Corrado Segre

Un nuovo campo di ricerche geometriche, Nota I
Un nuovo campo di ricerche geometriche, Nota II
Un nuovo campo di ricerche geometriche, Nota III
Un nuovo campo di ricerche geometriche, Nota IV

Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **25** (1889-90), p. 180–205
Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **25** (1889-90), p. 290–317
Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **25** (1889-90), p. 376–396
Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **26** (1890-91), p. 35–71
in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 237–337

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_237>

XXXVIII.

UN NUOVO CAMPO DI RICERCHE GEOMETRICHE

SAGGIO.

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino »,
Vol. XXV, 1889-90, Nota I pp. 180-205, Nota II pp. 290-317,
Nota III pp. 376-396; Vol. XXVI, 1890-91, Nota IV pp. 35-71 (*)

L'estensione data all'Analisi coll'introdurvi oltre ai numeri reali quelli imaginari è, come ben si sa, immensa: basta riflettere alla vastità della teoria delle funzioni di una variabile complessa ed al campo che appena s'è cominciato ad esplorare delle funzioni di più variabili complesse. All'introduzione di quei numeri nell'Analisi seguì naturalmente per analogia l'introduzione in Geometria degli elementi (punti, rette, piani) imaginari (1), e così questa scienza si estese, acquistando gli enti che vi si consideravano, curve, superficie, ecc., nuovi elementi ed aggiungendosi inoltre nuovi enti, curve, superficie, ecc., imaginari.

Ma vi è una classe assai più vasta di enti, la cui introduzione in Analisi ed in Geometria scaturisce naturalmente da quella degli imaginari e che pur non fu ancora quasi affatto considerata. Per limitarmi alla Geometria (poichè l'una scienza si rispecchia e si confonde perfettamente nell'altra), i punti dello spazio, che prima, allorchè le considerazioni si restringevano agli elementi reali, erano ∞^3, ora, considerando tutti i punti *complessi* (cioè reali od imagi-

---

(*) Queste quattro Note vengono qui riunite; esse contengono rispettivamente: la Nota I l'introduzione ed i ni da 1 a 10, la Nota II i ni da 11 a 26, la Nota III i ni da 27 a 37, la Nota IV i ni da 38 alla fine (N. d. R.).

(1) Alludo tanto alla loro introduzione come gruppi di numeri complessi quanto, e più ancora, a quella che STAUDT ne fece come veri enti geometrici nei *Beiträge zur Geometrie der Lage*.

nari), sono ∞^6 (2). Possono dunque diventare oggetto di studio gli enti costituiti da ∞^1, ∞^2, ∞^3, ∞^4, ∞^5 punti complessi dello spazio.

Un esempio molto particolare di un ente ∞^1 si ha in quella che STAUDT (*Beiträge*, n. 206) chiamò *catena* (*Kette*) di punti di una retta, e che nella rappresentazione da lui usata dei punti di questa (mutata prima in una retta imaginaria di 2ª specie, se già non era) mediante il sistema lineare delle rette che li contengono ha per imagine una *schiera rigata* (*Regelschaar*); mentre nelle note rappresentazioni dei punti complessi della retta sui punti reali di un piano o di una sfera ha per imagine un cerchio (*B.*ᵉ, 245, 410) (3). Esempi di enti ∞^1 e ∞^2 dànno i punti reali delle ordinarie curve e superficie reali. Finalmente sono esempi di ∞^2 e ∞^4 le curve e le superficie con tutti i loro punti complessi; intendo per *curve* e *superficie* quelle varietà i cui punti hanno le coordinate *funzioni* (nel senso di RIEMANN) di uno o di due parametri complessi, al qual fatto analitico (ove si aggiungano convenienti condizioni di continuità) corrisponde geometricamente l'esistenza in ciascun punto di una sola tangente per le curve, di un fascio di tangenti per le superficie. Ma non ogni ∞^2 od ∞^4 di punti è una curva od una superficie, nè gode in conseguenza di queste proprietà geometriche (4). Ed in generale gli enti costituiti da infiniti punti complessi non

---

(2) In tutto questo lavoro una ∞^d è quella che si può mettere in corrispondenza generalmente continua e d'indici finiti coi gruppi dei valori *reali* di *d* parametri. — Avverto pure che d'or innanzi parlando di punti, od altri elementi, come pure di projettività, ecc., s'intenderà sempre (ove non si dica espressamente che sono *reali*) che siano *complessi*, cioè reali od imaginari; similmente nelle rappresentazioni analitiche i sistemi di riferimento s'intenderanno complessi.

Nelle cose che ora ed in seguito vediamo nel testo si considera quasi sempre il punto come elemento: ciò per brevità; ma si vede subito come si possano trattare similmente gli enti composti d'infinite rette o piani, ecc.

(3) A proposito di queste rappresentazioni è bene osservare che il sistema lineare di rette reali usato nella rappresentazione di STAUDT, considerato dal punto di vista della geometria della retta, cioè nella varietà quadratica che ha per *punti* le rette dello spazio ordinario, costituisce una *quadrica ellittica*, le cui *sezioni piane* sono appunto le schiere rigate del sistema. Adottando dunque per brevità in luogo di queste ultime locuzioni quelle di *sfera* e di *cerchi*, si avrà l'identità fra la detta rappresentazione di STAUDT e quella sulla sfera (da cui con projezione stereografica si passa alla rappresentazione sul piano).

(4) Vedremo a suo tempo che le tangenti in un punto ad una ∞^2, ∞^3 od ∞^4 di punti formano in generale delle varietà ∞^1, ∞^2, od ∞^3 (catene semplici o doppie di rette, o catene semplici di piani) che rientrano in quelle studiate nel 2º Cap. di questo scritto.

hanno un legame analitico, funzionale. Pur non di meno essi sembrano ben degni di studio, e possono formare oggetto di ricerche che in parte sono analoghe a quelle relative alle curve, superficie, ecc., ma che sempre avranno un carattere di maggior generalità.

In siffatte ricerche si possono seguire due indirizzi, appunto come in quelle della geometria ordinaria. L'uno di essi riguarderebbe quelle proprietà che son comuni a tutti gli enti di data dimensione e corrisponderebbe a quello che informa la teoria generale delle curve e superficie sì algebriche che trascendenti, specialmente la geometria infinitesimale. Seguendo quest'indirizzo si esaminerebbero i caratteri di quegli enti rispetto alle rette tangenti, ai contatti mutui, ed in particolare con curve e superficie, alle curvature, ecc. Molto utile per tali questioni (come pure per quelle di cui diremo poi) riescirebbe la rappresentazione degli enti in discorso su altri enti composti di punti tutti reali. Per avere una tal rappresentazione basta evidentemente estendere il procedimento con cui si rappresenta una variabile complessa sul piano reale, cioè rappresentare il punto complesso dello spazio mediante quel punto reale di uno spazio a 6 dimensioni che ha per coordinate le parti reali ed i coefficienti di $i (= \sqrt{-1})$ nelle tre coordinate non omogenee di quel punto complesso. Ma di questa rappresentazione, che facilmente si può tradurre geometricamente, non che di altre che vi si collegano e che per certi riguardi sono preferibili ad essa, tratterà un altro lavoro.

L'altro indirizzo d'investigazioni corrisponderebbe per analogia a quello della geometria projettiva delle forme algebriche e potrebbe trovare importanti applicazioni anche in questa: il Saggio attuale rientra più specialmente in esso. Come analoghi alle curve, superficie, ecc. algebriche si posson considerare quegli enti (che per brevità chiamerò *iperalgebrici*) i quali nelle rappresentazioni accennate hanno per imagini delle varietà reali algebriche, vale a dire quegli enti che son definiti da una o più equazioni algebriche fra le parti reali ed i coefficienti di i nelle coordinate del punto generatore. Ogni relazione di tal forma si può subito ridurre ad un'equazione algebrica fra le coordinate del punto ed i numeri complessi-coniugati, la quale anzi coll'introduzione di coordinate omogenee x_i si può rendere omogenea rispetto alle x_i ed omogenea rispetto alle loro coniugate $\bar{x}_i$ (5).

(5) La locuzione « *coniugato* » sarà sempre usata in questo lavoro in un solo significato: quello consueto relativo agli enti *complessi*. Se a indica un numero complesso qualunque, $\bar{a}$ indicherà il suo coniugato.

Viceversa abbiasi un'equazione di questa natura fra le x e le $\bar{x}$:

(1) $$f(x, \bar{x}) = 0\,,$$

e sia n il suo grado rispetto alle x ed n' il suo grado rispetto alle $\bar{x}$. È chiaro che una trasformazione collineare qualunque non muterà nè n, nè n', sicchè questi due numeri saranno due invarianti (assoluti) corrispondenti in questa nuova teoria al noto invariante delle superficie algebriche: l'ordine. Si osservi però subito che fra i due *ordini* n, n' non vi è per l'ente geometrico iperalgebrico da fare distinzione alcuna, perocchè, indicando con $\bar{f}$ quella funzione che si ottiene dalla f sostituendo a ciascun coefficiente il numero coniugato, l'equazione (1) equivale alla seguente, sua *coniugata*:

(2) $$\bar{f}(\bar{x}, x) = 0 \ \text{[6]}.$$

In generale un'equazione (1) (o (2)) si scinde in due equazioni a coefficienti reali fra variabili reali, ed in conseguenza stacca dalla ∞^6 dei punti dello spazio un ente che è al più ∞^4. Però se le equazioni (1) e (2) non ne formano che una sola (reale), il che accade quando la forma (1) (moltiplicata all'occorrenza per un fattor numerico) ha tutti i termini coniugati fra loro a due a due (sicchè n, n' sono eguali), — laonde essa non ammette che valori reali, qualunque siano i valori delle variabili, e si dirà quindi una forma iperalgebrica *reale*, — il luogo dei punti soddisfacenti alla (1) *potrà essere* un ente ∞^5 [7].

---

[6] Ne segue che in un certo senso lo studio analitico di *una* forma od equazione iperalgebrica (1) non coincide più completamente (come accade per le forme algebriche) con lo studio dell'ente geometrico che essa rappresenta: poichè questo può essere nello stesso modo rappresentato da forme od equazioni diverse da quella.

[7] Diciamo « potrà essere un ente ∞^5 », ma potrebbe anche essere di minor dimensione: a quello stesso modo che un'equazione reale in coordinate di punti può esser soddisfatta da ∞^2 punti reali costituenti una superficie reale, od anche solo da ∞^1 punti reali (di una curva), ecc. In particolare può la forma $f(x, \bar{x})$ (*definita*) non annullarsi senza l'annullarsi di tutte le variabili (tale sarebbe, ad esempio, la forma $\Sigma_l a_l x_l \bar{x}_l$ quando tutte le costanti a_l fossero reali e con lo stesso segno). — Se l'equazione (1) rappresenta effettivamente una ∞^5 questa può servire a dividere gli ∞^6 punti dello spazio in due regioni, mediante il segno che essi fanno assumere alla forma reale $f(x, \bar{x})$.

Si può dare una semplice interpretazione geometrica dell'equazione (1) considerando la *corrispondenza algebrica* fra punti x, x' (*connesso*) definita da

$$f(x, x') = 0\,.$$

Supponendo per brevità che il sistema di riferimento sia reale, è chiaro che la (1) è soddisfatta da quei punti che ammettono per corrispondenti in questa

Come intersezioni (complete o parziali) di questi si otterranno tutti gli altri enti iperalgebrici (8).

Ora per fare una geometria projettiva di tali enti che si svolga a somiglianza di quella degli enti algebrici (9) è naturale di comin-

---

corrispondenza i loro coniugati. La condizione poi perchè la (1) e la (2) coincidano diventa questa: che la corrispondenza algebrica considerata abbia per *inversa* la corrispondenza coniugata; ossia che la *corrispondenza iperalgebrica* (*connesso*)

$$f(x, \overline{x'}) = 0$$

sia involutoria.

(8) È facile formare delle definizioni geometriche degli enti di cui parliamo: ne diamo qui alcuni esempi.

Si consideri una funzione razionale qualunque delle distanze di un punto x da altri punti dati, da rette e piani dati, e s'indichi con $\varphi(x)$ la sua espressione rispetto alle coordinate di x. Allora il luogo di un punto per cui quella funzione assume un valore di modulo dato ϱ, o di data parte reale a, o di dato coefficiente b di i ecc., è rappresentato dall'equazione reale

$$\varphi(x) \cdot \overline{\varphi}(\overline{x}) = \varrho^2,$$

o

$$\varphi(x) + \overline{\varphi}(\overline{x}) = 2a,$$

oppure

$$\varphi(x) - \overline{\varphi}(\overline{x}) = 2bi,$$

ecc.

Le stesse equazioni nel piano, ove $\varphi(x)$ rappresenti il birapporto delle tangenti condotte da x ad una data curva di 4ª classe, oppure (in particolare) una funzione dell'angolo delle tangenti condotte da x ad una data conica, ecc., rappresentano il luogo di un punto per cui quel birapporto o quella funzione hanno un dato modulo, od una data parte reale o parte imaginaria, ecc. — Il luogo di tutti i punti posti sulle infinite tangenti reali di un inviluppo piano reale di classe n, $a_\xi^n = 0$, è un ente ∞^3 rappresentato simbolicamente dall'equazione reale

$$(a\, x\, \overline{x})^n = 0\,;$$

e similmente nello spazio il luogo di tutti i punti posti sulle rette reali di un complesso reale di grado n, $(a\, b\, x\, y)^n = 0$, è rappresentato dall'equazione reale

$$(a\, b\, x\, \overline{x})^n = 0\,.$$

Ecc. ecc.

(9) È possibile un tale sviluppo, cioè una *teoria invariantiva* (*projettiva*) *degli enti iperalgebrici*; ed in essa si possono usare strumenti analoghi a quelli adoperati nell'ordinaria teoria invariantiva degli enti algebrici, per esempio una *notazione simbolica delle forme* da cui facilmente si riconoscano i caratteri invariantivi. Ne faccio qui un cenno in generale riserbando ad altre note a piè di pagina alcuni esempi particolari che ci si presenteranno naturalmente nel seguito di questo Saggio.

Una forma iperalgebrica qualunque di grado n nelle x e di grado n' nelle $\overline{x}$ si può rappresentare col simbolo

$$a_x^n\, \overline{a}_{\overline{x}}^{n'} \left[= \left(\Sigma\, a_l x_l\right)^n \left(\Sigma\, \overline{a}_l \overline{x}_l\right)^{n'} \right],$$

ciare dallo studio degli enti dei primi ordini, per valersi di essi sia nelle definizioni e nelle ricerche relative a quelli di ordini superiori, sia nella generazione geometrica di questi. Ma allora, ricordando

---

convenendo che negli sviluppi si dia significato di coefficienti effettivi non ai singoli simboli a_l od $\bar{a}_l$, ma solo ai prodotti di n fra le a ed n' fra le $\bar{a}$. — Ciò posto, considerando un numero qualunque di tali forme (distinte, o comunque coincidenti fra loro)

$$a_x^n \bar{a}_{\bar{x}}^{n'}, \quad b_x^m \bar{b}_{\bar{x}}^{m'}, \quad c_x^p \bar{c}_{\bar{x}}^{p'},$$

si vede subito che sarà un loro *invariante* o *covariante* (nel senso che ora fisseremo) ogni forma rappresentata da un prodotto di simboli a_x, b_x,...; $\bar{a}_{\bar{x}}$, $\bar{b}_{\bar{x}}$, ..., (ed anche a_y, $\bar{a}_{\bar{y}}$, ...) non che di determinanti $(a\, b)$, ..., $(\bar{a}\, \bar{b})$, ..., se si è nel campo binario, oppure $(a\, b\, c)$, ..., $(\bar{a}\, \bar{b}\, \bar{c})$, ..., se si è nel campo ternario, ecc.; purchè nel prodotto così composto le a compaiano precisamente al grado n, le $\bar{a}$ al grado n', ecc. Una trasformazione lineare (per le x, accompagnata dalla trasformazione coniugata per le $\bar{x}$) delle forme date avrà per effetto di moltiplicare quella loro *forma invariantiva* per una potenza del determinante della trasformazione e per una potenza del suo coniugato indicate rispettivamente dal numero di determinanti delle a, b, ... e da quello di determinanti delle $\bar{a}$, $\bar{b}$, ... che compaiono in quel prodotto simbolico. — (Analogamente si ottengono altre specie di forme invariantive; e poche modificazioni alle cose dette bastano per applicarle al caso in cui fra le forme fondamentali vi siano delle corrispondenze o connessi iperalgebrici).

