e questa sarà imaginaria o reale secondo che quelle coppie di elementi doppi di $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_1$ si separano o no. Dunque: *due involuzioni distinte qualunque hanno sempre comune una sola coppia, reale od imaginaria; ossia vi è sempre una ed una sola involuzione (o coppia di elementi) armonica a due involuzioni (o coppie) distinte date.*

6. Siano in particolare $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_1$ due involuzioni armoniche: abbiamo già notato (n^0 3) che, scelto ad arbitrio un elemento A della forma, quelle involuzioni si possono determinare con coppie (reali) di elementi coniugati nel seguente modo:

$$\mathfrak{I} \qquad (AB, CD),$$
$$\mathfrak{I}_1 \qquad (AC, DB).$$

Allora l'involuzione $\mathfrak{I}_2$ determinata dalle coppie:

$$\mathfrak{I}_2 \qquad (AD, BC)$$

sarà evidentemente l'unica involuzione armonica a quelle due. Scelti ad arbitrio 4 elementi $ABCD$ della forma è chiaro che sempre le 3 involuzioni $\mathfrak{I}(AB, CD)$, $\mathfrak{I}_1(AC, DB)$, $\mathfrak{I}_2(AD, BC)$ da essi determinate sono mutuamente permutabili e che ciascuna di esse è il prodotto delle altre due. Ma noi vediamo ora che viceversa data una terna $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ di involuzioni (o coppie) mutuamente armoniche, essa si può ottenere da infinite quaterne di elementi raggruppati in coppie in quella maniera: vale a dire, scelto ad arbitrio un elemento A della forma e determinandone i coniugati B, C, D rispettivamente in $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$, saranno CD, DB, BC ancora coppie rispettivamente di $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$. — Si ottengono così brevemente le principali proprietà di un fascio sizigetico di forme binarie biquadratiche [9].

---

[9] Nel calcolo coi simboli rappresentanti le proiettività ed i loro prodotti (calcolo che permette di dare ai ragionamenti su quelle una forma più concisa) la proprietà che caratterizza l'involuzione tra le proiettività è che il suo quadrato è l'identità, ossia 1. Consideriamo due involuzioni permutabili $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_1$ e diciamone $\mathfrak{I}_2$ il prodotto, sarà:

$$\mathfrak{I}^2 = 1, \quad \mathfrak{I}_1^2 = 1, \quad \mathfrak{I}\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_1\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_2.$$

Ne segue:

$$\mathfrak{I}_2^2 = (\mathfrak{I}\mathfrak{I}_1)(\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}\mathfrak{I} = 1;$$

Coppia di elementi uniti di una proiettività. Teoremi diversi sulle proiettività.

7. Consideriamo una proiettività qualunque $\mathcal{P}$, la quale non sia involutoria, e proponiamoci di cercare se vi è una involuzione permutabile ad essa. A tal fine indichiamo anzitutto con A, α due elementi qualunque, dei quali siano rispettivamente A', α' i corrispondenti in $\mathcal{P}$ ed A_1, α_1 i corrispondenti nella proiettività inversa di $\mathcal{P}$; sarà:

$$A\,\alpha\,A_1\,\alpha_1 \,\overline{\wedge}\, A'\,\alpha'\,A\,\alpha \,\overline{\wedge}\, A\,\alpha\,A'\,\alpha' ,$$

e quindi:

$$A\,\alpha\,A_1\,A' \,\overline{\wedge}\, A\,\alpha\,\alpha_1\,\alpha' . \tag{1}$$

Se ora supponiamo che per α si prenda il coniugato di A in un'involuzione $\mathcal{I}$ permutabile a $\mathcal{P}$, dovranno essere coniugati in $\mathcal{I}$ anche $A'\,\alpha'$ ed $A_1\,\alpha_1$, e quindi:

$$A\,\alpha\alpha_1\alpha' \,\overline{\wedge}\, \alpha\,AA_1\,A' ; \tag{2}$$

sicchè confrontando colla (1):

$$A\,\alpha\,A_1\,A' \,\overline{\wedge}\, \alpha\,AA_1\,A' , \tag{3}$$

cioè α sarà il coniugato armonico di A rispetto ad A_1 e A'. Dunque non vi può essere che una sola involuzione $\mathcal{I}$ permutabile a $\mathcal{P}$, poichè vediamo che essa viene costruita mediante $\mathcal{P}$ in un modo ben determinato.

Viceversa se nella (1) α rappresenta il coniugato armonico di A rispetto ad A' e A_1, avrà luogo la (3), che colla (1) dà la (2). Ma questa prova l'esistenza di un'involuzione contenente le coppie $A\alpha$, $A_1\alpha_1$, $A'\alpha'$, la quale per conseguenza muta la proiettività $\mathcal{P}$ in cui si corrispondono per ipotesi A_1A, AA', $\alpha_1\alpha$, $\alpha\alpha'$ in una proiettività in cui si corrispondono $\alpha_1\alpha$, $\alpha\alpha'$, A_1A, AA', cioè nella stessa $\mathcal{P}$, vale a dire è permutabile a $\mathcal{P}$. Dunque:

$$\mathcal{I}\,\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}\,(\mathcal{I}\,\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_1 , \qquad \mathcal{I}_2\,\mathcal{I} = (\mathcal{I}_1\,\mathcal{I})\,\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 ;$$

$$\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1(\mathcal{I}_1\mathcal{I}) = \mathcal{I} , \qquad \mathcal{I}_2\mathcal{I}_1 = (\mathcal{I}\,\mathcal{I}_1)\,\mathcal{I}_1 = \mathcal{I} ;$$

cioè $\mathcal{I}_2$ sarà un'involuzione ed inoltre sarà permutabile con $\mathcal{I}$, dando per prodotto $\mathcal{I}_1$, e permutabile con $\mathcal{I}_1$, dando per prodotto $\mathcal{I}$. Si ritrovano così i risultati del n^0 6. — Il sig. WIENER nel lavoro citato (n^0 55) definisce in sostanza due involuzioni *armoniche* appunto quando il loro prodotto è pure un'involuzione; mentre dimostra (ai n^i 57, 58) quella proprietà di due involuzioni armoniche che io invece ho scelta come definizione.

Se data una proiettività qualunque $\mathcal{P}$ in una forma di 1ª specie si prende di ciascun elemento il coniugato armonico rispetto ai due elementi che gli corrispondono in $\mathcal{P}$ e nella sua inversa, esso gli sarà coniugato in un'involuzione $\mathcal{J}$ ben determinata (10)*; se $\mathcal{P}$ non è involutoria, $\mathcal{J}$ è la sola involuzione che sia permutabile con $\mathcal{P}$, cioè trasformata in se stessa da $\mathcal{P}$* (11).

La involuzione $\mathcal{J}$ così costruita si dirà l'*involuzione unita* della proiettività $\mathcal{P}$. Se questa è un'involuzione, quella costruzione mostra che essa stessa sarà la propria involuzione unita; ed in tal caso oltre ad essa sappiamo che vi sono infinite involuzioni permutabili con essa.

Escludendo ancora il caso in cui $\mathcal{P}$ sia un'involuzione (nel quale del resto le osservazioni seguenti varranno ancora in causa dell'identità di $\mathcal{P}$ con $\mathcal{J}$), è chiaro che se la involuzione unita $\mathcal{J}$ è iperbolica, i suoi elementi doppi (dovendo corrispondere a loro stessi in $\mathcal{P}$) saranno gli elementi uniti di $\mathcal{P}$; e viceversa se $\mathcal{P}$ ha due elementi uniti, questi saranno doppi per un'involuzione permutabile a $\mathcal{P}$, cioè appunto per $\mathcal{J}$. Quindi se $\mathcal{J}$ fosse parabolica, $\mathcal{P}$ avrebbe un solo elemento unito coincidente coll'elemento doppio di $\mathcal{J}$; e viceversa se $\mathcal{P}$ ha un solo elemento unito $\mathcal{J}$ è parabolica con questo per elemento doppio. Finalmente accadrà simultaneamente che $\mathcal{P}$ sia priva di elementi uniti e che $\mathcal{J}$ sia ellittica.

8. Ciò posto: *coppia di elementi uniti di una proiettività qualunque è la coppia degli elementi doppi, reali (e distinti o coincidenti) od imaginari della sua involuzione unita.* Con ciò esprimiamo le ultime cose dette, se la proiettività ha elementi uniti nel senso finora usato (cioè, come diremo d'or innanzi, elementi uniti *reali*), e definiamo invece, nel caso che non ne abbia, che cosa si dovrà inten-

---

(10) Se $\mathcal{P}$ ha elementi uniti M, N, distinti o coincidenti, questa proposizione si può dimostrare per una via affatto diversa, notando che allora, per un teorema noto sulle proiettività aventi elementi uniti (che al nº 9 verrà esteso a proiettività qualunque), $MN, AA, A_1 A'$ saranno tre coppie di un'involuzione, sicchè A ed il suo coniugato armonico α rispetto ad $A_1 A'$ saranno coniugati nell'involuzione $\mathcal{J}$ avente M, N per elementi doppi. Se questi coincidono, quest'involuzione $\mathcal{J}$ diventa parabolica, e allora vale ancora questa dimostrazione, mentre cesserebbe di valere quella sopra esposta, la quale supponeva essenzialmente che $\mathcal{J}$ non fosse parabolica.

(11) Fatta eccezione, nel caso in cui $\mathcal{P}$ ha due elementi uniti distinti, per le involuzioni paraboliche aventi rispettivamente in questi gli elementi singolari.

dere con *elementi uniti imaginari* (nient'altro cioè, in sostanza, che l'involuzione unita).

L'involuzione unita ha molta importanza nello studio delle proiettività (12). Così, siccome la sua definizione serve a costruirla linearmente quando la proiettività è data mediante tre coppie di elementi corrispondenti, e d'altra parte essa è iperbolica, parabolica od ellittica secondo che la proiettività ha elementi uniti reali e distinti, o coincidenti, od imaginari, si potrà con sole costruzioni lineari giudicare quale di questi tre casi presenta la proiettività (13).

Abbiansi tre elementi qualunque A, B, C e si consideri la proiettività ciclica di 3^0 grado avente per un ciclo (ABC). Nella sua involuzione unita saranno coniugati A ed il suo coniugato armonico α rispetto a BC, B e il suo coniugato armonico β rispetto a CA, C e il suo coniugato armonico γ rispetto ad AB. L'involuzione $(A\alpha, B\beta, C\gamma)$ così costruita trasforma poi i 3 gruppi armonici considerati nei seguenti gruppi, i quali quindi saranno pure armonici: $A\alpha\beta\gamma$, $B\beta\gamma\alpha$, $C\gamma\alpha\beta$; inoltre $(\alpha\beta\gamma)$ sarà un altro ciclo della stessa proiettività ciclica. Si trovano così immediatamente le proprietà geometriche principali della cubica binaria.

---

(12) Il sig. WIENER nell'opuscolo citato riconobbe prima di me l'importanza della considerazione dell'involuzione unita di una proiettività e ne fece con altre quasi tutte le applicazioni dei n^i seguenti fino al 14. Però il suo metodo è diverso dal mio e gli dà una dimostrazione dell'esistenza di quell'involuzione notevolmente più complicata che la mia (V. loc. cit. §§ 7 e seg.).

Simbolicamente l'involuzione unita $\mathfrak{J}$ di una proiettività $\mathfrak{P}$ non involutoria è definita dalla relazione $\mathfrak{J}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\mathfrak{J}$.

Se $\mathfrak{P}$ è il prodotto $\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2$ di due involuzioni $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, allora l'involuzione $\mathfrak{J}$ armonica a queste due, trasformandole rispettivamente in loro stesse, trasformerà anche il loro prodotto $\mathfrak{P}$ in se stesso, vale a dire sarà appunto l'involuzione unita di $\mathfrak{P}$. Od operando sui simboli, poichè per ipotesi $\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_1\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_2\mathfrak{J}$, sarà $\mathfrak{J}\mathfrak{P} = \mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_1\mathfrak{J}\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2\mathfrak{J} = \mathfrak{P}\mathfrak{J}$. — Questo teorema fornisce una costruzione lineare dell'involuzione armonica a due date. La dimostrazione esposta non varrebbe più quando $\mathfrak{P}$ fosse essa stessa un'involuzione, cioè quando $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ fossero armoniche; ma appunto in tal caso fu già dimostrato al n^0 6 che il prodotto di queste è l'involuzione armonica ad entrambe. — Veggasi un'altra dimostrazione in WIENER, loc. cit. n^0 61.

(13) Trattisi di una punteggiata, su cui una proiettività $\mathfrak{P}$ abbia per punti limiti J e I', ed al punto medio O di questi faccia corrispondere O'. Allora sarà ∞O una coppia dell'involuzione unita e gli elementi $I'O'$ a quelli rispettivamente corrispondenti in $\mathfrak{P}$ formeranno un'altra coppia. Quindi vi saranno o no punti uniti reali secondo che (quelle due coppie non si separano o si separano cioè) O sta fuori o dentro al segmento finito $I'O'$; e gli elementi uniti stessi saranno i punti doppi dell'involuzione avente O per punto centrale ed $I'O'$ per punti coniugati: proposizioni note, che si sogliono stabilire con calcoli.

9. Sia $\mathcal{P}$ una proiettività qualunque, in cui si corrispondano gli elementi AA', BB', CC', DD', ..., e sia $\mathfrak{J}$ la sua involuzione unita. Sarà facile, senza costruire questa, ottenere tutte le involuzioni che le sono armoniche, cioè tutte le involuzioni contenenti la coppia degli elementi uniti di $\mathcal{P}$. In fatti consideriamo l'involuzione (AB', BA'); se s'indicano con C e D' due elementi coniugati qualunque di essa, saranno pure coniugati D e C', giacchè in causa di $\mathcal{P}$ si ha $ABCD \barwedge A'B'C'D'$, ossia $ABCD \barwedge B'A'D'C'$ [14]. Ne segue che quell'involuzione trasforma $\mathcal{P}$ (in cui si corrispondono AA', BB', CC', DD') in una proiettività in cui si corrispondono $B'B$, $A'A$, $D'D$, $C'C$, cioè nella inversa di $\mathcal{P}$. Ma $\mathcal{P}$ e la sua inversa hanno evidentemente la stessa involuzione unita; dunque $\mathfrak{J}$ è trasformata in se stessa dall' involuzione considerata (AB', BA'), ossia è armonica a questa.

Le involuzioni di questo tipo (AB', BA') sono infinite, ed in ognuna di esse una coppia, p. e. AB', è arbitraria e la determina. Ma un'involuzione armonica ad $\mathfrak{J}$ è individuata dandone inoltre una coppia (n⁰ 5): dunque le involuzioni di quel tipo costituiscono *tutte* le involuzioni armoniche ad $\mathfrak{J}$. Giungiamo così al seguente risultato [15].

Le involuzioni armoniche all'involuzione unita $\mathfrak{J}$ della proiettività $\mathcal{P}$ sono tutte quelle del tipo $(\mathrm{AB}', \mathrm{BA}')$, *cioè tutte quelle che trasformano $\mathcal{P}$ nella sua inversa. In altri termini la coppia degli elementi uniti di $\mathcal{P}$ appartiene ad ogni involuzione del tipo* $(\mathrm{AB}', \mathrm{BA}')$ *e solo a queste.* Tutte queste infinite involuzioni armoniche ad $\mathfrak{J}$ si possono anche con vantaggio chiamare le involuzioni *armoniche* a $\mathcal{P}$.

In particolare, date tre coppie di elementi qualunque AA', BB', CC', vediamo che le tre involuzioni (AB', BA'), (BC', CB'), (CA', AC') sono armoniche ad una stessa involuzione (unita per la proiettività

---

(14) Questo breve ragionamento prova più in generale che: *se per due proiettività esiste una quaterna di elementi distinti* $\mathrm{AB\,A'B'}$ *tali che siano corrispondenti nell'una* A *e* A', B *e* B', *nell' altra invece* A *e* B', B *e* A', *esisteranno infinite tali quaterne, sicchè se di un elemento qualunque* C *sono* C' *e* D' *i corrispondenti rispettivamente nelle due proiettività, il corrispondente di* D' *nell'inversa della* 1ª *ed il corrispondente di* C' *nell'inversa della* 2ª *coincideranno in uno stesso elemento* D. Due tali proiettività si diranno *armoniche*: la loro relazione si può anche definire dicendo che l'una di esse è il prodotto dell'altra e di un'involuzione (analiticamente, dicendo che il loro invariante simultaneo bilineare s'annulla). — Lo studio delle proiettività armoniche e dei fasci di proiettività formerà oggetto di una mia Nota che verrà pubblicata nel vol. 100 del Journal für Mathematik.