Nel caso di una forma reale

$$f(x, \bar{x}) = a_x^n \bar{a}_{\bar{x}}^n$$

alle convenzioni generali bisogna aggiungere che ogni prodotto di n fra le a ed n fra le $\bar{a}$ prende il valore coniugato se, senza far mutamenti d'indici, le a si cambiano in $\bar{a}$ e viceversa. Nel sistema invariantivo di una tal forma si presentano subito come degne di considerazione le *polari* successive

$$a_x^{n-r} \bar{a}_{\bar{x}}^{n-r'} a_y^r \bar{a}_{\bar{y}}^{r'},$$

fra cui quelle che corrispondono a valori uguali di r, r' sono reali. Sono pure notevoli quelle polari del punto x per cui r od r' è nullo: esse rappresentano, col punto variabile y, degli enti algebrici ordinari. In particolare se il punto x (nel piano o nello spazio) sta su $f = 0$, la retta od il piano polare

$$a_x^{n-1} \bar{a}_{\bar{x}}^n a_y = 0,$$

ossia

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_l} y_l = 0$$

si riducono a *retta* o *piano tangente* in x ad $f = 0$: intendo generalmente per *retta tangente* in x ad una ∞^3 di punti del piano rappresentata dalla $f = 0$ la retta (unica se x è *semplice* per $f = 0$) che la sega secondo una ∞^1 di punti avente in x un *punto doppio*; per *piano tangente* nel punto (*semplice*) x ad una ∞^5 di punti l'ufficio che le corrispondenze projettive hanno nella definizione geometrica delle curve e superficie di 2^0 ordine e d'ordine superiore, non che nella costruzione delle curve e superficie mediante sistemi di altre d'ordine inferiore, sorge la domanda se non vi siano delle corrispondenze che per i nuovi enti possano avere un ufficio analogo. A tale domanda si può rispondere affermativamente.

Sono ben noti quei caratteri geometrici delle corrispondenze projettive che, prima dal MÖBIUS (e dallo CHASLES), poi più completamente dallo STAUDT furon messi in rilievo. Per le collineazioni, ad esempio, fra due piani, o nello spazio essi consistono nella univocità della corrispondenza fra i punti e nel mutare punti di una retta in punti di una retta. Per le projettività tra forme di 1ª specie consistono (in conseguenza), oltre che nell'univocità, nel mutare i gruppi armonici in gruppi armonici. Finchè le considerazioni si limitano agli elementi reali di forme reali, questi caratteri bastano a definire le projettività e conducono alle trasformazioni lineari delle coordinate come rappresentazione analitica di queste. Ma se si tolgono quelle limitazioni, se si considerano insieme coi reali anche gli elementi imaginari, occorre aggiungere a quei caratteri un'altra proprietà per poter definire le corrispondenze projettive in modo che esse non mutino completamente natura, sicchè, ad esempio, si rappresentino ancora analiticamente con trasformazioni lineari, e si determinino ancora perfettamente con lo stesso numero di coppie di elementi omologhi. Fu l'acuto ingegno di STAUDT che primo si accorse di ciò e che (*B.*ᵉ, 215, 226) aggiunse (per le forme di specie superiore, e sostituì per quelle di 1ª specie) alle definizioni delle projettività la condizione che due *tetradi* (*Würfe*) omologhe siano *della stessa specie rispetto al verso*. Che cosa egli intenda con ciò si vede subito, oltre che con una qualunque delle rappresentazioni reali già ricordate degli elementi complessi di una forma di 1ª specie, ricorrendo al *valore della tetrade* (*B.*ᵉ, 399) o *birapporto* dei quattro elementi [10]: il coefficiente di i in esso determina col suo segno o

dello spazio rappresentata da $f=0$ il piano che è luogo delle tangenti in x alle sezioni piane di quell'ente passanti per x, cioè il piano la cui intersezione ha in x un *punto doppio*. — L'ultima equazione mostra poi che i punti di contatto di $f=0$ colle rette o coi piani tangenti condotti da un punto qualunque y sono quelli comuni ad $f=0$ ed alla polare di x di ordini n, $n-1$. Ecc.

(10) Questo numero (che proporrei di chiamare « *birapporto* » anzichè « *doppio rapporto* » o « *rapporto anarmonico* ») si può, grazie a STAUDT, KLEIN e DE PAOLIS, determinare senza valersi di misurazioni di lunghezze o d'angoli.

col suo annullarsi la specie della tetrade (*neutra* se quel coefficiente è nullo). — STAUDT osservò (*B.*[e], 225, 226) che se ad ogni elemento di una forma si considera come corrispondente quello coniugato della forma coniugata, la corrispondenza che così si ha presenta tutti i caratteri sopra ricordati delle corrispondenze projettive, cioè di mutare i gruppi armonici e le forme fondamentali (di specie inferiore) in [gruppi armonici e] forme fondamentali, e pur non è una projettività.

Ma questo fatto si presenta anche in altre corrispondenze. *Nel presente Saggio vengono determinate e studiate tutte le corrispondenze che, senz'essere projettive, hanno comuni con quelle projettive i caratteri citati.* Mentre le projettività non alterano i birapporti, queste nuove corrispondenze li mutano nei coniugati, cioè mutano di specie, riguardo al verso, le tetradi non neutre. Per questa e per altre ragioni che vi si collegano e che risulteranno meglio in seguito, ho chiamate le nuove corrispondenze *antiprojettività* (*anticollineazioni* od *antireciprocità*). Esse hanno fra loro e rispetto alle projettività relazioni analoghe a quelle che nello spazio hanno le *simmetrie* fra loro e rispetto alle *uguaglianze*. Così l'applicazione successiva (*prodotto*) di due antiprojettività dà una corrispondenza projettiva, mentre un'antiprojettività ed una projettività producono di nuovo un'antiprojettività. Le corrispondenze antiprojettive s'individuano mediante coppie di elementi omologhi allo stesso modo che le projettive ed in modo analogo si costruiscono.

Lo studio delle antiprojettività si può far procedere in modo analogo a quello che per le corrispondenze projettive si usa nell'ordinaria geometria di posizione. Vi s'incontrano molte analogie con questa, ma anche molte differenze sostanziali (11). Noi ci fermeremo specialmente sulle antiprojettività *involutorie*, perchè esse coi loro elementi uniti (quando ne hanno) dànno quelli fra gli enti composti d'infiniti elementi complessi che sono i primi da studiarsi nella trattazione generale sopra accennata. Così nelle forme di 1ª specie esse dànno (da un nuovo punto di vista) le *catene* già menzionate di STAUDT. Le anticollineazioni involutorie del piano o dello spazio dànno certe ∞^2 ed ∞^3 di punti che per analogia ho chiamato *catene di* 2ª o *di* 3ª *specie*. Invece le antireciprocità involutorie del piano e dello spazio dànno coi loro punti uniti (sempre, s'intende, ove ne abbiano) delle ∞^3 ed ∞^5, che, per varie analogie con le coniche e le quadriche e per l'essere di una dimensione maggiore,

(11) Dove l'analogia potrà aiutare, l'esposizione sarà fatta più concisamente.

si diranno *iperconiche* ed *iperquadriche*; queste ultime possono essere o non *rigate*, precisamente come le quadriche. Ma, per citare qualche esempio in cui l'analogia cessa di valere, mentre una conica è anche il luogo dei punti uniti di reciprocità non polari e si genera anche con fasci di rette projettivi (reciprocità piane degeneri), il luogo dei punti uniti di un'antireciprocità piana non involutoria ed in particolare il luogo dei punti d'incontro dei raggi omologhi di due fasci antiprojettivi non è un'iperconica, ma bensì un ente ∞^2 comune ad un fascio d'iperconiche; e cose simili accadono nello spazio. — Quanto alle rappresentazioni analitiche, rilevo per ora soltanto il fatto che le catene di punti di una retta, le iperconiche nel piano e le iperquadriche nello spazio si rappresentano con equazioni della forma (1) *reali* (nel senso sopra fissato) e *bilineari* nelle rispettive coordinate e nelle coniugate, cioè con equazioni del tipo

$$\Sigma\, a_{lm}\, x_l\, \bar{x}_m = 0\,, \tag{3}$$

ove

$$a_{ml} = \bar{a}_{lm}\,. \tag{4}$$

Le varie specie di catene, le iperconiche, le iperquadriche, i sistemi che con esse si possono formare, generano fra loro e con le forme dell'ordinaria geometria, sia mediante riferimento projettivo, sia mediante antiprojettività, una serie sterminata di nuovi enti iperalgebrici. Ma il presente lavoro deve limitarsi a porre le basi delle ricerche su tali enti ([12]).

Altre limitazioni ancora ho creduto conveniente d'impormi. Tutto ciò che qui si troverà esposto si potrebbe estendere mediante *semplici e facili generalizzazioni* agli spazi di qualunque dimensione. Ma per facilitare la lettura a chi non avesse familiarità coi ragionamenti relativi agli spazi superiori, m'è parso utile di restringermi (tranne che in poche note) allo spazio ordinario. Per la stessa ragione non mi son valso delle rappresentazioni degli enti complessi su enti

([12]) Nel fascicolo di Dicembre del Bulletin des sciences mathém., si trova una recensione di un lavoro danese del sig. Juel, intitolato: *Bidrag til den imaginäre Linies og den imaginäre Plans Geometri*, dalla quale appare che ivi (in vista specialmente delle applicazioni alla rappresentazione reale della retta e del piano complessi) quell'A. ha già considerato sotto il nome di *simmetrali*, le corrispondenze fra punteggiate e fra piani che io chiamo rispettivamente antiprojettività ed anticollineazioni; come pure le catene piane. Lo scopo di quello scritto sembra però affatto diverso dal mio; nè da quella recensione (su cui soltanto posso ora basarmi) appare che fra le due pubblicazioni vi sia molta affinità.

(*Gennaio* 1890).

reali di spazi superiori, delle quali già feci cenno, e che in certe questioni sarebbero riuscite utili per illuminare o per facilitare la trattazione. Però, come già dissi, esse saranno studiate in un altro lavoro, nel quale serviranno anche ad introdurre un concetto nuovo che trae origine dai risultati di questo Saggio. Il lettore vedrà cioè che qui s'incontrano quelle stesse distinzioni di più casi nel numero di soluzioni di ogni problema che già si avevano nell'Analisi e nella Geometria prima dell'introduzione dei numeri e degli elementi complessi. Orbene ad ottenere nel nuovo campo quella stessa generalità e semplicità d'enunciati che quelli procurarono al campo ordinario torna opportuna l'introduzione di una nuova specie di numeri e di elementi geometrici, la quale si definisce mediante gli ordinari numeri ed elementi complessi come questi si definiscono mediante i numeri ed elementi reali [13]. Ma di tale introduzione (che poi si può prolungare indefinitamente) basti qui questo cenno.

Ho già detto fin dal principio che gli studi da farsi nel campo descritto possono avere un'importanza tanto geometrica quanto analitica. Terminerò questa introduzione osservando come già in certe ricerche analitiche recenti si abbia un esempio particolare di applicazione di cose che qui si tratteranno geometricamente. Negli studi (specialmente in quelli particolari) sulle funzioni di una variabile complessa le catene semplici descritte da questa, cioè i circoli che le rappresentano nel piano o nella sfera su cui la variabile vien distesa, sono usati frequentemente: in particolare essi furono adoperati nelle ricerche sulle funzioni che non mutano per un gruppo di trasformazioni lineari della variabile, e specialmente in quelle sì generali e feconde del sig. POINCARÉ sulle *funzioni Fuchsiane e Kleiniane.* La ragione della loro utilità in quest'argomento consiste principalmente, se ben si osserva, in questi due fatti: che una catena semplice divide la forma di 1ª specie, vale a dire tutto il

---

(13) Se fra le parti reali ed i coefficienti di i in un numero qualunque di variabili complesse si ha un sistema determinato di equazioni algebriche, il numero delle soluzioni di questo sistema non dipenderà più soltanto dai gradi delle varie equazioni, ma potrà anzi variare col mutar dei coefficienti: e ciò in causa della *realtà* imposta alle attuali incognite. Si farà sparire quell'inconveniente ammettendo che queste possano essere complesse e della forma $a+bj$ (con a, b reali), indicando con j una radice quadrata di -1 diversa da $\pm i$. Allora le variabili complesse assumeranno valori *bicomplessi* della forma $a+bj+ci+dij$. All'introduzione analitica così fatta (che del resto non è punto nuova) di tali *numeri bicomplessi* si può contrapporre in Geometria una definizione *puramente sintetica* di *elementi bicomplessi*.

campo dei valori complessi della variabile, in due parti, nello stesso modo che il cerchio rappresentativo divide in due regioni il piano o la sfera; e che le trasformazioni lineari della variabile mutano le catene in catene, cioè i cerchi imagini in cerchi. Ne deriva che i più semplici fra gli enti che per due o più variabili (non omogenee) corrispondono a quel che per una variabile sono le catene semplici, per modo da soddisfare pure a due condizioni analoghe alle precedenti, vale a dire le iperconiche, le iperquadriche, ecc., dovranno prestare utili servigi nelle ricerche sulle funzioni di due o più variabili complesse, e specialmente su quelle che ammettono dei gruppi di trasformazioni lineari per le variabili. Ed effettivamente nelle ricerche sulle funzioni di due variabili complesse fatte in questi ultimi anni dai sig.i PICARD e POINCARÉ (14) e specialmente in quelle del primo sulle funzioni ch'egli chiamò *iperfuchsiane*, si trovano usate le iperconiche, definite in modo diverso dal nostro, cioè o analiticamente mediante le equazioni (3) e (4), oppure mediante le varietà che le rappresentano nello spazio reale a 4 dimensioni. Il sig. PICARD si trova così condotto necessariamente a qualche ricerca sulla riduzione della (3) a forma canonica, i cui risultati nella trattazione geometrica appariranno evidenti (15).

Torino, autunno 1889.

Proprietà generali delle corrispondenze antiprojettive.

1. Le corrispondenze tra forme semplici di cui noi dobbiamo anzitutto occuparci hanno comune, come già dicemmo, con le corrispondenze projettive la proprietà di *trasformare i gruppi armonici in gruppi armonici*. Se il campo geometrico si limita agli elementi reali, questa proprietà caratterizza completamente le projettività, ed il sig. DARBOUX potè dimostrare pel primo in modo interamente rigoroso (16) il teorema (fondamentale per la Geometria projettiva) di STAUDT, secondo cui una corrispondenza che goda di quella proprietà è pienamente individuata da tre coppie di elementi omologhi. Ma

---

(14) V. particolarmente: Acta mathematica, I, II, V, IX.

(15) Aggiungerò che le forme del tipo (3) con le condizioni (4) e coi coefficienti (complessi) *interi* si sono pure già introdotte nella teoria dei numeri grazie ai sig.i HERMITE, PICARD ed altri.

(16) *Sur le théorème fondamental de la géométrie projective.* Math. Ann., XVII, p. 55.

se, invece di restringerci al campo reale, consideriamo tutti gli elementi, tutte le forme, sì reali che imaginarie, questa proposizione cade e si ha invece che da tre coppie di elementi omologhi sono determinate *due* corrispondenze dotate di quella proprietà (con una certa limitazione ([17])). Per dimostrare ciò basta riprendere il ragionamento analitico del sig. DARBOUX e farvi poche aggiunte.