(15) WIENER loc. cit. n⁰ 59.

determinata da quelle coppie di elementi corrispondenti), cioè hanno comune una coppia.

10. *Una proiettività è individuata dalla sua coppia di elementi uniti, cioè dall'involuzione unita, e da due elementi corrispondenti* (16). In fatti sia $\mathcal{J}$ l'involuzione unita data e siano A, A' i due dati elementi corrispondenti; siano poi α e α' i coniugati di A e A' nell'involuzione $\mathcal{J}$ e si costruisca l'elemento A_1 coniugato armonico di A' rispetto ad $A\alpha$. Nella proiettività richiesta dovranno corrispondersi A_1A, AA', $\alpha\alpha'$. Viceversa la proiettività determinata da queste tre coppie di elementi corrispondenti ha per involuzione unita l'involuzione in cui sono coniugati (pel modo con cui si è costruito A_1) A ed α, ed anche i loro corrispondenti nella proiettività stessa A' ed α', cioè la involuzione $\mathcal{J}$.

Sono dunque infinite le proiettività aventi una data involuzione unita.

11. Abbiamo già fatto la ricerca delle involuzioni permutabili a proiettività (involutorie o no): occupiamoci ora più in generale di proiettività qualunque mutuamente permutabili. Se due proiettività (non entrambe involutorie) sono permutabili è evidente che esse avranno comune la coppia degli elementi uniti, poichè l'una di esse (non involutoria) deve trasformare l'involuzione unita dell'altra nell'involuzione stessa, cioè deve pure averla per involuzione unita. Orbene viceversa: *due proiettività qualunque aventi comune l'involuzione unita sono sempre permutabili.*

Siano in fatti $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_1$ due proiettività aventi comune l'involuzione unita $\mathcal{J}$. Di un elemento qualunque A siano A' il corrispondente in $\mathcal{P}$ e A_1 il corrispondente in $\mathcal{P}_1$; di A_1 il corrispondente in $\mathcal{P}$ sia A_1' e di A' il corrispondente in $\mathcal{P}_1$ sia A''. Allora in causa di $\mathcal{P}$ in cui si corrispondono AA', A_1A_1' sarà (n^0 9) $(A'A_1, AA_1')$ un'involuzione armonica ad $\mathcal{J}$; e in causa di $\mathcal{P}_1$ in cui si corrispondono AA_1, $A'A''$ sarà $(A'A_1, AA'')$ un'involuzione armonica ad $\mathcal{J}$. Ma queste due involuzioni armoniche ad $\mathcal{J}$ e aventi comune la coppia $A'A_1$ (che, essendosi scelto A ad arbitrio, non sarà la coppia degli elementi doppi di $\mathcal{J}$) dovranno coincidere: dunque A'' coinciderà con A_1'. Ciò prova appunto (n^0 1) che delle due proiettività $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1$ ciascuna è trasformata in se stessa dall'altra, cioè che esse sono permutabili.

---

(16) Loc. cit. n^0 41.

12. Dal teorema precedente si possono dedurre varie proposizioni importanti. Siano AA', BB' due coppie qualunqne di elementi corrispondenti di una proiettività $\mathcal{P}$), in cui sia $\mathcal{I}$ l'involuzione unita: la proiettività avente la stessa involuzione unita e determinata dalla coppia AB di elementi corrispondenti (n^0 10) avrà pure, in causa di quel teorema, $A'B'$ per elementi corrispondenti. Essa trasformerà dunque $\mathcal{I}$ (cioè la coppia di elementi uniti di $\mathcal{P}$), A, A' rispettivamente in $\mathcal{I}$ (cioè nella coppia stessa di elementi uniti), B, B'. Quindi possiamo dire (con un'estensione che si presenta naturalmente della locuzione *gruppi proiettivi* al caso di gruppi contenenti coppie imaginarie): *in una proiettività qualunque il gruppo formato dalla coppia degli elementi uniti e da due elementi corrispondenti qualunque rimane proiettivo ad un gruppo fisso se si fanno variare questi elementi corrispondenti* (17).

13. *Se nelle infinite proiettività* $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, ... *aventi una data involuzione unita, di due elementi qualunque* A, B *si prendono i corrispondenti* $A_1 A_2 A_3 \ldots$, $B_1 B_2 B_3 \ldots$, *sarà*

$$AA_1\, A_2\, A_3 \ldots \barwedge BB_1\, B_2\, B_3 \ldots$$

Invero si consideri quella tra le infinite proiettività nominate nella quale ad A corrisponde B; essendo essa permutabile a tutte (n^0 11), in essa ad A_1 corrisponderà B_1, ad A_2 corrisponderà B_2, ecc.

Se si osserva che le infinite proiettività considerate aventi una data involuzione unita sono a due a due inverse l'una dell'altra, è chiaro che quella stessa proposizione si potrà anche enunciare sotto la forma seguente, che dà un modo diretto di costruire le proiettività permutabili ad una data e generalizza quindi la costruzione vista dell'involuzione unita:

Data una proiettività qualunque $\mathcal{P}$, *se di un elemento variabile* A *sono* A' *e* A_1 *i corrispondenti in* $\mathcal{P}$ *e nella sua inversa e si costruisce l'elemento* α *tale che il gruppo* $\alpha AA'A_1$ *sia proiettivo ad un gruppo fisso,* A *ed* α *si corrisponderanno in una proiettività determinata permutabile con* $\mathcal{P}$; *e cambiando il gruppo fisso si ottengono così, se* $\mathcal{P}$ *non è involutoria, tutte le proiettività permutabili con* $\mathcal{P}$(18).

---

(17) Considerando l'involuzione (AB', BA') armonica ad $\mathcal{I}$ (n^0 9) si sarebbe trovato invece che il gruppo formato dalla coppia degli elementi uniti e da A, A' è proiettivo al gruppo formato dalla stessa coppia e da B', B (non B, B'). Questi due risultati non sono però contradditori appunto perchè noi non consideriamo separatamente i due elementi uniti, ma la loro coppia.

(18) V. PASCH, loc. cit. p. 134.

14. Consideriamo tra le proiettività aventi una data involuzione unita $\mathcal{I}$ quella $\mathcal{P}$ in cui si corrispondono due elementi qualunque dati A , B . Fissiamo una coppia qualunque (reale od imaginaria) di $\mathcal{I}$ e diciamo B_1 il coniugato armonico di B rispetto ad essa ed A_1 il corrispondente di B_1 in $\mathcal{P}$: è facile vedere che A_1 sarà il coniugato armonico di A rispetto a quella stessa coppia di $\mathcal{I}$. Poichè, essendo per ipotesi AB e B_1A_1 due coppie di elementi corrispondenti in $\mathcal{P}$, sarà (AA_1 , BB_1) un'involuzione armonica ad $\mathcal{I}$; ma l'involuzione avente per elementi doppi la coppia considerata è pure armonica ad $\mathcal{I}$ e contiene pure, come quella, la coppia BB_1 (in causa della definizione di B_1): dunque queste due involuzioni coincidono ed A_1 sarà il coniugato armonico di A rispetto alla coppia considerata di $\mathcal{I}$. Facendo variare questa coppia di $\mathcal{I}$ senza però mutare A , B e quindi $\mathcal{P}$, abbiamo:

Data un'involuzione qualunque, se di due elementi arbitrari A *e* B *si prendono i coniugati armonici* $\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \mathrm{A}_3 \ldots$ *e* $\mathrm{B}_1 \mathrm{B}_2 \mathrm{B}_3 \ldots$ *rispetto alle varie coppie (reali od imaginarie) di quell'involuzione, si avranno due serie proiettive di elementi, sarà cioè:*

$$AB_1\, B_2\, B_3 \ldots \barwedge BA_1\, A_2\, A_3 \ldots$$

Le serie $A_1 A_2 A_3 \ldots$, $B_1 B_2 B_3 \ldots$ ecc. ottenute con quelle costruzioni si possono quindi definire *proiettive* all'involuzione data, poichè così vediamo che due serie proiettive nel senso detto ad una stessa involuzione sono proiettive tra di loro (19). E due involuzioni qualunque tra le cui coppie sia stabilita una corrispondenza si diranno *riferite proiettivamente* tra di loro, o semplicemente *proiettive*, se saranno riferite proiettivamente due forme rispettivamente proiettive ad esse.

15. I teoremi precedenti sull'involuzione unita di una proiettività e in generale sulle proiettività permutabili si possono dimostrare facilmente nel caso in cui la coppia degli elementi uniti sia imaginaria, sostituendo alla proiettività da cui si parte una rotazione (uguaglianza diretta) in un fascio di rette (o di piani), il che si sa esser sempre possibile. Si può allora provare direttamente con un ragio-

(19) È inutile aggiungere che perchè quelle serie siano sempre complete, cioè comprendano tutta la forma, è essenziale considerare anche, come abbiamo fatto, le coppie imaginarie dell'involuzione. — V., anche per questo n⁰, WIENER, loc. cit. n$^{\mathrm{i}}$ 72 e 74.

namento semplicissimo che le proiettività permutabili ad una rotazione (di un angolo non retto) sono le altre rotazioni: quindi la sola involuzione permutabile alla rotazione considerata sarà la rotazione di un retto, cioè la involuzione circolare. Questa sarà la involuzione unita comune a tutte le rotazioni e si verificano subito su essa la costruzione generale vista dell'involuzione unita di una proiettività qualunque, e quella delle involuzioni armoniche all'involuzione unita (che qui sono le simmetrie). Segando colla retta all'infinito e definendo per *coppia dei punti ciclici* del piano la coppia dei punti doppi imaginari dell'involuzione circolare all'infinito (cioè questa stessa involuzione), si ha che due fasci direttamente eguali di un piano determinano sulla retta all'infinito una proiettività avente per elementi uniti la coppia dei punti ciclici e che l'angolo di due rette non varia al variare di queste nel loro piano se il gruppo formato dai loro punti all'infinito colla coppia dei punti ciclici rimane proiettivo a se stesso (d'accordo col n^0 12). Ecc. ecc.

Le coppie di elementi imaginari nella teoria grafica delle coniche.

16. Nella teoria proiettiva delle coniche conviene introdurre fin dal principio la considerazione delle loro coppie di punti e di tangenti imaginarie; ma per poter far ciò con rigore bisogna definire bene che cosa s'intenda con tali espressioni. Definendo, come generalmente si fa, una curva di 2^0 ordine come l'ente generato da due fasci proiettivi di rette di un piano [20], una retta qualunque r di questo taglia quei fasci in due punteggiate proiettive: se la coppia dei punti uniti di queste è reale, essa costituisce evidentemente l'intersezione di r colla conica; ma se essa è imaginaria, r non taglia più la conica, e si può tuttavia definire quella coppia come *coppia imaginaria di punti della conica*, cioè come la coppia di punti imaginari d'intersezione di r con questa. Ciò appunto si suol fare; ma è singolare che non si pensa mai esser lecita la domanda, se al variare dei due fasci proiettivi generatori della serie dei punti (reali) della conica ed al variare per conseguenza delle due punteggiate

[20] È noto che STAUDT la definisce invece come il luogo dei punti che stanno sulle loro polari rispetto ad un sistema polare. Questa definizione meriterebbe forse di esser preferita nell'insegnamento della geometria di posizione a quella, usata finora quasi esclusivamente, su cui sopra mi baso.

proiettive su r non varierà la coppia degli elementi uniti imaginari di queste: in fatti che quella coppia non varia è evidente solo quando r taglia realmente la conica, ma non più se la coppia stessa è imaginaria. Senza riflettere a tale obbiezione si introduce poi il fatto non dimostrato che quella coppia di elementi uniti non varia nelle dimostrazioni di altri teoremi, come quello di DESARGUES. Così fa, ad esempio, lo CHASLES ([21]).

Ora si può togliere quella lacuna nel seguente modo, che contiene in sostanza una nuova dimostrazione, più completa delle ordinarie (in quanto tiene conto anche delle coppie di punti imaginari), del fatto che una curva di 2^0 ordine si può generare con fasci proiettivi scegliendo ad arbitrio su essa i centri di questi. Siano dati 5 punti di un piano $S S_1 S_2 A B$, e consideriamo la coppia di fasci proiettivi $S(S_2 AB)$, $S_1(S_2 AB)$ e la coppia $S(S_1 AB)$, $S_2(S_1 AB)$: esse determineranno su una retta arbitraria r del piano rispettivamente due proiettività che dico aver comune la coppia degli elementi uniti. Indicando con $r(SS_2, SA, \ldots)$ i punti d'intersezione di r colle rette SS_2, SA, ..., quelle due proiettività su r saranno determinate rispettivamente dalle coppie di elementi corrispondenti

$$r\left\{\begin{matrix} SS_2 \\ S_1S_2 \end{matrix}\right. , \quad \begin{matrix} SA \\ S_1A \end{matrix} , \quad \begin{matrix} SB \\ S_1B \end{matrix} ,$$

e dalle coppie

$$r\left\{\begin{matrix} SS_1 \\ S_2S_1 \end{matrix}\right. , \quad \begin{matrix} SA \\ S_2A \end{matrix} , \quad \begin{matrix} SB \\ S_2B \end{matrix} .$$

Quindi le loro coppie di elementi uniti sono (n^0 9) rispettivamente l'unica coppia comune alle involuzioni

$$r(S_1S_2, \quad SA; \quad SS_2, \quad S_1A),$$
$$r(S_1S_2, \quad SB; \quad SS_2, \quad S_1B),$$

e quella comune alle involuzioni

$$r(S_1S_2, \quad SA; \quad SS_1, \quad S_2A),$$
$$r(S_1S_2, \quad SB; \quad SS_1, \quad S_2B).$$

Ma queste ultime due involuzioni coincidono colle prime due, poichè i quadrangoli completi SS_1S_2A, SS_1S_2B mostrano l'esistenza delle

---

([21]) V. *Sections coniques*, pp. 9 e 17.

involuzioni

$$r(S_1S_2\,,\quad SA\,;\quad SS_2\,,\quad S_1A\,;\quad SS_1\,,\quad S_2A)\,,$$

$$r(S_1S_2\,,\quad SB\,;\quad SS_2\,,\quad S_1B\,;\quad SS_1\,,\quad S_2B)\,.$$

Dunque realmente le due proiettività considerate su r hanno la stessa coppia di punti uniti.

Con ciò è provato che nella curva di 2^0 ordine generata da due fasci proiettivi di centri S, S_1 si può sostituire ad S_1 un altro punto qualunque S_2 della curva senza che cambi la coppia dei punti, reali od imaginari, d'intersezione con una retta qualunque. Ne segue che si potranno cambiare i centri di entrambi i fasci, ecc.

17. Il teorema di DESARGUES in tutta la sua generalità segue ora immediatamente nel modo noto (ed in sostanza lo si trova già implicitamente nel ragionamento precedente); poichè se $ABCD$ sono 4 punti di una conica, le punteggiate proiettive, determinate su una retta r dai fasci proiettivi generatori della conica aventi per centri A, B, avranno per coppie di elementi corrispondenti $r\,(AC, BC\,; AD\,, BD)$ e quindi l'involuzione

$$r(AC\,,\quad BD\,;\quad AD\,,\quad BC)$$

conterrà la coppia, reale od imaginaria, di elementi uniti di quella proiettività su r, cioè la coppia comune ad r e alla conica.