Si rappresenti analiticamente ogni elemento dell'una forma assumendo come sua coordinata il birapporto che esso determina coi tre elementi dati nella forma stessa ed analogamente si rappresentino gli elementi dell'altra forma. Chiamando x la coordinata di un elemento qualunque della 1ª forma, quella dell'elemento corrispondente si potrà indicare con $\varphi(x)$, dove φ è una funzione (nel significato più generale di questa parola) avente un valore ben determinato per ogni valore della variabile complessa x. Per determinare questa funzione, e con ciò la corrispondenza tra le due forme, abbiamo negli elementi fondamentali dei due sistemi di coordinate tre coppie di elementi omologhi, le quali dànno:

$$\varphi(0) = 0\,, \qquad \varphi(1) = 1\,, \qquad \varphi(\infty) = \infty\,; \tag{1}$$

ed inoltre la proprietà che a gruppi armonici corrispondono gruppi armonici, la quale conduce immediatamente, come osserva il sig. DARBOUX, alle due equazioni funzionali

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)\,, \tag{2}$$

$$\varphi(x^2) = [\varphi(x)]^2\,. \tag{3}$$

Da queste e dalle (1) si trae subito, come nota ancora il chiar.° geometra francese, che *per valori reali e razionali di x* si ha:

$$\varphi(x) = x\,. \tag{4}$$

In conseguenza se ammettiamo *la continuità della corrispondenza* e quindi della funzione φ, almeno pei valori reali della variabile ([18]), la (4) varrà, al limite, per tutti i valori reali di x. Ma la (3) ci

---

([17]) V. le note seguenti.

([18]) In forza della (2) basterebbe ammettere la continuità di $\varphi(x)$ per un tratto reale e finito dato ad arbitrio per x, oppure anche soltanto la *realtà* di $\varphi(x)$ per un tal tratto. Probabilmente però anche questa condizione è superflua e la continuità della corrispondenza considerata e quindi di $\varphi(x)$ per tutti i valori complessi di x risulta già senz'altro come conseguenza della proprietà di mutare i gruppi armonici in gruppi armonici. Ma questo fatto, che per corrispondenze e funzioni φ *reali* fu dimostrato facilmente dal sig. DARBOUX in base alle relazioni (1), (2), (3), non mi riuscì nel caso attuale di provarlo in modo completo.

dà inoltre per $x = bi$:

$$[\varphi(bi)]^2 = \varphi(-b^2)$$

ossia, applicando nell'ipotesi che b sia reale la (4) ed estraendo la radice quadrata:

$$\varphi(bi) = \pm bi. \tag{5}$$

Nel 2^0 membro si dovrà prendere *sempre* il segno superiore, oppure *sempre* il segno inferiore; vale a dire, se c indica pure un numero reale, sicchè:

$$\varphi(ci) = \pm ci, \tag{5'}$$

il segno ambiguo di quest'uguaglianza sarà lo stesso che quello della precedente, perocchè dalla (2) segue:

$$\begin{aligned}\varphi(bi) + \varphi(ci) &= \varphi[(b+c)i] \\ &= \pm (b+c)i;\end{aligned}$$

il che, confrontato colle (5), (5'), prova appunto l'asserto. Applicando finalmente la (2) per $x = a$ e $y = bi$, ove a e b sono numeri reali qualunque, e valendosi delle (4) e (5), si ha:

$$\varphi(a+bi) = a + bi, \tag{6}$$

oppure

$$\varphi(a+bi) = a - bi. \tag{7}$$

Si hanno dunque nelle (6) e (7) *due* diverse soluzioni del problema, poichè le corrispondenze definite rispettivamente da quelle espressioni soddisfano effettivamente, come subito si vede, alle condizioni imposte. La corrispondenza rappresentata da (6) non è altro che la projettività fra le due forme individuata dalle tre coppie date di elementi omologhi. Invece la corrispondenza definita da (7) è affatto diversa dalle projettività [19], e, secondo quanto già

---

[19] Ciò se si tien conto della possibilità di passare (per via di costruzioni grafiche, movimenti, ecc.) dall'una forma all'altra. *Ma non si distingue affatto una projettività da un'antiprojettività fra due forme se fra queste si considerano solo le relazioni indipendenti da ogni passaggio che effettivamente si possa eseguire dall'una all'altra.* Invero, limitandoci per ora al caso di due forme semplici, se gli elementi di queste si determinano rispettivamente con le coordinate $a + bi$, $c + dj$ (ove $i^2 = j^2 = -1$), non è possibile senza un passaggio (diretto od indiretto) dall'una all'altra forma fissare se sia $j = i$, oppure $j = -i$; e però non si può distinguere la corrispondenza (6) dalla (7). Questo fatto è analogo a quanto accade per le *uguaglianze* e le *simmetrie* nella geometria elementare.

si disse nell'introduzione, verrà da noi chiamata *antiprojettività* (20).

2. Un'*antiprojettività fra due forme semplici* è dunque *una corrispondenza univoca e continua non projettiva tale che a gruppi armo-*

---

(20) Al risultato di questo n⁰ si può anche giungere in modo più geometrico ricorrendo alla rappresentazione degli elementi delle due forme di 1ª specie sui punti reali della sfera o del piano. La condizione che a gruppi armonici corrispondono gruppi armonici si conserva per le imagini: quattro punti *armonici* della sfera o del piano rappresentativo sono quattro punti di un cerchio i quali *su questo* formino un gruppo armonico. Partendo da tre punti qualunque con successive costruzioni di quarti armonici si otterrà un sistema (*armonico*) d'infiniti punti del cerchio congiungente quei tre, sì che, com'è noto, in ogni tratto del cerchio vi saranno infiniti di quei punti. Ai punti di un cerchio costituenti un tal sistema corrisponderà mediante la data corrispondenza un analogo sistema di punti di un cerchio. Se quindi *si ammette la continuità* della corrispondenza (la quale invece, come già si disse, potrebbe essere *dimostrabile*) si potrà conchiudere che a *tutti* i punti di un cerchio corrispondono i punti di un cerchio. Quindi la corrispondenza sulla sfera sarà una *collineazione*; e quella sul piano sarà, secondo la denominazione del MÖBIUS, un'*affinità circolare* (v. specialmente « *Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung* », MÖBIUS Werke, Bd. II, p. 243). Le trasformazioni collineari di una sfera in se stessa, come le affinità circolari sopra un piano, sono di due specie, secondo che conservano inalterati gli angoli ovvero li mutano di segno (al che corrisponde, ad es. per la sfera, il mutare in se stesso ciascuno dei due sistemi di generatrici rettilinee oppure lo scambiarli fra loro). Da tre coppie di punti omologhi è individuata, come si sa, una trasformazione di ogni specie. Ciò dimostra il nostro teorema. — Si possono poi considerare le trasformazioni di 1ª specie come rappresentanti delle projettività e quelle di 2ª come imagini delle antiprojettività.

Introducendo fin d'ora la locuzione « *catena* » di STAUDT (di cui già si parlò nell'introduzione e che nei cap.i seguenti sarà usata continuamente) si può (in forza di osservazioni precedenti) sostituire alla condizione della continuità una più ristretta aggiungendo alla condizione di mutare i gruppi armonici in gruppi armonici questa: che gli elementi dell'una forma costituenti *un* tratto finito di una catena abbiano per omologhi elementi di una catena. Ma anche questa condizione potrebb'essere superflua. Lo STAUDT non incontra per le projettività complesse questioni di tal natura perchè egli non le definisce più, come fece per quelle reali e come noi qui ancora facciamo, ponendo a base la considerazione dei gruppi armonici. Egli mette invece nella loro definizione la proprietà di *mutar le catene in catene*, la quale contiene in sè come conseguenza (*B.e*, 214) la trasformazione dei gruppi armonici in gruppi armonici, come pure la continuità e conduce subito nelle rappresentazioni suddette alle collineazioni della sfera ed alle affinità circolari piane. Quindi se si considerano tutte le corrispondenze che mutano le catene in catene, e se ne tolgono le projettività, si avranno precisamente le nostre antiprojettività.

nici corrispondono gruppi armonici. (*L'identità*, essendo una particolare corrispondenza projettiva, *non è* un'antiprojettività). Il risultato ottenuto al n. prec. e la forma della (7) ci dànno subito le seguenti proprietà di questa corrispondenza.

Essa è individuata da 3 coppie di elementi omologhi. Due tetradi omologhe in essa hanno valori (birapporti) complessi coniugati: esse sono dunque o neutre entrambe (cioè con uno stesso valore reale), oppure di specie contraria rispetto al verso nel senso di STAUDT.

Il prodotto di due corrispondenze antiprojettive è una projettività. Il prodotto di due corrispondenze, di cui una sia projettiva e l'altra antiprojettiva, è un'antiprojettività. Ne segue subito che: *Il prodotto di un numero qualunque di corrispondenze projettive ed antiprojettive è una projettività oppure una antiprojettività a seconda che il numero delle corrispondenze antiprojettive è pari od impari. Trasformando due forme antiprojettive mediante due projettività oppure mediante due antiprojettività si ottengono ancora due forme antiprojettive; così pure se le due forme erano projettive, rimarranno tali dopo quelle trasformazioni.* Ecc.

3. Due forme (fondamentali) di 2ª o di 3ª specie si diranno *anticollineari*, oppure *antireciproche*, *quando tra i loro elementi è stabilita una corrispondenza univoca e continua, non projettiva* (e quindi diversa dall'*identità*), *tale che a due elementi non omonimi dell'una forma di cui il* 1⁰ *giaccia nel* 2⁰ *corrispondono rispettivamente due elementi non omonimi di cui il* 1⁰ *giace nel* 2⁰, oppure *passa pel* 2⁰. Le due forme si diranno in ambi i casi *antiprojettive*; ed *antiprojettività* (*anticollineazione* oppure *antireciprocità*) si chiamerà la corrispondenza. Come questa effettivamente si possa costruire vedremo tosto.

Perciò si osservi anzitutto che la proprietà con cui abbiamo definito siffatte corrispondenze, cioè quella stessa con cui STAUDT definisce nel campo reale quelle projettive (*Geom. d. Lage*, n. 121), conduce subito, come questo geometra notò, alla conseguenza che a gruppi armonici corrispondono gruppi armonici. Ne discende che due forme semplici omologhe sono o projettive od antiprojettive. Ma nel 1⁰ caso è facile scorgere che la corrispondenza considerata sarebbe anch'essa projettiva, poichè dall'essere projettive due *particolari* forme semplici omologhe si trae che sono projettive due *qualunque* forme semplici omologhe (considerandole cioè come dedotte rispettivamente dalle prime due mediante projezioni e sezioni), e su questa projettività si basa appunto la costruzione delle collineazioni e delle reciprocità. Concludiamo che *in due forme antiprojettive di 2ª o di 3ª specie le forme omologhe subordinate sono pure antiprojettive.*

4. Possiamo quindi costruire un'antiprojettività tra forme di 2ª o 3ª specie in modo perfettamente analogo a quello che si usa per costruire le projettività. Ad esempio, per riferire due piani π, π' in un'anticollineazione, si riferiscano due fasci di rette A, B di π antiprojettivamente a due fasci A', B' di π' per modo che in entrambe queste corrispondenze alla retta AB corrisponda $A'B'$; e ad ogni punto P di π comune a due raggi di A, B si consideri come corrispondente il punto P' comune ai due raggi omologhi di A', B'. Allora se P descrive una retta non passante nè per A nè per B, i due raggi $A'P'$, $B'P'$ descriveranno due fasci antiprojettivi rispettivamente a quelli descritti da AP, BP i quali sono projettivi fra loro col raggio unito AB; perciò anche i fasci descritti da $A'P'$, $B'P'$ saranno projettivi fra loro (n. 2) col raggio unito $A'B'$ e quindi anche P' descriverà una retta. Se ne trae che la corrispondenza costruita fra π e π' è veramente un'anticollineazione.

Similmente volendo riferire anticollinearmente due spazi basta riferire due stelle A, B dell'uno a due stelle A', B' dell'altro in due anticollineazioni le quali facciano corrispondere fra loro i due fasci di piani aventi per assi AB, $A'B'$ in una stessa antiprojettività, e poi considerare come omologo di ogni punto P del 1º spazio il punto comune a quei raggi delle stelle A', B' i quali corrispondono ai raggi AP, BP di A, B. Allora si vede, precisamente come nell'analoga costruzione della collineazione fra due spazi, che ai punti di un piano corrispondono i punti di un piano. Ecc. ecc.

5. Da queste costruzioni si trae, analogamente ancora alle projettività fra forme di 2ª e 3ª specie, che *un'antiprojettività fra due forme di 2ª oppure di 3ª specie è individuata quando di* 4, *oppure di* 5 *elementi omonimi indipendenti* [21] *dell'una forma si dànno ad arbitrio gli elementi corrispondenti (pure indipendenti).*

Inoltre dai risultati dei n.ⁱ prec.ⁱ si deduce che *ogni corrispondenza antiprojettiva muta le tetradi in tetradi aventi valori (birapporti) coniugati.* Ed anche quelle proprietà delle corrispondenze fra forme

[21] Per brevità chiamo *indipendenti* più punti dello spazio, oppure di un piano, quando fra essi non ve ne sono 4 coplanari, oppure 3 allineati; ed analogamente per le altre forme e per altri elementi.

di 1ª specie relative ai loro *prodotti*, che si son viste al n. 2, rimarranno valide per corrispondenze fra forme di 2ª o di 3ª specie. Ne segue ad esempio, che una *potenza* qualunque di un'antiprojettività fra due forme sovrapposte è una projettività oppure un'antiprojettività secondo che l'indice della potenza è pari od impari (22). E l'altro fatto a cui così si giunge, che mediante trasformazioni projettive da forme antiprojettive si deducono ancora forme antiprojettive, conferma quanto già risultava dalla definizione delle antiprojettività, cioè che la loro teoria appartiene a quella geometria che ha per *gruppo fondamentale di trasformazioni* (23) il gruppo delle trasformazioni projettive, vale a dire alla *geometria projettiva.*

Si noti ancora a questo proposito che se si prende invece per gruppo fondamentale di trasformazioni quello che è determinato dalle antiprojettività, gruppo che abbraccia oltre a queste anche le corrispondenze projettive, si avrà una geometria che è contenuta in quella projettiva, ma che non le equivale completamente (24).

6. Nell'introduzione fu già notato come allorquando ad ogni elemento di una forma si fa corrispondere il suo complesso-coniugato, si viene appunto a considerare una particolare antiprojettività, che noi chiamiamo *coniugio.* Se la forma è reale, cioè coincide con la coniugata, il coniugio è un'antiprojettività *involutoria.*

Ogni antiprojettività **S** si può considerare come il prodotto del coniugio **C** e di una determinata projettività **CS**; ovvero anche come il prodotto di una projettività determinata **SC** e del coniugio **C**. Per tal modo tanto la definizione quanto le dimostrazioni delle proprietà finora viste delle corrispondenze antiprojettive si potrebbero tutte dedurre da quelle note del coniugio e delle projettività. Così si verificano subito di nuovo le proposizioni relative ai prodotti di corrispondenze projettive ed antiprojettive, non che quelle sul numero delle coppie di elementi omologhi con cui si determinano le antiprojettività; numero che viene così a dedursi da quello relativo alle projettività.

Ma anzi che soffermarci su ciò non sarà forse inutile (sebbene pel seguito non occorra) l'osservazione seguente intorno agli enti

(22) Quindi un'antiprojettività *ciclica* è necessariamente di grado pari, poichè una sua potenza impari essendo antiprojettiva non può ridursi all'identità.

(23) V. KLEIN, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen, 1872), § 1. Di questo importante lavoro, non abbastanza noto in Italia, si pubblicherà presto una traduzione negli Annali di matematica.

(24) Cfr. KLEIN, loc. cit. § 2.

geometrici *reali*. Diamo la denominazione di « *reale* » ad ogni ente, il quale per ciascun elemento complesso in esso contenuto contiene pure il coniugato, vale a dire ad ogni ente che sia trasformato in se stesso dalla corrispondenza di coniugio. Se un tal ente ammette una trasformazione projettiva in se stesso, esso ammetterà pure una trasformazione antiprojettiva, prodotto di quella e del coniugio; e viceversa. Ne deduciamo che *un ente reale con* k *trasformazioni projettive in se stesso (l'identità inclusa) ammette pure precisamente* k *trasformazioni antiprojettive*. Per citare un solo esempio si consideri una cubica piana reale non singolare e si vogliano quelle corrispondenze univoche fra i suoi punti le quali trasformano le terne di punti allineati in terne di punti allineati; allora oltre le 18 collineazioni ben note che sole si sogliono considerare vi saranno 18 anticollineazioni che pure soddisfaranno al problema. Naturalmente lo stesso fatto si presenterà, più in generale, per tutte le cubiche piane non singolari aventi l'invariante assoluto reale (e non per le altre).

7. Si possono considerare delle antiprojettività anche fra gli elementi di due forme semplici razionali qualunque, per es. fra i punti di due curve razionali (distinte o sovrapposte). — Data un'antiprojettività fra i punti di due coniche γ, γ' esiste una determinata anticollineazione dei piani di queste, la quale determina appunto su γ, γ' quell'antiprojettività. La dimostrazione si fa analogamente a quelle note della proposizione corrispondente sulle projettività fra due coniche. Così, chiamando omologhe due rette dei due piani quando tagliano γ, γ' in due coppie omologhe di punti, alle rette di un fascio del piano di γ saranno omologhe nell'altro piano le rette di un fascio, perchè l'involuzione che quelle determinano fra i punti di γ sarà trasformata dall'antiprojettività data in un'involuzione fra i punti di γ' (n. 2). — Similmente si vedrebbe che un'antiprojettività data ad arbitrio fra i punti di due cubiche sghembe γ, γ' determina nello spazio un'anticollineazione che fa corrispondere le due cubiche precisamente secondo quell'antiprojettività. Ecc. ecc.

Così pure per determinare nello spazio un'anticollineazione che faccia corrispondere fra loro due date quadriche γ, γ' si possono assumere ad arbitrio le due antiprojettività che essa determina fra le due schiere di rette di γ e rispettivamente le due schiere (in un ordine arbitrario) di γ'. Invero allora alle generatrici di γ che s'incontrano su un dato piano π e quindi si corrispondono in una projettività saranno omologhe su γ' nelle due date antiprojettività delle generatrici che pure si corrisponderanno in una projettività e quindi s' incontreranno su un piano π'; e se π descrive un fascio, evidentemente anche π' descriverà un fascio; donde si conchiude che la corrispondenza stabilita è un'anticollineazione.

Se in queste proposizioni si suppone che le due coniche, o le due cubiche sghembe, o le due quadriche, siano sovrapposte in una, si ha il modo di determinare tutte *le anticollineazioni che trasformano in se stessa una data conica, o una data cubica sghemba, o una data quadrica,* cioè che sono *permutabili* alla *polarità* che da questo ente vien determinata. Facendo il prodotto di questa polarità e di quelle anticollineazioni si avrebbero poi *le antireciprocità che trasformano in se stessa una data conica, o cubica sghemba, o quadrica.* Come si vede tutte le determinazioni di tali antiprojettività si riducono a quelle di antiprojettività su forme semplici. Le anticollineazioni e le antireciprocità che mutano in se stessa una quadrica sarebbero poi (come le collineazioni e le reciprocità) da distinguersi in due specie, secondo che mutano ciascuna schiera di generatrici in se stessa ovvero scambiano fra loro le due schiere.

8. Occupiamoci ora brevemente, escludendo però le antiprojettività involutorie, alle quali saranno invece dedicati i cap.[i] seguenti, degli *elementi uniti delle antiprojettività tra forme sovrapposte,* ed in pari tempo delle *coppie di elementi involutori*, chiamando *involutorio* rispetto ad una corrispondenza ogni elemento a cui in questa corrisponda in doppio modo (cioè rispetto alla corrispondenza stessa e rispetto alla sua inversa) uno stesso altro elemento (che sarà pure involutorio). È chiaro che ogni elemento il quale sia unito oppure involutorio per un'antiprojettività sarà unito per la projettività (collineazione) quadrato di questa, e viceversa ogni elemento unito della projettività quadrato sarà unito oppure involutorio per l'antiprojettività. Da ciò e dalle cose note sul numero e sulla posizione degli elementi uniti delle projettività nelle varie forme si traggono subito le seguenti proposizioni. In esse si osserverà una distinzione di casi generali che non ha l'analoga nelle projettività: che ciascuno di quei casi sia possibile risulta dai modi che già conosciamo per determinare le corrispondenze antiprojettive; che poi non conduca necessariamente a corrispondenze involutorie (come si potrebbe per alcuni casi sospettare, ricordando certe proposizioni note sulle involuzioni semplici e sulle polarità nel piano e nello spazio) risulterà da cose che si vedranno poi su queste.

Un'antiprojettività su una forma semplice può *in generale* presentare due casi: avere cioè due elementi uniti, e nessun elemento involutorio; oppure non avere alcun elemento unito ed averne due involutori [25] [26].

---

[25] Come caso intermedio, *particolare*, si avrebbe quello in cui vi è un solo elemento unito, corrispondentemente al caso in cui la projettività quadrato ha un solo elemento unito. Ma qui, ed anche in seguito, mi limiterò quasi sempre ai casi generali.

[26] Alla considerazione dei due elementi uniti nel 1^0 caso, e dei due elementi involutori nel 2^0 si possono collegare notevoli *proprietà metriche delle antiprojettività.*

Come per le corrispondenze projettive la proprietà metrica fondamentale consiste nell'uguaglianza dei birapporti omologhi, così per quelle antiprojettive essa consiste nel fatto (n. 1) che i birapporti omologhi sono coniugati. Da questa si derivano varie altre relazioni particolari con procedimenti simili in parte a quelli usati nell'ordinaria geometria.

Così se M, N sono due punti uniti di due punteggiate antiprojettive sovrapposte ed A, A' e B, B' due coppie qualunque di punti omologhi, sarà $(MNAB)$ coniugato a $(MNA'B')$, cioè questi due birapporti avranno moduli uguali ed argomenti opposti (a meno di un multiplo di 2π). Sviluppandoli si deduce

$$\text{mod.}\left(\frac{MA}{NA} : \frac{MA'}{NA'}\right) = \text{mod.}\left(\frac{MB}{NB} : \frac{MB'}{NB'}\right)$$

ed

$$\text{arg.}\,\frac{MA.MA'}{NA.NA'} = \text{arg.}\,\frac{MB.MB'}{NB.NB'},$$

ossia

$$\text{mod.}\,(MNAA') = \text{cost.} \tag{1}$$

$$\text{arg.}\,\frac{MA.MA'}{NA.NA'} = \text{cost.}, \tag{2}$$

ove s'intende che A, A' sia una coppia *variabile* di punti omologhi.

Con le stesse convenzioni, se M, N anzi che punti uniti sono due punti corrispondentisi in doppio modo nelle due punteggiate antiprojettive, e però involutori, si ottiene similmente:

$$\text{mod.}\,\frac{MA.MA'}{NA.NA'} = \text{cost.} \tag{3}$$

$$\text{arg.}\,(MNAA') = \text{cost.} \tag{4}$$

Aggiungiamo due altre relazioni, che si ottengono considerando i *punti limiti* I, L' delle due punteggiate (cioè gli omologhi dei punti all'infinito) ed esprimendo che sono coniugati i birapporti $(I\infty AB)$ e $(\infty L'A'B')$; esse sono:

$$\text{mod.}\,(IA.L'A') = \text{cost.} \tag{5}$$

$$\text{arg.}\,\frac{IA}{L'A'} = \text{cost.} \tag{6}$$

Un'anticollineazione piana *generale* può avere per elementi uniti i vertici ed i lati di un triangolo e non avere alcun elemento involutorio; oppure può avere solo un punto unito ed una retta unita, ma due punti involutori su questa, congiunti a quello da due rette involutorie. Fra i casi particolari che si possono presentare è notevole quello in cui l'anticollineazione, senz'essere involutoria, ha un'infinità di elementi uniti; il suo quadrato deve allora ridursi ad un'omologia e l'antiprojettività involutoria che sull'asse di questa (od intorno al suo centro) vien determinata dall'anticollineazione deve avere un'infinità di punti uniti (o rette unite); questi insieme col centro d'omologia daranno tutti i punti uniti dell'anticollineazione.

Un'anticollineazione spaziale può in generale dar luogo a 3 casi: 1^0 avendo per elementi uniti tutti gli elementi di un tetraedro, senz'avere alcun elemento involutorio; 2^0 avendo due punti uniti e due piani uniti passanti rispettivamente per essi, ed inoltre due punti involutori sulla retta d'intersezione di questi piani, e due piani involutori che rispettivamente li congiungono alla retta contenente i due punti uniti; 3^0 non avendo alcun punto o piano unito, ma due coppie di punti involutori rispettivamente su due rette unite e due coppie di piani involutori passanti rispettivamente per queste. Può però l'anticollineazione, avendo per quadrato una collineazione con una o due rette di punti uniti ovvero un'omologia, acquistare infiniti punti uniti su una o su due rette o su un piano; ecc.

Tralasciamo per brevità i casi particolari in cui i punti all'infinito delle due punteggiate si corrispondono, ecc., e solo osserviamo che ciascuna delle tre coppie di relazioni (1), (2); (3), (4); (5), (6), ove vi si considerino ancora A, A' come mobili, può servire a definire l'antiprojettività. Del resto tali relazioni che corrispondono ad alcune proprietà ben note delle punteggiate projettive, equivalgono ad altre relative alle affinità circolari del MÖBIUS; in particolare le (5) e (6) coincidono in sostanza col § 9 della *Theorie der Kreisverwandtschaft* già citata.

Se anzi che di punteggiate si tratta di fasci (di rette o di piani) antiprojettivi, le relazioni (1), (2), (3), (4) si conservano purchè i segmenti si sostituiscano con seni di angoli. Si noti poi che, allo stesso modo che per due fasci projettivi, per due fasci antiprojettivi vi son sempre due elementi ad angolo retto I, L dell'uno, cui corrispondono nell'altro due elementi I', L' pure perpendicolari fra loro. (Sono infinite siffatte coppie quando ai due *elementi ciclici* od *assoluti* dell'un fascio corrispondono nell'altro i due elementi ciclici: in due tali fasci antiprojettivi due angoli omologhi qualunque hanno valori che si possono assumere come coniugati). Come analoghe alle (5), (6) si ottengono allora le relazioni

$$(5') \qquad \text{mod.}\, \frac{\operatorname{tg} IA}{\operatorname{tg} I'A'} = \text{cost.}$$

$$(6') \qquad \text{arg.}\,(\operatorname{tg} IA \,.\, \operatorname{tg} I'A') = \text{cost.}$$

Un'antireciprocità piana *generale* ammette tre punti involutori e tre rette involutorie, vertici e lati di un triangolo. O accade che rispetto all'antireciprocità a ciascun vertice corrisponde (in doppio modo) il lato opposto, oppure questo si verifica solo per un vertice, mentre a ciascuno degli altri corrisponde un lato che lo contiene. Ma può presentarsi il caso particolare in cui tutti i punti di una retta (e tutte le rette di un fascio) sono involutori, ecc.

Infine un'antireciprocità spaziale ha in generale per elementi involutori quelli di un tetraedro. O a ciascun vertice di questo corrisponde la faccia opposta; o ciò accade solo per due vertici, mentre ad ognuno degli altri due corrisponde una faccia passante per esso; o finalmente ogni vertice corrisponde ad una faccia che lo contiene. In casi particolari possono esservi infiniti punti involutori su una o su due rette o su un piano, ecc.

9. Terminiamo queste considerazioni generali sulle antiprojettività col darne la *rappresentazione analitica.* La si può dedurre subito da quella particolare che al n. 1 si trovò per le forme di 1ª specie (ovvero anche dal riguardare, come al n. 6, un'antiprojettività quale prodotto del coniugio e di una projettività). Da questa discende infatti che, se si chiamano x_l, x'_l le coordinate degli elementi omologhi di due forme qualunque antiprojettive quando per elementi di riferimento (fondamentali ed unità) si prendano in esse elementi omologhi, si avrà:

$$x'_l = \bar{x}_l .$$

Se invece i sistemi di riferimento nelle due forme si prendono ad arbitrio, la nota forma analitica della trasformazione di coordinate ci conduce dalle precedenti alle seguenti formole per la corrispondenza antiprojettiva

$$x'_l = \sum_m a_{lm}\, \bar{x}_m ,$$

donde risolvendo

$$\bar{x}_m = \sum_l \alpha_{lm}\, x'_l ,$$

e prendendo i coniugati dei due membri:

$$x_m = \sum_l \bar{\alpha}_{lm}\, \bar{x}'_l .$$

Si vede dunque che nel caso più generale *le coordinate di un elemento dell'una forma si esprimono come forme lineari dei coniugati delle coordinate dell'elemento omologo nell'altra forma.*

Nello stesso modo come una projettività si rappresenta con un'equazione bilineare, così un'antiprojettività si può anche rappresentare con un'equazione della forma

$$\Sigma\, a_{lm}\, x_l\, \overline{x}'_m = 0\,,$$

che equivale alla coniugata

$$\Sigma\, \overline{a}_{lm}\, \overline{x}_l\, x'_m = 0\,.$$

Si deve allora intendere che ad es. se si tratta di un'antireciprocità fra due spazi, le x ed x' siano coordinate di due punti *reciproci*, cioè tali che l'uno giaccia sul piano omologo dell'altro; ed analogamente negli altri casi.

10. Da queste rappresentazioni analitiche risulta subito che un'antiprojettività ha per *invariante* il determinante dei coefficienti a_{lm}(27): invero eseguendo sulle variabili x e sulle x' della forma $\Sigma\, a_{lm}\, x_l\, \overline{x}'_m$ due sostituzioni lineari, quel determinante verrà solo a moltiplicarsi pel determinante della 1ª sostituzione e pel coniugato di quello della 2ª.

Perchè le corrispondenze definite analiticamente nei modi detti siano univoche completamente, come finora supponevamo, bisogna escludere il caso che quel determinante dei coefficienti a_{lm} sia nullo. Però per maggior generalità si possono anche in questo caso considerare quelle corrispondenze come antiprojettività (*degeneri*), e si potranno distinguere in *degeneri di* 1ª, 2ª, 3ª, ... *specie* secondo che non sono tutti nulli i primi suddeterminanti del detto determinante, oppure sono tutti nulli, o sono anche nulli i suddeterminanti secondi, ecc. ecc. Le proprietà di tali corrispondenze sono affatto analoghe a quelle delle projettività degeneri e si possono ottenere subito sia direttamente in modo simile a quello che si usa per queste, sia considerandole come prodotti di antiprojettività non degeneri (per es. del coniugio) e di projettività degeneri.

Così un'antiprojettività degenere fra due forme semplici coincide perfettamente con una projettività degenere. — Un'anticollineazione degenere (di 1ª specie) fra due piani determina su questi rispetti-

---

(27) Rappresentando l'equazione dell'antiprojettività simbolicamente con

$$a_x\, \overline{a}'_{\overline{x}'} \equiv b_x\, \overline{b}'_{\overline{x}'} \equiv c_x\, \overline{c}'_{\overline{x}'} \equiv \ldots = 0$$

quel determinante si potrà, a seconda che si è nel campo binario, o ternario, ... rappresentare con $(ab)\,(\overline{a}'\,\overline{b}')$, oppure $(abc)\,(\overline{a}'\,\overline{b}'\,\overline{c}')$, ...

vamente un fascio di rette ed una punteggiata riferiti antiprojettivamente fra loro (coi sostegni negli elementi *singolari* della corrispondenza). Analogamente un'antireciprocità degenere fra due piani riferisce antiprojettivamente tra loro certi due fasci di rette (oppure certe due punteggiate) sicchè ad ogni punto di una retta dell'un fascio corrisponde la retta omologa dell'altro fascio, ecc. — Similmente le anticollineazioni ed antireciprocità degeneri dello spazio non conducono in sostanza che ad antiprojettività (non degeneri) fra forme di 2ª o di 1ª specie.

Come nella consueta trattazione della Geometria projettiva, così nella teoria attuale le corrispondenze tra forme sovrapposte che meritano prima di tutte uno studio speciale sono quelle involutorie. Per analogia chiameremo *antinvoluzioni* ed *antipolarità* rispettivamente le anticollineazioni e le antireciprocità involutorie [28]; di esse tratteranno le Note seguenti.

Delle antinvoluzioni e delle catene.

11. Per giungere subito alla nozione, molto importante, delle *catene*, cominciamo a considerare un modo assai semplice (ma non generale) che serve per determinare delle antinvoluzioni in ogni forma geometrica.

È un'antinvoluzione, cioè un'antiprojettività coincidente con la propria inversa (ossia avente per quadrato l'identità), l'antiprojettività che vien determinata (v. nⁱ 1 e 5) in una forma di specie r dando $r+2$ elementi indipendenti come elementi uniti: così in una forma qualunque di 1ª specie l'antiprojettività determinata da 3 dati elementi uniti; in un piano, ovvero nello spazio, l'anticollineazione che s'individua dando 4 punti (o rette, o 3 punti ed 1 retta), ovvero 5 punti (o piani, ecc.), come elementi uniti; ecc.