Si può poi definire come involuzione di *punti coniugati* rispetto alla conica su una retta r l'involuzione unita che si è riconosciuto esser comune a tutte le proiettività determinate su r da fasci proiettivi generatori della conica, vale a dire l'involuzione avente per elementi doppi la coppia d'intersezione di r colla conica (per definizione di questa coppia, se essa è imaginaria). E allora segue pure immediatamente il teorema fondamentale della teoria della polarità: il luogo dei punti coniugati di un punto P rispetto alla conica è una retta. Poichè condotte per P due trasversali che taglino realmente la conica rispettivamente in A, B e C, D, la retta p congiungente i due punti diagonali diversi da P del quadrangolo completo $ABCD$ sarà tagliata da ogni retta r passante per P in un punto P' che è coniugato di P nell'involuzione di punti coniugati posta su r: invero P, P' saranno evidentemente i punti doppi dell'involuzione $r\,(AC\,, BD\,; AD\,, BC)$ e questa è armonica all'involuzione di punti coniugati. Ecc. ecc.

Non occorre aggiungere che colle proposizioni precedenti e le loro conseguenze converrà dare anche le proposizioni e le definizioni duali di coppia di rette imaginarie di un inviluppo di 2^a classe, di rette coniugate rispetto a questo, ecc.

18. Vi è un modo di dimostrare le proprietà dell'esagrammo di PASCAL che si collega colla nostra teoria e di cui quindi faremo qui un cenno. Se nello studio delle serie proiettive di punti su una conica si stabilisce il concetto del polo di un'involuzione direttamente, senza derivarlo dalla considerazione dell'asse di una proiettività, allora si può considerare la proposizione con cui abbiamo finito il n^0 9 come una dimostrazione (meno semplice, del resto, che altre note) del teorema di PASCAL per l'esagono semplice $AB'CA'BC'$ iscritto ad una conica, e le cui coppie di vertici opposti AA', BB', CC' si considerino come coppie di punti corrispondenti in una proiettività.

Lo studio della figura costituita dalle 60 rette di PASCAL relative ai 60 esagoni semplici aventi per vertici sei punti fissi di una conica coincide collo studio delle relazioni che passano tra le 60 proiettività determinate da tre coppie di elementi corrispondenti formate con sei elementi fissi. Come esempio dimostreremo in questo modo l'esistenza dei punti di STEINER e di KIRKMAN.

Siano 1 2 3 4 5 6 sei elementi qualunque di una forma di 1^a specie (p. e. punti di una conica), e consideriamo le due proiettività

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{matrix}\ , \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \end{matrix}\ .$$

Nell'involuzione armonica ad entrambe (cioè alle loro involuzioni unite) siano $1', 2', \ldots$ i coniugati di $1, 2, \ldots$: essa trasformerà (n^0 9) ciascuna delle due proiettività nella sua inversa sicchè la 1^a proiettività darà:

$$1\ 2\ 3\ 6'\ 4'\ 5' \ \overline{\wedge}\ 4\ 5\ 6\ 3'\ 1'\ 2' ,$$

e la 2^a:

$$1\ 2\ 3\ 6'\ 4'\ 5' \ \overline{\wedge}\ 5\ 6\ 4\ 2'\ 3'\ 1' .$$

Dunque confrontando

$$4\ 5\ 6\ 3'\ 1'\ 2' \ \overline{\wedge}\ 5\ 6\ 4\ 2'\ 3'\ 1' ,$$

e ripetendo questa proiettività nuova (ciclica):

$$4\ 5\ 6\ 3'\ 1'\ 2' \ \overline{\wedge}\ 6\ 4\ 5\ 1'\ 2'\ 3' ,$$

cosicchè sostituendo nella prima relazione si avrà:

$$1\ 2\ 3\ 6'\ 4'\ 5' \ \overline{\wedge}\ 6\ 4\ 5\ 1'\ 2'\ 3' .$$

Ora questa prova che la proiettività $1\,2\,3, 6\,4\,5$ è trasformata nella sua inversa dalla stessa involuzione considerata; cioè le tre proiettività

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \end{matrix}$$

sono armoniche ad una stessa involuzione [22].

Trasportata nel modo detto (e notando che se un'involuzione di punti di una conica è armonica ad una proiettività, il suo polo e l'asse di questa sono incidenti) questa proposizione ci dice che le 3 rette di PASCAL rappresentate da quelle proiettività concorrono in un punto (di STEINER).

Consideriamo ora le tre proiettività

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 1 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \end{matrix}.$$

Siano $1', 2', \ldots$ i coniugati di $1, 2, \ldots$ nell'involuzione armonica alle prime due; avremo dalla 1ª:

$$1\ 6\ 2'\ 5' \barwedge 2\ 3\ 1'\ 4'$$

e dalla 2ª:

$$2\ 3\ 1'\ 4' \barwedge 5\ 4\ 6'\ 3' \barwedge 4\ 5\ 3'\ 6',$$

e quindi combinando:

$$1\ 6\ 2'\ 5' \barwedge 4\ 5\ 3'\ 6'.$$

Questa relazione insieme colle

$$1\ 6\ 4'\ 5' \barwedge 4\ 5\ 1'\ 6',$$

$$1\ 3\ 4'\ 2' \barwedge 4\ 2\ 1'\ 3',$$

le quali sono conseguenza dell'involuzione $11', 22', \ldots$, provano che

$$1\ 3\ 6\ 4'\ 2'\ 5' \barwedge 4\ 2\ 5\ 1'\ 3'\ 6',$$

cioè che la 3ª proiettività considerata è trasformata nella sua inversa da quell'involuzione, cioe le è pure armonica. Dunque quelle tre pro-

---

(22) Più brevemente: si osservi che, chiamando rispettivamente $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3$ quelle tre proiettività, si ha: $\mathscr{P}_3 = \mathscr{P}_1 \mathscr{P}_2^{-1} \mathscr{P}_1$. Ora se $\mathscr{I}$ è l'involuzione armonica a $\mathscr{P}_1$ ed a $\mathscr{P}_2$, sarà: $\mathscr{I}\mathscr{P}_1 \mathscr{I} = \mathscr{P}_1^{-1}$, $\mathscr{I}\mathscr{P}_2 \mathscr{I} = \mathscr{P}_2^{-1}$ e quindi: $\mathscr{I}\mathscr{P}_3 \mathscr{I} = \mathscr{I} (\mathscr{P}_1 \mathscr{P}_2^{-1} \mathscr{P}_1) \mathscr{I} = (\mathscr{I}\mathscr{P}_1 \mathscr{I}) (\mathscr{I}\mathscr{P}_2^{-1} \mathscr{I}) (\mathscr{I}\mathscr{P}_1 \mathscr{I}) = \mathscr{P}_1^{-1} \mathscr{P}_2 \mathscr{P}_1^{-1} = \mathscr{P}_3^{-1}$, cioè $\mathscr{I}$ sarà pure armonica a $\mathscr{P}_3$. — Un'altra dimostrazione dell'esistenza dei punti di STEINER più simmetrica e più completa, giacchè mostra pure che questi sono a coppie coniugati rispetto alla conica, si troverà nella Nota sui fasci di proiettività di cui già feci cenno.

iettività sono armoniche ad una stessa involuzione. Per la conica se ne trae che le tre rette di PASCAL corrispondenti alle dette proiettività concorrono in un punto (di KIRKMAN).

19. È importante nella geometria proiettiva sintetica, anzi che limitarsi alla considerazione delle coniche *reali*, l'introdurre anche le coniche *imaginarie*, le quali si possono definire, come ben si sa, mediante sistemi polari in cui non vi sia alcun punto (reale) posto sulla sua polare. Oltre che con ciò molte proposizioni della teoria delle coniche (derivanti dalla polarità) acquistano un significato più generale, si ha il vantaggio di poter poi introdurre con perfetto rigore il cerchio imaginario all'infinito nelle questioni metriche, ad esempio nella ricerca puramente sintetica degli assi, delle sezioni circolari e delle proprietà focali delle quadriche. Per coppia di punti imaginari di una conica imaginaria s'intenderà la coppia dei punti doppi dell'involuzione di punti coniugati rispetto al relativo sistema polare posta su una retta (e dualmente); ed in generale la teoria del sistema polare darà subito quella della conica imaginaria.