Similmente, e più in generale, è chiaro che riesce pure un'antinvoluzione l'antiprojettività che in una forma di specie r si determina dando k coppie di elementi che si corrispondano in doppio modo (ove $2k \leq r+2$) ed $r-2k+2$ altri elementi come elementi uniti (con la condizione che tutti gli elementi dati siano indipendenti). Così si determinano delle antinvoluzioni: nelle forme di 1ª specie dando un elemento unito e due elementi omologhi; nel piano dando due

[28] Le antinvoluzioni in forme di 1ª specie appariranno come analoghe tanto alle antinvoluzioni quanto alle antipolarità delle forme di 2ª e 3ª specie.

punti uniti e due punti omologhi, oppure due coppie di punti omologhi; nello spazio dando 3 punti uniti e due punti omologhi, ovvero un punto unito e due coppie di punti omologhi; ecc.

Se in una forma reale di specie r si considera la corrispondenza di *coniugio*, si ha appunto (n. 6) un'antinvoluzione della natura che in tali determinazioni è considerata: essa ha per elementi uniti tutti gli elementi reali della forma.

12. Due antinvoluzioni in forme di specie r della natura precedente, cioè tali che in ognuna di esse esistano almeno $r+2$ elementi uniti indipendenti (e vedremo che così sono tutte le antinvoluzioni che hanno elementi uniti), sono sempre projettive (ed antiprojettive) fra loro in infiniti modi. Invero la projettività (e l'antiprojettività) fra le due forme in cui ad $r+2$ elementi uniti indipendenti di un'antinvoluzione corrispondono altrettanti elementi uniti indipendenti dell'altra trasformerà quella in questa (n. prec.).

Ne segue che una siffatta antinvoluzione è projettiva (ed antiprojettiva) alla corrispondenza di coniugio in una forma reale di specie r. Essa avrà dunque, precisamente come questa, una ∞^r di elementi uniti e non soltanto gli $r+2$ da cui partimmo. Chiameremo *catena di specie* r o *catena* r-*pla* (*fondamentale* per l'antinvoluzione) l'insieme di tutti questi elementi uniti. E dalle cose precedenti, particolarmente dalla considerazione delle forme reali, le quali nelle varietà costituite dai loro elementi reali ci dànno delle particolari catene, si potrebbero già trarre varie proprietà delle catene. Così: *Una catena di una forma semplice è individuata da 3 elementi. Una catena di 2ª specie nel piano (o catena piana) s'individua dandone 4 punti indipendenti, oppure 4 rette indipendenti (o 3 punti ed una retta, ecc.). Una catena di 3ª specie (o catena spaziale) è individuata da 5 punti indipendenti, oppure da 5 piani indipendenti. — Per trasformazioni projettive (od antiprojettive) ed in particolare per projezioni e sezioni (univoche) le catene si mutano in catene della stessa specie. Viceversa due catene della stessa specie son sempre projettive (od antiprojettive) fra loro. — Ogni catena è una varietà continua.* — Ogni catena di 2ª o di 3ª specie contiene infinite catene di specie inferiore. Così *una catena piana contiene ∞^2 catene di 1ª specie di punti (catene rettilinee): ogni retta della catena piana la sega secondo una di quelle catene rettilinee* (29), *sicchè per*

(29) Non occorre avvertire che dicendo *retta di una catena piana* consideriamo questa come una ∞^2 *di rette* e non intendiamo dire che la retta giaccia con tutti i suoi punti nella catena piana considerata come luogo *di punti*. Vediamo invece che su questa vi sarà solo una catena rettilinea di punti della retta.

due punti qualunque della catena piana passa una catena rettilinea (ed una retta) di questa, mentre viceversa due catene rettilinee (od anche due rette) della catena piana si segano in un punto di questa. Dualmente le rette della catena piana che passano per un suo punto formano una catena di 1ª specie, ecc. ecc. *Una catena spaziale ha i suoi punti situati su ∞^4 catene rettilinee e su ∞^3 catene piane: per 2 qualunque dei suoi punti passa una catena rettilinea, per 3 punti non posti in una catena rettilinea, passa una catena piana; due catene piane si tagliano secondo una catena rettilinea; una catena piana ed una rettilinea che non vi giaccia hanno comune un punto. Ogni piano della catena spaziale la sega secondo una catena piana; ecc. ecc.* — Brevemente possiamo dire che *la geometria projettiva su una catena di specie* r *coincide colla geometria projettiva degli elementi reali su una forma reale di specie* r.

13. Da questo fatto (che nel seguito di questo Saggio accadrà più volte di applicare senza dirlo) discende subito che le tetradi composte di elementi di una catena semplice sono neutre, cioè hanno valori reali, e viceversa ogni tetrade neutra appartiene ad una catena. E più in generale gli elementi di una forma di specie r i quali hanno, rispetto ad $r+2$ di essi come elementi di riferimento, coordinate projettive reali sono appunto gli elementi della catena di specie r determinata da quegli $r+2$. Queste proposizioni del resto scaturiscono anche dalle prime considerazioni di questo lavoro (n. 2), le quali mostrano che una tetrade è antiprojettiva a se stessa solo quando essa è neutra; basta in fatti riflettere che ogni gruppo di elementi di una catena è, per la stessa definizione di questa, antiprojettivo a se stesso.

La catena determinata in una forma semplice da 3 dati elementi si può anche costruire a questo modo. Essa contiene ogni elemento che con quei 3 formi un gruppo armonico; poi ogni elemento che con 3 di quelli che già si hanno (tra i dati ed i costrutti) formi un gruppo armonico; e così via. Ogni elemento della catena si otterrà per questa via o direttamente o come limite.

Similmente la catena di 2ª specie determinata da 4 punti indipendenti dati su di un piano contiene anche i punti in cui si tagliano le rette che congiungono quei 4 a due a due (rette della catena, perchè unite nell'antinvoluzione determinata dai 4 punti come punti uniti); poi i punti in cui si tagliano ancora le rette che congiungono i punti che già si hanno; e così via. Ogni punto della catena si otterrà a questo modo, direttamente o come limite.

Analogamente si possono ottenere le altre catene di 2ª specie e quelle di 3ª.

14. Le proprietà precedenti si rispecchiano tutte nella seguente *rappresentazione analitica (parametrica) delle catene*, rappresentazione che deriva immediatamente da quelle proprietà. Indichino a_l, b_l, c_l, ... le coordinate fisse dei punti a, b, c, ... , mentre λ, μ, ν, ... siano parametri *reali* variabili: allora, al mutar di questi, i punti di coordinate

(1) $$\lambda a_l + \mu b_l\,,$$

(2) $$\lambda a_l + \mu b_l + \nu c_l\,,$$

(3) $$\lambda a_l + \mu b_l + \nu c_l + \pi d_l\,,$$

descrivono rispettivamente una catena semplice (rettilinea), una catena doppia (piana) ed una tripla (spaziale). La corrispondenza fra i punti di queste catene ed i rapporti di quei parametri è univoca, *senz'eccezione*.

In ciò però si è supposto tacitamente che i punti a, b, c, ... fossero indipendenti. Ponendo ora l'ipotesi contraria avremo dalle (1), (2), (3) le rappresentazioni di quelle stesse *catene degeneri* a cui si giungerebbe applicando alle antinvoluzioni quanto si disse in generale al n. 10 intorno alle antiprojettività degeneri.

Anzitutto se sopra una data retta i due punti a, b coincidono, la catena rettilinea che era rappresentata da (1) degenera riducendosi a quell'unico punto; e questo punto (*singolare*) corrisponde, esso solo, a tutti gl'infiniti valori di $\lambda : \mu$.

Se poi nella (2) a, b, c son tre punti di una retta, allora è chiaro che, se fra le coordinate scelte per essi ha luogo un *legame lineare reale*, cioè se per i vari valori di l le a_l, b_l, c_l costituiscono altrettante soluzioni di una stessa equazione lineare omogenea a coefficienti reali, od in altri termini se, nel campo binario, son reali i rapporti dei determinanti (bc), (ca), (ab), la (2) si potrà ridurre a contenere linearmente due soli parametri omogenei reali, e però rappresenterà solo una catena rettilinea, ogni punto della quale corrisponderà ad infiniti valori di $\lambda : \mu : \nu$. — Ma se fra quelle coordinate di a, b, c non esiste un legame siffatto, allora con valori convenienti di questi rapporti la (2) potrà rappresentare le coordinate di ogni punto della retta. In tal caso se un punto corrisponde in pari tempo a due gruppi di valori per λ, μ, ν non proporzionali fra loro, sicchè si abbia

$$s(\lambda a_l + \mu b_l + \nu c_l) = s'(\lambda' a_l + \mu' b_l + \nu' c_l),$$

se ne trae, ponendo

$$\alpha + i\alpha_1 = (bc)\,, \qquad \beta + i\beta_1 = (ca)\,, \qquad \gamma + i\gamma_1 = (ab)\,,$$

che si possono prendere s, s' per modo che

$$s\lambda - s'\lambda' = \alpha + i\alpha_1 , \quad s\mu - s'\mu' = \beta + i\beta_1 , \quad s\nu - s'\nu' = \gamma + i\gamma_1 .$$

Ora da ciò segue subito che quello stesso punto corrisponde anche al porre nella (2) in luogo di λ, μ, ν rispettivamente (le combinazioni lineari di λ, μ, ν; λ', μ', ν') α, β, γ, oppure anche $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, o più in generale $\alpha + k\alpha_1$, $\beta + k\beta_1$, $\gamma + k\gamma_1$, ove k indichi un numero reale qualunque. Vi è dunque sulla retta un sol punto *singolare*, cioè corrispondente ad infiniti valori di $\lambda : \mu : \nu$, quando la retta si rappresenta colla (2), vale a dire si considera come una catena piana degenere.

Consideriamo ora similmente i punti rappresentati dalla (3), ove a, b, c, d stiano tutti in un piano. Se fra le coordinate scelte per questi, a_l, b_l, c_l, d_l, esiste un legame lineare reale (cioè se son reali i rapporti dei determinanti del 3° ordine formati con esse), la (3) non rappresenterà che i punti di una catena piana (ognuno contato infinite volte). — Nel caso generale invece, in cui non ha luogo un tal legame, essa rappresenta ∞^3 punti; e si vede, come si fece testè per la (2), che ogni punto corrisponde in generale ad un sol gruppo di valori per $\lambda : \mu : \nu : \pi$. Fa solo eccezione un punto *singolare*, che, posto

$$\alpha + i\,\alpha_1 = (bcd)\,, \qquad \beta + i\,\beta_1 = -(acd),$$
$$\gamma + i\,\gamma_1 = (abd)\,, \qquad \delta + i\,\delta_1 = -(abc)\,,$$

si ottiene dalla (3) mettendovi in luogo di λ, μ, ν, π rispettivamente

$$\alpha + k\,\alpha_1\,, \ \beta + k\,\beta_1\,, \ \gamma + k\,\gamma_1\,, \ \delta + k\,\delta_1\,,$$

ove k indichi un numero reale qualunque. Ora segando quella ∞^3 con una retta qualunque del piano, cioè assoggettando le coordinate (3) a soddisfare l'equazione della retta, si vengono a legare i parametri λ, μ, ν, π con due equazioni lineari a coefficienti reali, le quali possono però anche coincidere; quindi i punti dell'intersezione verranno ad avere per coordinate delle forme lineari di due, o eccezionalmente di tre, parametri reali variabili (che si posson scegliere fra λ, μ, ν, π), e formeranno in conseguenza una catena. Ma se la retta passa pel punto singolare della ∞^3, quell'intersezione dovrà pure averlo per punto singolare, sicchè ove la retta non abbia tutti i suoi punti nella ∞^3, la catena rettilinea in cui la sega dovrà degenerare in quell'unico punto. Dunque il sistema dei punti rappresentati dalla (3) si compone nel caso attuale di tutte le rette che dal punto singolare projettano una catena rettilinea, cioè degli ∞^3

punti situati sulle ∞^1 *rette di una catena semplice (di un fascio).* Questo ente appare così come una catena spaziale degenere ([30]).

Valendoci di questi risultati e di ragionamenti analoghi ai precedenti possiamo similmente vedere che cosa costituiscano i punti dello spazio che hanno per coordinate delle forme lineari di 5 o di 6 parametri reali

$$\lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i + \pi d_i + \varrho e_i \tag{4}$$

$$\lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i + \pi d_i + \varrho e_i + \sigma f_i\,. \tag{5}$$

Supposto che fra le coordinate $a_i, \ldots, f_i$ non esista legame lineare reale (escludendo cioè i casi in cui si ritornerebbe agli enti già studiati), i punti rappresentati dalle (4) e (5) costituiscono rispettivamente una ∞^4 ed una ∞^5, corrispondendo ogni punto in generale ad un sol gruppo di rapporti pei parametri $\lambda, \mu, \ldots$ — Fa eccezione per la (4) un punto singolare. Un piano qualunque sega la ∞^4 secondo (un ente rappresentabile al modo della (2), cioè) una catena piana; ma se il piano passa pel punto singolare, questo sarà pur tale per la sezione, la quale perciò degenererà in una retta passante per quel punto (a meno che, per eccezione, la sezione si possa rappresentare nel piano con la (3), nel qual caso si ridurrà ad una catena di rette uscente dal punto stesso). Dunque l'ente rappresentato da (4) si compone degli ∞^4 punti posti sulle rette che da un punto projettano una catena piana, cioè *delle rette di una stella costituenti in questa una catena doppia.* — Però se i punti $a, b, \ldots$ che compaiono nella (4) giacciono tutti in un piano, quella formola rappresenta in generale gli ∞^4 punti del piano stesso, ma in modo che tutti i punti di una certa retta figurano come *singolari*, cioè corrispondenti ad infiniti valori di $\lambda : \mu : \ldots$; su ogni altra retta del piano si ottiene uno di questi punti singolari sostituendo le coordinate (4) nell'equazione della retta e deducendone la rappresentazione di questa mediante la (2).

([30]) È chiaro che l'ente rappresentato dalla (3), in cui a, b, c, d stanno in un piano, si può considerare come projezione (centrale) di un ente analogo ma non soggetto a questa condizione, cioè di una catena spaziale propriamente detta. Da ciò si sarebbe potuto dedurre immediatamente che esso è composto come sopra si trova, cioè di una catena semplice di rette. E analogamente si sarebbe potuto ottenere il risultato corrispondente relativo alla (2). Ma per applicare una considerazione della stessa natura agli enti dello spazio ordinario che ora passiamo a considerare, rappresentati dalle (4) e (5), bisognerebbe valersi degli spazi superiori e delle catene che ad essi appartengono (V. la nota ([31])).

La ∞^5 di punti rappresentata da (5) è segata da ogni piano che non vi giaccia secondo (un ente rappresentabile con la (3), cioè) una catena semplice di rette: essa ha dunque infiniti punti singolari. Un piano passante per due di questi darà per sezione una catena con due punti singolari, cioè una sola retta, oppure starà tutto nell'ente considerato (ed in ambo i casi avrà una retta di punti singolari). Ne segue che quegli ∞^5 punti costituiscono *i piani di una catena semplice di un fascio di piani.* Ecc. ecc. (31).

15. I risultati del num. prec. possono trovare applicazioni molto importanti agli *elementi tangenti* (ed ai *contatti mutui*) *di enti qualunque composti d'infiniti punti.* Tali applicazioni, che per la presente Nota costituiranno una piccola digressione, saranno invece utilissime per altri lavori (32).