Nei fasci di coniche (a base tutta imaginaria) converrà pure considerare le coniche imaginarie. La proprietà fondamentale di un fascio di coniche, cioè il teorema di STURM, si dimostra facilmente nel seguente modo che pare notevole appunto perchè serve per fasci affatto generali in cui si considerino anche coniche imaginarie. Siano r', r'', r''' tre rette qualunque date, lati di un triangolo i cui vertici rispettivamente opposti a quelle siano A, B, C; e consideriamo nello stesso piano una conica Γ, reale od imaginaria (non passante per alcuno di quei vertici). La proposizione che cerchiamo è in sostanza una relazione tra le coppie dei punti d'intersezione, reali od imaginari, di Γ con r', r'', r''', la quale ci mostri come, tenendo fisse le prime due coppie e variando Γ vari la terza su r'''; od in altri termini è una relazione tra le involuzioni $\mathfrak{J}', \mathfrak{J}'', \mathfrak{J}'''$ di punti coniugati rispetto a Γ (cioè al relativo sistema polare) poste su r', r'', r'''. Orbene queste involuzioni siano rispettivamente determinate dalle coppie:

$$\mathfrak{J}'(BB', CC'), \mathfrak{J}''(CC'', AA''), \mathfrak{J}'''(AA''', BB''');$$

le polari di A, B, C rispetto a Γ saranno $A''A''', B'''B', C'C''$ e taglieranno rispettivamente r', r'', r''' in tre punti A', B'', C''': il legame tra quelle tre involuzioni, cioè di essere involuzioni di punti coniugati rispetto ad una stessa conica, equivale a questo che i punti A', B'', C''' sono in linea retta (per la nota proprietà *caratteristica* di due triangoli polari rispetto ad una conica di essere omologici). Ora da ciò segue che, date r', r'', r''' e le involuzioni $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{J}''$ su r', r'', i punti A''', B''' di r'''sono coniugati nell'involuzione $\mathfrak{J}$ perfettamente determinata dalla coppia A, B e dalla coppia dei punti d'intersezione di r''' colle rette $A''C'$, $B'C''$ (poichè i due quadrangoli completi $A''B'A'B''$, $A''B'C'C''$ determinano su r''' una stessa involuzione, la quale conterrà per conseguenza appunto queste ultime due coppie di punti e la coppia A''', B'''). Quindi al variare di Γ l'involuzione $\mathfrak{J}'''(AA''', BB''')$ varierà restando sempre armonica a quell'involuzione fissa $\mathfrak{J}$ che contiene le coppie AB, $A'''B'''$; si ha cioè il teorema di STURM: «tutte le coniche, reali od imaginarie, passanti per due coppie fisse, reali od imaginarie, di punti (le coppie degli elementi doppi di $\mathfrak{J}'$,$\mathfrak{J}''$) tagliano una retta qualunque r''' nelle coppie, reali od imaginarie, di un'involuzione $\mathfrak{J}$ costruibile nel modo visto». Notisi poi che in questo modo resta pure dimostrato l'inverso, cioè che per ogni coppia dell'involuzione $\mathfrak{J}$ passa una determinata conica del fascio considerato; sicchè in particolare ne segue che per due coppie, reali od imaginarie, di punti e per un altro punto reale passa in generale una conica reale determinata.

Dal teorema di STURM si trae subito, come si sa, che le polari di un punto rispetto alle coniche di un fascio formano fascio. Considerando poi le involuzioni determinate dal fascio di coniche su due rette qualunque e notando che esse sono proiettive (n^0 14) alle punteggiate costituite rispettivamente sulle rette stesse dai coniugati del loro punto d'intersezione rispetto alle varie coniche, punteggiate che, in forza della proposizione ricordata, sono sezioni di uno stesso fascio di rette, se ne deduce che «le involuzioni determinate da un fascio di coniche sulle rette del piano sono tutte riferite proiettivamente tra di loro». Ecc. ecc.

Le coppie di elementi imaginari nelle relazioni metriche.

20. È noto che nelle relazioni metriche si possono introdurre gli elementi imaginari senza uscire dal campo delle grandezze reali, cioè senza farvi comparire quantità imaginarie.

Consideriamo anzitutto una retta r ed abbiasi su questa un'involuzione di punti $\mathfrak{J}$ avente per punto centrale O e per potenza k; se essa è iperbolica e s'indicano con M, N i suoi punti doppi, sarà

$$OM^2 = ON^2 = k.$$

Orbene quando invece $\mathfrak{J}$ fosse ellittica, cioè k negativa, si assumerà quest'uguaglianza come definizione dei simboli OM^2, ON^2, i quali in tal caso, essendo MN imaginari, non avrebbero alcun senso ([23]). Similmente se $\mathfrak{I}$ è iperbolica la potenza di un punto qualunque P di r rispetto alla coppia MN sarà

$$PM \cdot PN = PO^2 - OM^2 = PO^2 - k\,;$$

se invece è ellittica si prenderà quest'uguaglianza come definizione del simbolo $PM \cdot PN$, e si chiamerà ancora *potenza* di P rispetto alla coppia (imaginaria) MN la quantità così rappresentata. In particolare sarà sempre $OM \cdot ON = -k$. — Si avverta bene che i simboli PM, PN ecc., quando MN sono imaginari non avranno alcun senso se non si troveranno combinati appunto nel modo detto (come pure M ed N, separati, non hanno senso).

Con queste definizioni si possono generalizzare varie relazioni metriche segmentarie: ne daremo solo due esempi. Anzitutto si consideri su r un'involuzione iperbolica $\mathfrak{I}'$ di punti doppi AB e punto centrale P e sia MN una sua coppia imaginaria. L'involuzione ellittica $\mathfrak{I}$ di punto centrale O e potenza k relativa a questa coppia conterrà la coppia AB, sicchè sarà

$$k = OA \cdot OB = PO^2 - PA^2,$$

e quindi

$$PM \cdot PN = PO^2 - k = PA^2,$$

vale a dire la potenza del punto centrale P di $\mathfrak{I}'$ rispetto ad ogni coppia imaginaria MN di quest'involuzione è costante ed uguale alla potenza PA^2 di $\mathfrak{I}'$. Viceversa ogni coppia rispetto a cui P abbia questa potenza apparterrà ad $\mathfrak{I}'$.

Consideriamo ancora un'involuzione qualunque $\mathfrak{I}$ di punto centrale O, potenza k e punti doppi reali od imaginari MN. Due punti qualunque A, B abbiano per coniugati in $\mathfrak{I}$ rispettivamente A', B'; sarà:

$$\frac{AA' \cdot AB'}{BA' \cdot BB'} = \frac{(AO - A'O)(AO - B'O)}{(BO - A'O)(BO - B'O)} =$$

$$= \frac{(AO - k/AO)(AO - k/BO)}{(BO - k/AO)(BO - k/BO)} = \frac{AO^2 - k}{BO^2 - k}\,;$$

ossia:

$$\frac{AA' \cdot AB'}{BA' \cdot BB'} = \frac{AM \cdot AN}{BM \cdot BN}\,.$$

([23]) V. STAUDT: ***Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen II. Ordnung*** (Nürnberg, 1867), p. 6.

Dunque in un'involuzione qualunque di punti il rapporto delle potenze di due punti qualunque rispetto alla coppia costituita dai loro punti coniugati è uguale al rapporto delle loro potenze rispetto alla coppia dei punti doppi.