Consideriamo un ente qualsiasi, luogo dei punti le cui coordinate x, y, z sono funzioni date dei parametri *reali* indipendenti $u, v, \ldots$. Diciamo *tangente* a quell'ente nel punto (x, y, z) ogni retta che lo congiunga ad un punto infinitamente vicino dell'ente stesso. Come coordinate di tal retta (nella stella) si possono assumere i differenziali totali dx, dy, dz, i quali sono espressi da

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \ldots,$$

ecc., purchè il punto (x, y, z) non sia *singolare*, cioè ammetta dei valori ben determinati e non tutti nulli per quelle prime derivate

(31) Le *catene di punti degli spazi superiori* si possono anch'esse definire sia come luoghi di punti uniti di antinvoluzioni di quegli spazi, sia come composte dai punti le cui coordinate sono forme lineari date di un numero qualsiasi di parametri *reali* variabili. Ciò posto, le catene che essenzialmente *appartengono* ad un S_d sono: quelle non degeneri composte di ∞^d punti (punti uniti di un'antinvoluzione non degenere); poi quelle degeneri $\infty^{d+1}, \infty^{d+2}, \ldots, \infty^{2d-1}$ composte degli elementi che projettano da un punto, da una retta, ..., da un S_{d-2} rispettivamente le catene non degeneri di $S_{d-1}, S_{d-2}, \ldots, S_1$; ed infine la ∞^{2d} composta di tutti i punti di S_d, la quale pure (con un certo S_{d-1} come luogo di punti singolari) figura come catena degenere. — Per projezioni o sezioni *qualunque* da catene si otterranno sempre catene.

(32) Il lettore potrà fin d'ora vedere a che cosa si riducano per gli enti costituiti dai punti di una *catena* le rette ed i piani tangenti di cui tratteremo in generale. Nei Capi segui si otterranno poi direttamente per gli elementi tangenti ad iperconiche, iperquadriche e loro intersezioni le proprietà che ora stabiliamo per enti qualunque.

parziali di ogni coordinata. Ora essendo quelle espressioni forme lineari nelle variabili reali indipendenti $du, dv, \ldots$, ne segue, pel num. precedente, che *le tangenti in un punto qualunque non singolare formano una catena, generale o degenere,* della stella che ha quel punto per centro. Più precisamente separando fra loro i vari casi, ed applicando i singoli risultati di quel num. (ove $\lambda, \mu, \ldots$ son sostituiti da $du, dv, \ldots$, i *punti* son sostituiti da *rette* della stella, ed in particolare i punti che ivi apparivano come *singolari*, cioè corrispondenti ad infiniti valori di $\lambda : \mu : \ldots$, da *tangenti singolari*, cioè corrispondenti ad infiniti valori dei rapporti di differenziali $du : dv : \ldots$) abbiamo le proposizioni seguenti.

In ogni punto non singolare di un ente ∞^1 vi è una sola tangente.

Le tangenti ad un ente ∞^2 in un punto non singolare stanno tutte in un fascio e vi formano una catena semplice; il loro piano comune si può chiamare il *piano tangente* all'ente. Il punto può per eccezione ammettere una sola tangente (catena semplice degenere), e quindi un fascio di piani tangenti: tale eccezione si verifica per tutti i punti dell'ente ∞^2 se questo è una *curva* (cfr. la 2ª pag. dell'introduzione).

Per un ente ∞^3 le tangenti in un punto non singolare formano una catena doppia della stella; gli ∞^2 piani di questa catena sono *piani tangenti* all'ente in quel punto, in questo senso che, mentre ogni altro piano passante pel punto ne contiene una sola tangente, ciascuno di quei piani ne contiene una catena semplice di tangenti (sicchè l'ente ∞^1 secondo cui esso può segare l'ente dato ha il punto considerato per punto singolare). — La catena doppia può degenerare: allora le tangenti all'ente ∞^3 nel detto punto sono le rette di un fascio, e fra esse ve n'è una *singolare*, (come fra i piani tangenti, che sono allora tutti i piani passanti per questa retta, ve n'è uno *singolare*, che è il piano di tutte le tangenti). Questo caso si presenta sempre se l'ente ∞^3 è *piano*: allora ogni retta passante per un suo punto non singolare e giacente nel suo piano è tangente ed incontra l'ente in generale secondo una ∞^1 contenente quel punto; ma per la retta singolare accade che quel punto è singolare nella ∞^1 d'intersezione (la quale può anche ridursi a punti isolati). È opportuno in tal caso limitare la denominazione di «tangente» a questa retta singolare ([33]).

([33]) La sua equazione si trova facilmente, sia applicando le espressioni (n. 14) delle coordinate del punto singolare di una retta considerata come catena

Le tangenti ad un ente ∞^4 in un punto non singolare riempiono i piani di una catena semplice; l'asse del fascio di piani cui questa catena appartiene è una *tangente singolare*; gli ∞^1 piani della catena sono i *piani tangenti*. Per ciascuno di questi l'intersezione (∞^2 in generale) coll'ente ∞^4 ha nel punto considerato un punto singolare, poichè esso ha per tangenti tutte le rette del piano; laddove per un altro piano qualunque quell'intersezione ha per tangenti le rette della catena semplice sezione della catena dei piani tangenti, ed ha in particolare una sola tangente nella tangente singolare dell'∞^4, se il piano, senz'essere tangente, passa per questa. — In casi particolari la catena dei piani tangenti può degenerare riducendosi ad un unico piano tangente: allora si hanno solo più ∞^2 rette tangenti, esse formano un fascio in quel piano e sono tutte singolari. Questa particolarità si presenta per tutti i punti della ∞^4, quando questa costituisce una *superficie*.

Per un ente ∞^5 tutte le rette uscenti da un punto sono tangenti, in quanto che lo congiungono ai punti infinitamente vicini. Esse ci appaiono come costituenti una catena ∞^4 degenere, e però fra esse ve ne sarà un fascio di singolari, alle quali converrà riservare la denominazione di «tangenti». Queste rette

piana degenere, sia scrivendo che il punto di cui si tratta è singolare per la detta intersezione della retta coll'ente. Se questo è rappresentato in coordinate non omogenee dall'equazione reale

$$f(x, y, \bar{x}, \bar{y}) = 0 \, ,$$

la tangente nel punto (x, y) ha per equazione:

$$(X - x) \frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \, ;$$

se invece l'ente ∞^3 è dato in coordinate omogenee dall'equazione reale

$$f(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0 \, ,$$

l'equazione della tangente in x diventa:

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0 \, .$$

(Cfr. una nota dell'introduzione). Il punto è singolare se quest'equazione si riduce ad un'identità, cioè se s'annullano le prime derivate parziali di f rispetto alle coordinate x_i (donde segue anche l'annullarsi delle prime derivate di f rispetto alle $\bar{x_i}$, poichè in causa della realtà della forma f queste derivate sono coniugate di quelle).

particolari presentano fatti analoghi alle tangenti già considerate di un ente piano ∞^3; e sono appunto le tangenti agli enti ∞^3 che si ottengono come sezioni piane dell'∞^5. Il loro piano, *piano tangente* a questo nel punto di cui si tratta, dà una sezione piana per cui quel punto è singolare ([34]).

Stando alla primitiva definizione delle rette tangenti è evidente che se due enti di diversa dimensione sono contenuti l'uno nell'altro, le tangenti di quello son pure tangenti di questo. Ne derivano le proposizioni seguenti, in cui degli enti di cui si parla si suppone sempre che l'uno stia nell'altro, e gli elementi tangenti si considerano tutti per uno stesso punto.

La tangente all'∞^1 fa parte della catena semplice delle tangenti all'ente ∞^2. La catena semplice delle tangenti all'∞^2 sta nella catena doppia delle tangenti all'∞^3; e però il piano tangente all'∞^2 sta fra i piani tangenti dell'∞^3. La catena doppia delle tangenti all'∞^3 sta nella catena semplice dei piani tangenti all'ente ∞^4; vale a dire la tangente singolare di questo è pur tangente per l'ente ∞^3, e quella catena di piani tangenti all'∞^4 son pur tangenti per l'∞^3.

È facile vedere che una tangente singolare di un ente, corrispondendo ad infiniti valori dei differenziali $du, dv, \ldots$, è pur tangente ad ogni ente di dimensione inferiore di un'unità contenuto in quello (ente per cui quei differenziali vengono assoggettati ad un'equazione lineare). Possiamo quindi aggiungere:

La tangente ad un ente piano ∞^3 è pur tangente all'ente ∞^2. Il piano tangente all'ente ∞^5 è pure piano tangente per l'∞^4.

Tra le numerose conseguenze che si possono trarre da tutte le precedenti proposizioni fondamentali sugli enti composti d'infiniti punti vi hanno quelle relative alle tangenti che due o più enti hanno a comune in un loro punto d'intersezione. Così dal fatto che presto dimostreremo che due catene semplici di una stessa forma hanno in generale due elementi a comune, oppure nessuno, segue che due enti ∞^2 di uno stesso piano hanno in generale in ogni loro punto d'intersezione due tangenti comuni,

---

([34]) L'equazione di questo piano tangente si scrive subito per analogia con quella della retta tangente ad una ∞^3 piana data nella nota precedente, e si dimostra o in modo simile, o deducendola da quella. — Similmente si hanno analoghe condizioni analitiche perchè il punto sia singolare.

ovvero nessuna (35). In generale tutte le proprietà che vedremo in seguito relative alle intersezioni mutue delle catene si potranno applicare immediatamente alle dette questioni sulle tangenti in un punto comune ad enti qualunque.

Ed ora, abbandonando questa digressione generale sugli elementi tangenti, riprendiamo lo studio delle catene, e più generalmente delle antinvoluzioni. Ma per poterlo condurre più oltre consideriamo ora separatamente le forme delle varie specie.

16. **Forme di 1ª specie.** — È facile vedere che *in una tal forma ogni antinvoluzione o non ha alcun elemento unito, oppure ne ha una catena.* Invero se un'antinvoluzione ha un elemento unito P, e si chiamano A, A' due elementi omologhi qualunque, l'armonico Q di P rispetto ad A, A' avrà per omologo (in forza della definizione di « antiprojettività ») l'armonico di P rispetto ad A', A, cioè se stesso, sicchè Q sarà pure un elemento unito; al variare poi della coppia AA' di elementi omologhi, Q non rimarrà sempre fisso, poichè altrimenti l'antinvoluzione coinciderebbe coll'involuzione avente per elementi doppi P e Q, il che (ancora in virtù della citata definizione) non può essere. Dunque la nostra antinvoluzione ha almeno 3 elementi uniti, e però (n. 12) ne avrà infiniti costituenti appunto una catena. — Così risulta pure che, rispetto ad una coppia qualunque AA' di elementi omologhi dell'antinvoluzione avente per elementi uniti quelli di una data catena, questi si distribuiscono in coppie (analoghe alla PQ) armoniche ad AA'. Lo Staudt (B^e, 212) chiama perciò gli elementi A, A' *separati armonicamente dalla catena* (senza definirli coll'antinvoluzione, concetto che egli non introduce) ed anzi osserva che *ogni* catena passante per essi ha comuni con quella data due elementi (armonici rispetto ad essi): fatto che da ciascuna delle rappresentazioni reali ricordate nell'introduzione appare evidente.

Per completare la dimostrazione del nostro primo enunciato rimane da stabilire l'esistenza di antinvoluzioni prive di elementi

(35) È superfluo avvertire che una tangente comune in un punto dei due enti non significa ancora (come, stando alle nozioni comuni, potrebbe sembrare) un *contatto* di questi, cioè l'aver comune anche un punto infinitamente vicino a quello. Poichè su d'una retta (completa) vi sono ∞^1 punti infinitamente vicini ad un dato, e quindi, assegnando la retta (tangente) che congiunge un punto dato ad un suo infinitamente vicino, questo non risulta determinato; sarebbe invece dato ove, ad esempio, si assegnasse una catena rettilinea passante pel primo punto, sulla quale anch'esso debba stare.

uniti. Essa risulterà naturalmente da alcune proprietà comuni a tutte le antinvoluzioni che ora vedremo.

17. Si consideri una catena **C** passante per due punti omologhi A, A' di un'antinvoluzione qualunque **A**. Il prodotto di questa e dell'antinvoluzione **C** (indicando con questo stesso simbolo l'antinvoluzione che ha la catena fondamentale **C**) sarà una projettività in cui i due elementi A, A' si corrisponderanno evidentemente in doppio modo, cioè sarà un'involuzione. Ne segue [36] che le due antinvoluzioni sono permutabili, sicchè la catena **C** sarà trasformata in se stessa da **A**. Dunque *ogni catena passante per due elementi omologhi di un'antinvoluzione è trasformata in se stessa da questa, ossia è unita per questa.*

Ne discende subito che: *due coppie qualunque di elementi omologhi di un'antinvoluzione stanno in una catena* (unita). Ciò del resto risulta pure osservando che se AA' e BB' sono due coppie di elementi omologhi di un'antinvoluzione, sarà il gruppo $AA'BB'$ antiprojettivo ad $A'AB'B$, e quindi anche al gruppo, projettivo a questo, $AA'BB'$, cioè a se stesso; dunque quei quattro elementi stanno in una catena.

18. A determinare un'antinvoluzione non si possono dunque dare ad arbitrio due coppie di elementi omologhi, come si fa per le involuzioni; ma bisogna darle in guisa che stiano in una stessa catena. Questa condizione è anche sufficiente, sicchè *date ad arbitrio in una catena* **C** *due coppie* AA′, BB′ *di elementi, esiste una determinata antinvoluzione che le contiene come coppie di elementi omologhi* (in altri termini se un'antiprojettività ammette due elementi distinti A, A' che si corrispondano in doppio modo e se inoltre — condizione che non ha l'analoga nelle projettività — ha come omologhi altri due elementi B, B' posti in una catena con quelli, essa sarà involutoria). Invero il ragionamento precedente si può invertire: il gruppo $AA'BB'$ giacendo su una catena sarà antiprojettivo a se stesso e quindi anche al gruppo (projettivo) $A'AB'B$; ora quest'antiprojettività, coincidendo evidentemente coll'inversa, sarà un'antinvoluzione, in cui dunque AA', BB' son coppie di elementi omologhi.

---

(36) In forza della nota proposizione (che ci occorrerà ancora nel seguito) che: *la condizione necessaria e sufficiente perchè due corrispondenze univoche involutorie siano permutabili è che il loro prodotto sia pure una corrispondenza involutoria* (la quale poi sarà permutabile con ognuna di quelle due, dando per prodotto l'altra).

Sulla catena C, unita per l'antinvoluzione, questa determina una corrispondenza che coincide con un'involuzione ordinaria e che ha quindi due elementi uniti o nessuno secondo che sulla catena stessa le due coppie AA', BB' non si separano oppure si separano. D'altronde da un'osservazione fatta alla fine del n. 16 segue che se l'antinvoluzione ha elementi uniti, ne deve certo avere due sulla catena C. Dunque l'antinvoluzione determinata dalle due coppie AA', BB' avrà una catena di elementi uniti o non ne avrà alcuno secondo che quelle coppie sulla catena che le contiene non si separano oppure si separano. Resta così provata l'esistenza delle antinvoluzioni prive di elementi uniti ([37]).

([37]) *Sulla teoria analitica delle antinvoluzioni e delle catene nelle forme di 1ª specie.* Un'antinvoluzione di una tal forma (fra elementi x ed y) è rappresentata (cfr. n. 9) da un'equazione della forma

$$\Sigma\, a_{lm}\, x_l\, \bar{y}_m = 0\,,$$

ove (come dimostreremo più in generale nel Cap⁰ seg.) si può supporre che a_{11}, a_{22} siano reali, mentre a_{12}, a_{21} siano fra loro coniugati. Simbolicamente la stessa equazione diventa:

$$a_x\, \bar{a}_{\bar{y}} = 0\,.$$

Il determinante

$$\Delta = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} = \frac{1}{2}\,(aa')\,(\overline{aa'})$$

(ove le a' indicano simboli equivalenti alle a) è l'invariante dell'antinvoluzione. Esso è essenzialmente reale e col suo segno negativo o positivo indica rispettivamente che l'antinvoluzione ha o non ha una catena di elementi uniti. Invero l'equazione che esprimerebbe che l'elemento x è unito

$$\Sigma\, a_{lm}\, x_l\, \bar{x}_m = 0$$

si può anche scrivere in quest'altro modo:

$$(a_{11}\, x_1 + a_{21}\, x_2)\,(a_{11}\, \bar{x}_1 + a_{12}\, \bar{x}_2) + \Delta x_2\, \bar{x}_2 = 0\,,$$

che proverebbe (essendo positivi i due prodotti di quantità coniugate che vi compaiono) che Δ è negativo; e viceversa. L'invariante Δ s'annulla (cfr. n. 10) quando l'antinvoluzione degenera, cioè la catena si riduce ad un solo elemento.