21. Analoghe definizioni permettono di introdurre gli elementi imaginari nelle relazioni metriche angolari. In un fascio di rette (o di piani) sia mn la coppia di elementi doppi di un'involuzione $\mathfrak{J}$ di cui sia o un asse (od un piano principale); se $\mathfrak{J}$ è iperbolica sarà

$$\mathrm{tg}^2\, om = \mathrm{tg}^2\, on = k\,,$$

essendo k il prodotto costante (positivo in tal caso) delle tangenti degli angoli che l'asse (od il piano principale) o fa con una coppia reale qualunque di elementi coniugati. Orbene si assuma quella come definizione dei simboli $\mathrm{tg}^2\, om$, $\mathrm{tg}^2\, on$ quando $\mathfrak{J}$ è ellittica (e quindi k negativa); e si ritengano allora come definizioni dei simboli $\mathrm{sen}^2\, om$, $\cos^2 om$, ecc., quelle che costituiscono le loro espressioni in funzione di $\mathrm{tg}^2\, om$, $\mathrm{tg}^2\, on$ nel caso contrario, sicchè sarà sempre

$$\mathrm{sen}^2\, om = \mathrm{sen}^2\, on = \frac{k}{1+k}\,, \quad \cos^2 om = \cos^2 on = \frac{1}{1+k}\,, \text{ ecc.}$$

Si ha poi, se $\mathfrak{J}$ è iperbolica e quindi mn sono reali, indicando con p un elemento qualunque del fascio:

$$\mathrm{tg}\, pm\, \mathrm{tg}\, pn = \frac{\mathrm{tg}^2\, po - \mathrm{tg}^2\, om}{1 - \mathrm{tg}^2\, po\, \mathrm{tg}^2\, om}\,,$$

$$\mathrm{sen}\, pm\, \mathrm{sen}\, pn = \cos^2 po \cos^2 om\, (\mathrm{tg}^2\, po - \mathrm{tg}^2\, om)\,,$$

$$\cos pm \cos pn = \cos^2 po \cos^2 om\, (1 - \mathrm{tg}^2\, po\, \mathrm{tg}^2\, om)\,,$$

e queste, nel caso contrario in cui mn siano imaginari, si assumano come definizioni dei simboli $\mathrm{tg}\, pm\, \mathrm{tg}\, pn$, ecc.

Mediante queste definizioni possiamo ottenere ad esempio una relazione analoga a quella vista alla fine del n^0 precedente. Si considerino due elementi a, b del fascio ed i loro coniugati a', b' in $\mathfrak{J}$. Sarà, qualunque sia la specie di quest'involuzione:

$$\frac{\mathrm{sen}\, aa'}{\mathrm{sen}\, ba'} = \frac{\mathrm{sen}\, ao \cos a'o - \cos ao\, \mathrm{sen}\, a'o}{\mathrm{sen}\, bo \cos a'o - \cos bo\, \mathrm{sen}\, a'o} = \frac{\cos ao}{\cos bo}\, \frac{\mathrm{tg}\, ao - \mathrm{tg}\, a'o}{\mathrm{tg}\, bo - \mathrm{tg}\, a'o}\,,$$

$$\frac{\mathrm{sen}\, aa'}{\mathrm{sen}\, ba'} = \frac{\cos ao}{\cos bo}\, \frac{\mathrm{tg}^2\, ao - k}{\mathrm{tg}\, ao\, \mathrm{tg}\, bo - k}\,,$$

$$\frac{\mathrm{sen}\, ab'}{\mathrm{sen}\, bb'} = \frac{\cos ao}{\cos bo}\, \frac{\mathrm{tg}\, ao\, \mathrm{tg}\, bo - k}{\mathrm{tg}^2\, bo - k}\,,$$

$$\frac{\mathrm{sen}\, aa'\, \mathrm{sen}\, ab'}{\mathrm{sen}\, ba'\, \mathrm{sen}\, bb'} = \frac{\cos^2 ao\, (\mathrm{tg}^2\, ao - \mathrm{tg}^2\, om)}{\cos^2 bo\, (\mathrm{tg}^2\, bo - \mathrm{tg}^2\, om)}\,,$$

ossia appunto

$$\frac{\operatorname{sen} aa' \operatorname{sen} ab'}{\operatorname{sen} ba' \operatorname{sen} bb'} = \frac{\operatorname{sen} am \operatorname{sen} an}{\operatorname{sen} bm \operatorname{sen} bn} .$$

22. La definizione (n^0 16) di coppia di punti imaginari di una curva di 2^0 ordine si applica in particolare al cerchio, e come questo è caratterizzato da che due fasci proiettivi di rette che lo generino sono fasci direttamente eguali, così essa porta a conchiudere (n^0 15) che il cerchio è caratterizzato tra le curve di 2^0 ordine dal tagliare la retta all'infinito nella coppia dei punti ciclici.

Inoltre considerando una retta al finito r ed un cerchio di centro C e raggio ϱ, si può dedurre dalla definizione generale della coppia d'intersezione di r col cerchio una costruzione speciale utile nello studio delle proprietà metriche. Conducasi da C la normale ad r e ne siano O il piede ed S, S' i punti d'intersezione col cerchio. Indichiamo con I un punto variabile di questo e con X, X' i punti d'intersezione di r coi raggi $SI, S'I$ dei fasci proiettivi di centri S, S' generatori del cerchio; dai triangoli simili XOS, $S'OX'$ si avrà, tenendo conto anche dei segni:

$$OX \cdot OX' = - OS \cdot OS' ,$$

ossia, indicando con d la distanza OC:

$$OX \cdot OX' = \varrho^2 - d^2 .$$

Dunque la coppia dei punti d'intersezione di r col cerchio è la coppia dei punti doppi MN reali od imaginari dell'involuzione avente O per punto centrale e $\varrho^2 - d^2$ per potenza.

Se P è un punto qualunque su r sarà (n^0 20):

$$PM \cdot PN = PO^2 - (\varrho^2 - d^2) = PC^2 - \varrho^2 .$$

Quindi se pel punto P del piano del cerchio (C, ϱ) si fa rotare una retta r, la potenza di P rispetto alla coppia, reale od imaginaria, dei punti d'intersezione di r col cerchio è costante (e data da $PC^2 - \varrho^2$).

Da queste premesse segue immediatamente che, dati due cerchi qualunque in un piano, esiste in generale al finito una determinata retta che li taglia nella stessa coppia di punti, e che è quindi luogo dei punti di ugual potenza rispetto ad ambo i cerchi; e segue la teoria degli assi radicali, dei fasci dai cerchi, ecc., senza le restrizioni a cui darebbe luogo l'esclusione dei punti imaginari.

Dalla definizione generale delle coppie di tangenti imaginarie di una conica si vedrebbe similmente che le coppie di tangenti del cerchio (C, ϱ) si possono determinare così: per un punto qualunque P la coppia delle tangenti condotte da esso al cerchio, reali od imaginarie, è la coppia delle rette doppie dell'involuzione avente la retta PC per un asse e la quantità $\varrho^2/(PC^2 - \varrho^2)$ per prodotto costante delle tangenti degli angoli che due rette coniugate qualunque fanno con quell'asse.

23. La proprietà metrica più importante nella teoria delle coniche è forse quella fornita dal teorema di Carnot. In fatti tra i vantaggi che essa presenta su altre vi sono quelli di esser proiettiva e di costituire una relazione tra sei punti (o tangenti) di una conica valida anche se questi formano tre coppie di cui alcune o tutte siano imaginarie, ed anzi valida anche quando la conica sia imaginaria. Ora la dimostrazione, che ne diede lo Chasles e che viene riprodotta in quasi tutti i trattati, presenta l'inconveniente, appoggiandosi sul teorema di Desargues, di esigere anzitutto che almeno due lati del triangolo taglino realmente la conica, e poi che mediante questo caso si dimostrino successivamente quelli in cui un solo lato o nessuno tagli realmente la conica. Oltre ad un difetto di simmetria ed eleganza, tale dimostrazione ha perciò anche quello di supporre essenzialmente che la conica sia reale.

Per ottenere una dimostrazione che valga anche per coniche imaginarie si rifletta che, queste essendo definite da polarità, la dimostrazione dovrà basarsi unicamente sulle proprietà della polarità, e poichè nel teorema stesso figura un triangolo qualunque, si è condotti a basarsi sulla proprietà caratteristica di due triangoli polari l'uno dell'altro, quella cioè di essere omologici, della quale già ci servimmo per stabilire il teorema di Sturm (che si può ben considerare come l'equivalente grafico del teorema metrico di Carnot). Sia dunque ABC un triangolo qualunque nel piano di una conica, reale od imaginaria, ed indichiamo ancora con $A', A'', \dots$ gli stessi punti che al n^0 19. Poichè i punti A', B'', C''' sono in linea retta, così si avrà (applicando ripetutamente il teorema di Menelao):

$$(1) \qquad \frac{BB' \cdot BC'}{CB' \cdot CC'} \, \frac{CC'' \cdot CA''}{AC'' \cdot AA''} \, \frac{AA''' \cdot AB'''}{BA''' \cdot BB'''} = 1\,.$$

Ora chiamando A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 le coppie di punti, reali od imaginarie, d'intersezione dei lati BC, CA, AB colla conica, sicchè sarà A_1A_2 la coppia dei punti doppi dell'involuzione (BB', CC'), ecc., si avrà (v. la fine del n⁰ 20):

$$\frac{BB' \cdot BC'}{CB' \cdot CC'} = \frac{BA_1 \cdot BA_2}{CA_1 \cdot CA_2}, \text{ ecc.},$$

e quindi sostituendo:

$$\frac{BA_1 \cdot BA_2}{CA_1 \cdot CA_2} \, \frac{CB_1 \cdot CB_2}{AB_1 \cdot AB_2} \, \frac{AC_1 \cdot AC_2}{BC_1 \cdot BC_2} = 1, \tag{2}$$

che è appunto il teorema di CARNOT. La dimostrazione prova pure che questa relazione (2) è condizione non solo necessaria ma anche sufficiente perchè le tre coppie A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 appartengano ad una conica [24].