Se con quell'antinvoluzione ne consideriamo un'altra

$$\Sigma\, b_{lm}\, x_l\, \bar{y}_m = 0\,, \qquad \text{ossia} \qquad b_x\, \bar{b}_{\bar{y}} = 0\,,$$

il cui determinante indichiamo con Δ_1, avremo altre forme invariantive. Come prodotto delle due antinvoluzioni si ottiene subito la projettività

$$(\bar{a}\,\bar{b})\, a_x\, b_y = 0\,,$$

19. Forme di 2ª specie. — Consideriamo un'antinvoluzione fra gli elementi di un piano (poichè a questo possiamo limitarci). Ogni retta non unita conterrà un determinato punto unito, cioè

---

la quale è involutoria quando s'annulla l'invariante (reale)

$$I = (a\,b)\,(\bar{a}\,\bar{b}) = a_{11}\,b_{22} - a_{12}\,b_{21} - a_{21}\,b_{12} + a_{22}\,b_{11}\,.$$

Dunque l'annullarsi di I esprime che le due antinvoluzioni sono permutabili. La projettività considerata ha gli elementi uniti rappresentati da

$$(\bar{a}\,\bar{b})\,a_x\,b_x = 0\,;$$

e questi elementi costituiscono o la coppia di elementi omologhi comune alle due antinvoluzioni oppure i due elementi uniti comuni a queste, cioè i due elementi d'intersezione delle loro catene: ciò a seconda che esistono tali due elementi omologhi oppure due tali elementi uniti (cfr. n. 24). Il caso intermedio fra questi è quello in cui i due elementi coincidono in un solo elemento unito comune alle due antinvoluzioni, cioè in cui le due catene sono *tangenti* fra loro: si trova subito dall'equazione di quella coppia che la condizione perchè accada questo fatto è

$$I^2 - 4\Delta\Delta_1 = 0\,.$$

Se ora si osserva che il 1º membro di quest'uguaglianza è un invariante di valore reale, il cui segno è pure invariante, si è condotti a pensare che appunto questo segno serva a distinguere i due casi di cui prima si parlava. Fra le varie dimostrazioni che di ciò si possono dare accenniamo la seguente (che serve ad introdurre un nuovo concetto). Si consideri il *fascio di antiprojettività* rappresentato, al variar di $\lambda : \mu$, dall'equazione

$$\lambda \Sigma a_{lm}\,x_l\,\bar{y}_m + \mu \Sigma b_{lm}\,x_l\,\bar{y}_m = 0\,:$$

due elementi omologhi (ed in particolare un elemento unito) per due di queste antiprojettività saranno tali per tutte. Le antiprojettività degeneri corrispondono all'annullarsi del determinante di quell'equazione, cioè ai valori di $\lambda : \mu$ per cui

$$\Delta\lambda^2 + I\,\lambda\mu + \Delta_1\mu^2 = 0\,.$$

Se questi valori sono reali, sicchè $I^2 - 4\Delta\Delta_1 > 0$, essi corrispondono a due antinvoluzioni (o catene) degeneri del fascio, e però le due primitive antinvoluzioni non possono avere alcun elemento unito comune: avranno invece a comune una coppia di elementi omologhi (gli elementi singolari delle antinvoluzioni degeneri). Se invece quei valori di $\lambda : \mu$ sono imaginari-coniugati, sicchè $I^2 - 4\Delta\Delta_1 < 0$, allora ponendo uno qualunque di essi nell'equazione dell'antiprojettività, poichè questa è degenere, il suo 1º membro dovrà scindersi in due fattori contenenti linearmente rispettivamente le x e le $\bar{y}$ e rappresentanti rispettivamente i due elementi singolari dell'antiprojettività. Quindi il primo di questi elementi verifica l'equazione

$$\lambda \Sigma a_{lm}\,x_l\,\bar{x}_m + \mu \Sigma b_{lm}\,x_l\,\bar{x}_m = 0\,,$$

la quale, per essere reali le due somme che vi compaiono, ed imaginario il rapporto $\lambda : \mu$, si spezza in due equazioni reali da cui segue l'annullarsi di quelle due somme, cioè l'essere l'elemento considerato elemento unito per le due antinil punto in cui la taglia la retta omologa. Similmente per ogni punto non unito passerà una retta unita ben determinata, cioè quella che lo congiunge al punto omologo. In ogni retta unita

---

voluzioni date. Queste hanno dunque in tal caso due elementi uniti a comune.

A queste considerazioni si collegherebbero naturalmente altre, dipendenti dal carattere bilineare dell'invariante simultaneo I, sul sistema di due fasci di antinvoluzioni o di catene mutuamente permutabili: i due elementi uniti comuni all'un fascio sono i due elementi omologhi comuni all'altro. Ma ciò sarebbe affatto ovvio; in generale la rappresentazione delle catene coi cerchi del piano o della sfera è guida naturale in tali questioni: i fasci di catene corrispondono ai fasci di cerchi, la permutabilità delle catene all'ortogonalità dei cerchi, l'invariante assoluto $I^2 : \Delta\Delta_1$ ad una funzione dell'angolo di due cerchi, ecc. Viceversa si ha col nostro procedimento un'elegante rappresentazione analitica, invariantiva, della geometria dei cerchi del piano o della sfera.

Come abbiamo incominciato lo studio invariantivo delle antinvoluzioni, così più in generale si potrebbe avviare quello delle antiprojettività. Anche per due di queste si potrebbero considerare gl'invarianti simultanei $I, I^2 - 4\Delta\Delta_1$, il cui annullarsi s'interpreta subito geometricamente in modo quasi identico a quello tenuto pel caso speciale delle antinvoluzioni; si giungerebbe così ai sistemi lineari di antiprojettività, ed in particolare ai loro fasci. Queste cose, molto analoghe a cose note sulle projettività, noi tralasceremo.

Sulle proprietà metriche delle antinvoluzioni e delle catene nelle forme di 1ª specie. Una proprietà metrica importante di tali catene è quella vista al n. 13 che il birapporto di 4 loro elementi è reale: essa si applica pure (n. 17) a due coppie di elementi omologhi di qualunque antinvoluzione. Altre proprietà si possono dedurre da quelle metriche delle antiprojettività esposte in una nota al n. 8. Indichiamo con M, N due punti uniti e con A, A' due punti omologhi di un'antinvoluzione su d'una retta; allora avremo:

$$\text{mod.}\,(MNAA') = \text{mod.}\,(MNA'A),$$

poichè l'antinvoluzione muta i birapporti nei coniugati, oppure anche in forza della relazione (1) della nota citata. Ne segue

$$\text{mod.}\,(MNAA') = 1, \tag{1}$$

ossia sviluppando

$$\text{mod.}\frac{AM}{A'M} = \text{mod.}\frac{AN}{A'N},$$

$$\text{mod.}\,AM : \text{mod.}\,A'M = \text{cost.}, \tag{2}$$

al variare di M nella catena, mentre A, A' stan fissi. Questa relazione equivale alla proprietà del cerchio di esser il luogo dei punti le cui distanze da due punti fissi (*inversi* rispetto al cerchio) hanno un dato rapporto. Similmente la (2) della suddetta nota (oppure la proprietà ricordata da principio) dà, indicando con P un punto variabile della catena,

$$\text{arg.}\left(\frac{MP}{NP}\right)^2 = \text{cost.},$$

l'antinvoluzione piana determinerà un'antinvoluzione semplice la quale, avendo per punti uniti quelli in cui la retta stessa è incontrata

---

ossia

$$\text{arg.}\, MP - \text{arg.}\, NP = \text{cost.}\,, \tag{3}$$

a meno di un multiplo di π: ciò equivale alla costanza dell'angolo iscritto in un dato arco di cerchio.

Se il punto all'infinito della retta non è unito per l'antinvoluzione e si chiama O il suo omologo, il quale sarà un *centro* di simmetria per l'antinvoluzione o per la catena, la (1) darà:

$$\text{mod.}\, \frac{OM}{ON} = 1\,,$$

cioè

$$\text{mod.}\, OM = \varrho\,, \tag{4}$$

essendo ϱ costante al variare del punto M nella catena. Più in generale le relazioni (5) e (6) della nota citata dànno, indicando con A, A' due punti omologhi variabili, e con ϱ una costante:

$$\text{mod.}\, OA \,.\, \text{mod.}\, OA' = \varrho^2 \tag{5}$$

$$\text{arg.}\, OA = \text{arg.}\, OA'. \tag{6}$$

Queste proprietà corrispondono alla nozione del raggio ϱ di un cerchio ed alle relazioni fra due punti A, A' inversi rispetto a questo. Se poi si ha una catena passante pel punto all'infinito, la (2) e la (3) diventano:

$$\text{mod.}\, AM = \text{mod.}\, A'M \tag{2'}$$

$$\text{arg.}\, MP = \text{cost.} \tag{3'}$$

al variare di M o di P nella catena. Da quest'ultima proprietà, od anche direttamente, segue che MP/MN è reale, cioè che con un'unità di misura conveniente tutte le mutue distanze fra i punti della catena sono reali.

Non stiamo a sviluppare le cose analoghe relative alla teoria metrica delle antinvoluzioni e catene nei fasci di rette. Osserviamo soltanto che in generale una tal antinvoluzione o catena può presentare due casi ben distinti secondo che esistono due raggi omologhi, ovvero due raggi uniti che siano perpendicolari fra loro; tali raggi sono sempre *assi* di simmetria per l'antinvoluzione o catena. Se l'antinvoluzione è permutabile coll'involuzione di angoli retti del fascio si hanno due casi particolari notevoli, secondo che ciò proviene dall'essere i due raggi ciclici (assoluti) omologhi rispetto all'antinvoluzione, oppure uniti per questa. Nel 1° caso, se l'antinvoluzione è priva di catena fondamentale, vi sono infinite coppie di raggi omologhi perpendicolari, le quali costituiscono una catena; se invece l'antinvoluzione ha una catena fondamentale i raggi di questa sono a coppie perpendicolari fra loro. Nel 2° caso, cioè quando si ha una catena contenente i raggi ciclici (che perciò si potrebbe chiamare *catena circolare* di raggi), accade in pari tempo che essa è il luogo di infinite coppie di raggi perpendicolari, e che vi sono infinite coppie di rette perpendicolari armoniche rispetto ad essa costituenti pure una catena (queste due catene, circolari entrambe e permutabili fra loro, son legate per modo che l'angolo di ogni raggio dell'una con un raggio dell'altra ha per parte reale $\pi/4$, ossia ha una tangente di modulo 1).

dalle altre rette unite, ne avrà una catena (n. 16). Similmente per ogni punto unito passa una catena di rette unite.

Da queste considerazioni risulta subito che fra i punti uniti dell'antinvoluzione piana se ne possono in infiniti modi prendere 4 in guisa che siano indipendenti fra loro; sicchè, ricordando la definizione delle catene di 2ª specie (n. 12), concludiamo che *ogni antinvoluzione tra gli elementi di una forma di 2ª specie ha per elementi uniti gli elementi di una catena di 2ª specie.*

20. Le proprietà delle catene di 2ª specie che già notammo (n. 12) potersi dedurre dalla considerazione degli elementi reali di una forma di 2ª specie reale derivano anche subito da quelle delle antinvoluzioni nelle forme di 2ª specie. Così dal n. prec. già segue che: *data in un piano una catena di 2ª specie, ogni retta che non le appartenga l'incontra in un punto solo, mentre ogni retta della catena l'incontra lungo una catena rettilinea; similmente le rette della catena passanti per uno qualunque dei suoi punti formano una catena, mentre per ogni altro punto passa una sola retta della catena.* Un'antinvoluzione piana fa dunque corrispondere ad un punto qualunque A del piano non posto nella catena fondamentale quello A' che sulla retta passante per A ed appartenente alla catena, cioè avente comune con essa una catena rettilinea, è rispetto a quest'ultima l'armonico di A (e noi lo diremo *armonico* di A anche rispetto alla catena piana); e dualmente.

Si vede inoltre che i punti della catena piana son projettati da ciascuno di essi mediante una catena semplice di rette (ognuna delle quali projetta non un sol punto, ma tutta una catena rettilinea). In conseguenza se M, N sono due punti qualunque della catena piana, la varietà ∞^2 dei punti di questa si può considerare come l'intersezione delle due varietà ∞^3 (catene triple degeneri) costituite dai punti di due catene semplici di rette aventi i centri in M, N; catene che hanno a comune una retta MN, dalla quale si deve prescindere.

Viceversa due catene semplici di rette di un piano di centri distinti MN, le quali contengano entrambe la retta MN, si tagliano ancora secondo una catena piana di punti. Perocchè se due rette della 1ª catena e due rette della 2ª, diverse le une e le altre dalla MN, s'incontrano rispettivamente nei punti P e Q, la catena piana passante pei 4 punti M, N, P, Q sarà projettata da M mediante una catena semplice di rette contenente le tre rette MN, MP, MQ, cioè mediante la prima catena di rette, e similmente sarà projettata da N mediante la 2ª catena di rette.

Dualmente: date su due rette che si taglino due catene semplici di punti passanti pel punto d'intersezione, le rette che si appoggiano ad entrambe queste catene formano una catena piana (contenente due catene rettilinee). E viceversa ogni catena piana di rette si può generare a questo modo.

21. Un'altra generazione notevole di una catena piana si ha considerando due punti (distinti) S, S' che siano armonici rispetto ad essa. Le rette che da S, S' projettano un punto qualunque della catena saranno omologhe nell'antinvoluzione che ha la catena per fondamentale e quindi S, S' per punti omologhi; viceversa due rette omologhe passanti rispettivamente per S ed S' si tagliano in un punto unito, cioè in un punto della catena. Dall'antinvoluzione i fasci S, S' son riferiti fra loro *antiprospettivamente*, cioè antiprojettivamente e con la retta unita SS'. Dunque *ogni catena piana è il luogo dei punti d'incontro dei raggi omologhi di due fasci antiprospettivi.*

Viceversa *due fasci antiprospettivi di rette di un piano generano una catena piana.* Invero se S, S' sono i loro centri e P, Q due punti d'incontro di due raggi dell'un fascio rispettivamente cogli omologhi dell'altro, l'antinvoluzione determinata (n. 11) dai punti uniti P, Q e dalla coppia di punti omologhi $S\,S'$ determinerà fra i due fasci S, S' una corrispondenza antiprospettiva coincidente colla data. — Lo stesso fatto si potrebbe anche dedurre da ciò che se al punto comune a due raggi qualunque dei fasci S, S' si fa corrispondere il punto d'intersezione dei raggi omologhi rispettivamente di S', S, si avrà (v. la costruzione generale delle anticollineazioni piane al n. 4) un'antinvoluzione fra i punti del piano.

Dualmente, chiamando *antiprospettive* due punteggiate distinte antiprojettive e con un punto unito, si ha che le rette congiungenti i punti omologhi di due punteggiate antiprospettive sono le rette di una catena piana; e viceversa ogni catena piana si può generare in questa guisa ([38]).

([38]) Dalle generazioni delle catene piane viste in questo n[0] e nel precedente si possono trarre delle nuove rappresentazioni analitiche di esse. A tal fine indichiamo con A, B, C delle forme lineari nelle coordinate di punti (e con $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ rispettivamente le forme coniugate, nelle coniugate delle coordinate). Due fasci di rette antiprospettivi, aventi $A=0$ per retta unita e $B=0$, $C=0$ per rette omologhe si potranno rappresentare con le equazioni

$$A + \lambda B = 0, \tag{1}$$

22. **Forme di 3ª specie.** — Consideriamo finalmente un'antinvoluzione fra gli elementi dello spazio. Essa ammette sempre un'infinità di rette unite, le quali si possono riguardare sia come le congiungenti di coppie di punti omologhi, sia come le intersezioni di coppie di piani omologhi. Per ogni punto non unito ne passa una; su ogni piano non unito ne giace una. Su ciascuna retta unita le coppie di punti omologhi formano una antinvoluzione; e così le coppie di piani omologhi passanti per essa formano un'antinvoluzione.