Similmente mediante l'ultima relazione del n⁰ 21 si troverebbe il teorema duale nel piano a quello di CARNOT (ed i due teoremi corrispondenti sui coni quadrici duali di quelli nello spazio). Questi due teoremi permettono poi di dedurre come casi particolari tutte le principali relazioni metriche riguardanti le coniche, come quelle relative ai diametri coniugati, agli assi, agli asintoti, ecc., senza escludere nè i punti (e le tangenti) imaginari, nè le coniche imaginarie.

Coppie di rette imaginarie sghembe.

24. Nell'applicare la considerazione delle coppie di elementi imaginari alle forme geometriche dello spazio ordinario, alle proiettività di forme di 2ª e 3ª specie, alle quadriche (rigate o no) si potrà seguire il metodo di cui abbiamo posto i fondamenti e non s'incontreranno vere difficoltà: entrare in altri dettagli su ciò ci pare inutile e ci farebbe d'altronde allontanare dallo scopo di questo lavoro [25].

---

[24] Quindi la (1) dà una dimostrazione metrica del fatto che i punti $B'C'$, $C''A''$, $A'''B'''$ d'intersezione dei lati non corrispondenti di due triangoli omologici stanno su una conica, e viceversa; vale a dire del teorema di PASCAL e del suo inverso.

[25] Ad esempio si potrà definire come coppia di punti imaginari di una quadrica la coppia dei punti doppi di un'involuzione ellittica di punti coniugati rispetto alla quadrica. E si giungerà allora naturalmente a considerare su ogni quadrica non rigata infinite coppie di rette imaginarie di 1ª specie, sì che per ogni punto della quadrica passa una coppia posta nel rispettivo piano tangente. In fatti l'involuzione ellittica delle tangenti coniugate in un punto qualunque della quadrica è tagliata da ogni piano secondo un'involuzione ellittica di punti coniugati rispetto a questa: vale a dire la coppia di rette doppie imaginarie di quell'involuzione di tangenti ha tutte le sue coppie di punti imaginari sulla quadrica, e converrà perciò dire che essa stessa appartiene a questa.

Solo su un punto vogliamo ancora fermarci brevemente, cioè intorno alle *coppie di rette imaginarie di* 2ª *specie* (chiamando *di* 1ª *specie* le coppie di rette imaginarie da noi finora considerate, le quali passano per un punto reale e stanno in un piano reale).

Nello spazio ordinario vi sono, com'è noto, due specie di proiettività involutorie, cioè le involuzioni omologiche e le *involuzioni rigate*. Si dimostra facilmente ([26]) che un'involuzione rigata o non ha alcun punto o piano doppio, oppure ha per punti e piani doppi i punti e i piani di due rette sghembe (*assi*): nel 1⁰ caso l'involuzione si dirà *ellittica*, nel 2⁰ *iperbolica*. In ogni caso le congiungenti di punti coniugati nell'involuzione e le intersezioni di piani coniugati formano uno stesso sistema costituito dalle rette doppie dell'involuzione: ciascuna di queste è sostegno di un'involuzione di punti (o di piani) coniugati nell'involuzione rigata, involuzione che è ellittica od iperbolica con questa ed ha per punti doppi (o piani doppi) nel 2⁰ caso due punti (o piani) degli assi.

Ciò premesso, diremo *coppia di rette imaginarie sghembe* o *di* 2ª *specie* un'involuzione rigata ellittica, e diremo anche che essa costituisce la coppia dei proprii *assi*. Chiamando poi coppia di punti o piani (imaginari) di quella coppia di rette la coppia dei punti o piani doppi di ogni involuzione di punti o piani contenuta nell'involuzione rigata ed avente per sostegno una retta doppia di questa, si avrà in generale:

Ogni coppia di rette sghembe, reali od imaginarie, determina un sistema di infinite rette, di cui ognuna contiene una sua coppia di punti e sta in una sua coppia di piani: vi è sempre una retta del sistema passante per un dato punto o giacente in un dato piano. La coppia di rette sghembe costituisce gli assi di una determinata involuzione rigata, in cui due punti (o piani) coniugati qualunque sono coniugati armonici rispetto alla coppia di punti (o piani) che la loro congiungente (o retta d'intersezione) determina colla coppia degli assi. Ecc.

25. Data una coppia qualunque di rette sghembe, cioè un'involuzione rigata, si considerino tre rette doppie qualunque di questa e la quadrica per cui esse sono generatrici di un sistema: è evidente che le generatrici dell'altro sistema saranno a coppie coniugate in quell'involuzione, mentre quelle del 1⁰ sistema saranno tutte rette doppie. La coppia di rette sghembe assi dell'involuzione starà nel 2⁰ sistema di generatrici di quella quadrica: ciò è chiaro se la detta

([26]) V. Staudt, *Geometrie der Lage*, p. 130.

coppia è reale, e nel caso contrario ciò si assumerà come definizione di coppia di generatrici imaginarie in un sistema di generatrici di una quadrica rigata (definizione giustificata dal fatto che ogni coppia di punti di quella coppia di rette sghembe appartiene alla quadrica considerata). E si potrà dire che ogni coppia di generatrici imaginarie dell'un sistema della quadrica rigata è tagliata in una coppia di punti da ogni generatrice dell'altro sistema, ecc.

Viceversa ogni involuzione tra le generatrici di un sistema di una quadrica rigata è contenuta in un'involuzione rigata determinata e determina quindi una coppia di rette sghembe reali od imaginarie (v. *Beiträge*, n⁰ 104). In tal modo lo studio delle involuzioni rigate dello spazio e quello delle involuzioni tra generatrici di uno stesso sistema di una quadrica rigata vengono ad essere strettamente collegati tra di loro. In conseguenza dalle ricerche di STAUDT su questi argomenti si potranno prendere le dimostrazioni di varie altre proposizioni sulle involuzioni rigate importanti nella teoria delle rette imaginarie sghembe ([27]). Così si potrà dimostrare che, date 4 rette che non siano generatrici dello stesso sistema di una quadrica, esiste sempre (*) una determinata involuzione rigata di cui esse sono rette doppie, cioè una determinata coppia di rette che le taglia tutte (*Beiträge*, n⁰ 106). Così ancora si avrà che se due coppie di rette imaginarie sghembe sono assi di due involuzioni permutabili, il prodotto di queste sarà una terza involuzione rigata avente per assi due rette reali, di cui ciascuna taglia entrambe le coppie imaginarie nella stessa coppia di punti (*Beiträge*, n⁰ 109). Ecc. ecc.

Torino, Febbraio 1886.

([27]) La definizione delle rette imaginarie di 2ª specie mediante un'involuzione ellittica di generatrici di una quadrica fu probabilmente preferita dallo STAUDT a quella da me scelta perchè si presta immediatamente alla separazione delle due rette mediante il verso dell'involuzione. Ma non avendo da fare la separazione, essa pare meno buona, perchè sono infinite le quadriche passanti per una data coppia di rette ed il fissarne una per definire questa coppia è un difetto di simmetria. Del resto anche lo STAUDT adopera largamente le involuzioni rigate per lo studio delle rette imaginarie di 2ª specie; nel quale poi è pure da notare che pare indispensabile la considerazione delle quadriche rigate.

(*) Purchè la quadrica definita da tre delle rette date non sia tangente alla quarta retta (N. d. R.).