Se l'antinvoluzione spaziale ammette un punto unito, allora il piano che congiunge una retta unita qualunque non passante per

---

$$A + \bar{\lambda} C = 0. \tag{2}$$

Quest'ultima equivale alla coniugata

$$\bar{A} + \lambda \bar{C} = 0,$$

ed eliminando λ fra questa e la (1) si ha

$$A\bar{C} - \bar{A}B = 0. \tag{3}$$

L'equazione (3) rappresenta dunque la catena piana generata dai due fasci, purchè però si faccia astrazione dalla retta $A = 0$ (od $\bar{A} = 0$) i cui punti soddisfano pure quell'equazione.

Volendo invece considerare la catena piana secondo il n. 20 come intersezione di due catene semplici di rette aventi la retta $A = 0$ a comune, osserviamo che la catena semplice delle rette unite dell'antinvoluzione fra i due fasci sovrapposti

$$A + \lambda B = 0,$$

$$A + \bar{\lambda} B = 0$$

si ha eliminando λ fra queste due equazioni, cioè fra la 1ª e la coniugata della 2ª, ed è quindi:

$$A\bar{B} - \bar{A}B = 0. \tag{4}$$

Similmente un'altra catena semplice di rette contenente la retta $A = 0$ si può rappresentare con

$$A\bar{C} - \bar{A}C = 0. \tag{5}$$

La catena piana appare così rappresentata dalle *due* equazioni *reali* (4) e (5) da cui però si tolga la retta $A = 0$ ($\bar{A} = 0$). In luogo di quelle equazioni si può scrivere:

$$\begin{Vmatrix} A & B & C \\ \bar{A} & \bar{B} & \bar{C} \end{Vmatrix} = 0. \tag{6}$$

(Del resto, se si osserva che i valori delle A, B, C in ogni punto del piano si posson considerare come coordinate del punto, queste equazioni, le quali vengono in sostanza ad esprimere che il punto ha coordinate reali, coincideranno con un'osservazione fatta in principio del n. 13, od anche con la rappresentazione parametrica delle catene piane data al n. 14).

esso a questo punto sarà pure unito; e così pure dall'esistenza di un piano unito segue quella di punti uniti sulle infinite rette unite. In tal caso adunque l'antinvoluzione ammette infiniti punti uniti formanti un sistema tale che ogni retta unita lo sega secondo una catena rettilinea ed ogni piano unito lo sega secondo una catena piana. Ne segue subito che si possono scegliere 5 punti uniti in guisa che siano indipendenti, e però (n. 12) che i punti ed i piani uniti formano una catena spaziale. *Se un'antinvoluzione dello spazio ammette un punto ovvero un piano unito, essa ammette una catena spaziale fondamentale.*

Segue inoltre dalle osservazioni precedenti che, *data una catena spaziale qualunque, ogni retta ed ogni piano che le appartengano l'incontrano secondo una catena rettilinea o piana, mentre ogni retta che non le appartenga o non l'incontra affatto o l'incontra in un punto solo, ed ogni piano che non le appartenga l'incontra secondo una catena rettilinea. Da una retta qualunque della catena i punti di questa son projettati mediante una catena semplice di piani (in cui però ogni piano ne projetta una catena piana)*, (39) ecc. ecc.

23. L'esistenza di *antinvoluzioni dello spazio prive di punti e piani uniti* si può vedere facilmente ricorrendo alla costruzione delle anticollineazioni data al n. 4. Si determini in fatti fra due stelle distinte S, S' un'anticollineazione la quale faccia corrispondere fra loro involutoriamente i fasci di piani aventi per asse SS': ciò è possibile evidentemente in infiniti modi, e si può anzi scegliere ad arbitrio l'antinvoluzione che così si viene ad avere tra i piani per SS'. Se allora di ogni punto P, intersezione di due raggi di S, S', chiamiamo omologo il punto P' in cui si taglieranno i raggi rispettivamente corrispondenti a quelli in S', S, avremo stabilito nello spazio un'anticollineazione involutoria, di cui farà parte la data antinvoluzione del fascio di piani SS': quindi a seconda che questa non ha piani uniti o ne ha una catena, segue dal num. prec. che

---

(39) Se ne trae ad esempio che la catena spaziale si può considerare come l'intersezione di tre ∞^5 costituite da catene semplici di piani aventi comune un piano (da cui si astrae) e quindi, analogamente alla nota precedente, si può rappresentare così:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ \overline{A} & \overline{B} & \overline{C} & \overline{D} \end{vmatrix} = 0 .$$

l'antinvoluzione dello spazio non avrà alcun punto o piano unito, oppure ne avrà una catena spaziale ([40]).

Merita di essere rilevato il fatto che il sistema delle rette unite di un'antinvoluzione dello spazio priva di catena fondamentale non ha nè punti nè piani singolari; sicchè per *ciascun* punto ed in *ciascun* piano passa sempre *una sola* retta del sistema. Nei sistemi di rette algebrici è noto che questo fatto non può presentarsi; e solo se il campo geometrico si limita agli elementi reali si ha nella congruenza lineare reale priva di rette direttrici (reali) un fatto analogo ([41]).

24. Date due antinvoluzioni in una stessa forma fondamentale di specie r possiamo facilmente trovare il numero delle coppie di elementi omologhi che esse hanno a comune. Ogni tal elemento sarà in fatti unito per la collineazione che è prodotto di quelle due antinvoluzioni; e viceversa ciascuno degli elementi uniti ($r+1$ in generale) di questa collineazione avrà evidentemente uno stesso elemento per omologo in ambe le antinvoluzioni. Separando il caso di due elementi omologhi distinti da quello di due elementi omologhi coincidenti, abbiamo dunque che: *due antinvoluzioni di una forma di specie* r *hanno in generale a comune un certo numero* k (*tale che* $0 \leq 2\mathrm{k} \leq \mathrm{r}+1$) *di coppie di elementi omologhi distinti ed inoltre* $\mathrm{r}-2\mathrm{k}+1$ *elementi uniti.*

Così, ad esempio, due antinvoluzioni in una forma semplice hanno comune in generale una coppia di elementi omologhi distinti, oppure due elementi uniti. Due catene piane hanno sempre un punto a comune; in generale o ne hanno tre (e le tre rette che li congiungono a due a due), oppure ne hanno un solo, ma ammettono inoltre una coppia comune di punti armonici (sull'unica retta che esse hanno in tal caso a comune). Due antinvoluzioni dello spazio

---

([40]) Proseguendo i ragionamenti fatti qui e al n. 19 si vede subito che: *in ogni spazio di dimensione pari tutte le antinvoluzioni hanno infiniti punti uniti, cioè ammettono una catena fondamentale; in uno spazio di dimensione impari vi sono invece delle antinvoluzioni con catene fondamentali e delle antinvoluzioni prive di punti uniti.*

([41]) Per le antinvoluzioni in forme di 1ª specie abbiamo già considerata la relazione di *permutabilità.* Per due antinvoluzioni nel piano o nello spazio la condizione di permutabilità coincide (v. la nota al n. 17) con quella di dare per prodotto una collineazione involutoria del piano o dello spazio. Si avranno dunque ad esempio le antinvoluzioni spaziali permutabili ad una data facendo il prodotto di questa e di un'omologia armonica il cui centro ed il cui piano siano uniti per l'antinvoluzione, ovvero il prodotto di questa e di un'involuzione rigata i cui assi siano rette unite, oppure rette omologhe, per l'antinvoluzione.

possono presentare in generale i seguenti casi: 1^0 quattro punti uniti comuni, 2^0 due punti uniti comuni ed una coppia comune di punti omologhi distinti, 3^0 due coppie di punti omologhi distinti a comune; in ciascuno di questi casi si vede poi subito quali piani e rette, congiungenti di quei punti, siano uniti oppure siano omologhi in entrambe le antinvoluzioni ([42]). — Noi prescindiamo, come si vede, dai casi particolari che la collineazione, prodotto delle due antinvoluzioni, può presentare sia pel coincidere di alcuni fra gli $r+1$ elementi uniti, sia pel diventare infinito il loro numero; questi vari casi particolari, ben noti, darebbero subito altrettante particolarità di posizione reciproca che due antinvoluzioni (o due catene) possono avere.

Collegando la proposizione generale vista dianzi con un modo di determinare le antinvoluzioni in una forma di specie r che fu esposto al n. 11, noi vediamo, almeno nei casi generali, che *due catene qualunque di una stessa forma di specie* r *individuano un sistema infinito* (∞^{r}) *di catene aventi a comune un certo numero* k (*tale che* $0 \leq 2\mathrm{k} \leq \mathrm{r}+1$) *di coppie di punti armonici ed inoltre* $\mathrm{r}-2\mathrm{k}+1$ *punti, e tale che per ogni altro punto (indipendente da quegli* $\mathrm{r}+1$) *passa sempre una sola catena del sistema.*

25. Tutte le proposizioni viste sulle antinvoluzioni e sulle catene di una forma di 1ª specie si possono applicare senza modificazioni ad ogni forma semplice razionale, per esempio alle antinvoluzioni (e catene) fra i punti di una curva razionale o fra le generatrici di una rigata razionale. Ma conviene aggiungere alcune osservazioni speciali, che si collegano al n. 7, e che ci serviranno in seguito.

Se si ha un'antinvoluzione sovra una conica o sovra una cubica sghemba, segue dal n^0 citato che essa è contenuta in una ben determinata antinvoluzione del piano della conica ovvero dello spazio (la quale muta la conica o la cubica in se stessa). L'antinvoluzione piana avrà una catena doppia fondamentale, la quale, a seconda che l'antinvoluzione fra i punti della conica non ha punti uniti ovvero

---

([42]) Occorrendoci ancora di considerarli in seguito, chiameremo *di 1ª o di 2ª specie* un triangolo unito di un'antinvoluzione piana secondo che tutti e tre i suoi vertici son punti uniti di questa, oppure uno solo è punto unito (e gli altri due son punti omologhi); e così *di 1ª, di 2ª* ovvero *di 3ª specie* un tetraedro unito di un'antinvoluzione spaziale secondo che tutti e quattro i suoi vertici sono uniti, o due soli, o nessuno.

ne ha una catena semplice, non incontrerà affatto la conica, ovvero l'incontrerà secondo questa catena semplice (che noi, in opposizione alle catene semplici *rettilinee* o *di* 1⁰ *ordine*, chiameremo catena semplice *conica* o *di* 2⁰ *ordine*). Così se l'antinvoluzione piana è il coniugio sovra un piano reale, sicchè la conica sarà reale, i due casi corrispondono rispettivamente all'essere questa curva priva o no di punti reali. — Se invece si tratta di una cubica sghemba, a seconda che l'antinvoluzione fra i suoi punti è priva di punti uniti o ne ha una catena semplice (*cubica* o *del* 3⁰ *ordine*), l'antinvoluzione spaziale che la contiene sarà a sua volta priva o no di catena fondamentale: invero quando quest'antinvoluzione ammette un piano unito questo taglia la cubica in 3 punti, tra i quali può accadere che vi sia una coppia di punti omologhi, ma certo vi sarà un punto unito.

Quanto alle antinvoluzioni (e catene) spaziali permutabili ad una data quadrica, ne abbiamo due specie (n. 7). Un'antinvoluzione di 1ª specie muta ciascuna schiera di generatrici della quadrica in se stessa. Se l'antinvoluzione che così si ha fra le generatrici di una schiera ha una catena semplice di rette unite, e se l'antinvoluzione spaziale ammette una catena fondamentale, quelle rette unite contengono delle catene semplici di punti uniti, e le generatrici dell'altra schiera passanti per questi saranno pure unite. Ne segue che se una sola delle due antinvoluzioni entro le schiere di generatrici ha elementi uniti, l'antinvoluzione spaziale non ammetterà una catena fondamentale. Invece se entrambe quelle antinvoluzioni semplici hanno rette unite, ed anche se entrambe ne sono prive, si vede facilmente che l'antinvoluzione dello spazio ha una catena fondamentale: se questa si compone dei punti reali, sicchè la quadrica è reale, essa è rigata nel 1⁰ caso, ed è priva di punti reali nel 2⁰. Un'antinvoluzione spaziale permutabile ad una quadrica e della 2ª specie fa corrispondere le due schiere di generatrici l'una all'altra in un'antiprojettività: gli ∞^2 punti d'incontro di generatrici omologhe sono punti uniti dell'antinvoluzione, la quale avrà dunque una catena fondamentale. Quella ∞^2 di punti equivarrà projettivamente a quella dei punti reali di una quadrica reale ellittica.

26. Abbiamo già avuto occasione di osservare come per projezioni le catene si mutino in catene. Così se si projettano i punti di una catena spaziale sopra un piano da un punto esterno si ottengono i punti di una catena semplice di rette uscente dalla traccia della retta unita che passa pel centro di projezione. E se in

un piano son date una catena piana **C** ed una retta r e da un punto qualunque P esterno ad entrambe si projetta la catena sulla retta, questa viene ad apparire come catena doppia degenere, con un punto singolare A nella traccia su r della retta della catena passante per P; sì che mentre la corrispondenza fra i punti di r e quelli di **C** è generalmente univoca, al punto A di r corrispondono su **C** tutti i punti della catena rettilinea in cui questa è incontrata dalla retta PA.

Esaminiamo un po' meglio questa corrispondenza. Ogni catena rettilinea di **C** incontra in un punto la catena rettilinea posta su PA, e per conseguenza si projetta su r secondo una catena rettilinea passante per A. Ma una catena rettilinea *qualunque* di r è projettata da P mediante una catena semplice di rette: la catena semplice delle rette corrispondenti rispetto all'antinvoluzione **C** uscenti dall'armonico P' di P sarà antiprojettiva, o — ciò che fa lo stesso, trattandosi di catene, — projettiva a quella; e perciò genererà con quella una catena semplice conica (v. n. 25) posta su **C**. Vale a dire: alle catene rettilinee, o di 1^0 ordine, di r corrispondono su **C** delle catene coniche, o di 2^0 ordine (poste su coniche passanti per P e P'). Se poi si projetta una catena conica di **C** da P, allora, se la conica in cui sta la catena passa per P, le rette projettanti formeranno evidentemente una catena semplice, sicchè si otterrà come projezione su r una catena rettilinea. In caso contrario, considerando la catena conica su **C** come generata da fasci projettivi di rette, anzi di catene rettilinee giacenti in **C**, fasci coi centri sulla catena conica medesima, si vede che la sua projezione su r sarà una ∞^1 di punti, che diremo pure *di* 2^0 *ordine*, e che si genera in infiniti modi come luogo dei punti d'intersezione delle catene omologhe di due fasci projettivi di catene rettilinee aventi un punto base in A e l'altro in un punto arbitrario della ∞^1. Essa è tagliata da una catena rettilinea di r in 4 punti al più (poichè due catene coniche di **C** si tagliano al più in 4 punti): ma se questa catena rettilinea passa per A, essa non può incontrarla che in altri 2 punti: il punto A è *doppio*. Le coordinate dei punti della catena conica si possono rappresentare come forme quadratiche di due parametri reali; ed in modo simile si potranno rappresentare quelle dei punti della sua projezione [43].

---

(43) Se la catena **C** si compone dei punti reali di un piano e P, P' sono i punti ciclici di questo, la corrispondenza considerata si riduce alla rappresenta-

Queste osservazioni ed altre che si potrebbero fare intorno alla corrispondenza fra C ed r si potrebbero anche, sopprimendo la r, riferire alla corrispondenza fra i punti di C e le rette che li projettano da P. Trasportate allora per dualità, daranno delle proprietà della corrispondenza fra le rette di una catena piana C ed i punti di una retta r che ne sono le tracce. Questa corrispondenza è univoca, tranne pel punto d'intersezione di r con C al quale corrispondono in C le infinite rette di una catena semplice. Ad una catena semplice di r corrispondono in generale in C le rette di una ∞^1 di 2^a classe, cioè le tangenti di una catena conica; ma inversamente le tangenti di una catena conica segano r in generale secondo una ∞^1 di 2^0 ordine. Se fra due rette r, r' di un piano consideriamo la corrispondenza che si ha chiamando omologhi due punti che stiano su una stessa retta della catena piana C, avremo una corrispondenza univoca tranne che pei due punti in cui r, r' son tagliate da C, ognun dei quali ha per corrispondenti sull'altra retta tutti i punti di una catena semplice. Ora dalle ultime osservazioni segue che in generale questa corrispondenza univoca sarà *quadratica*, cioè farà corrispondere ad ogni catena rettilinea, od ∞^1 di 1^0 ordine, dell'una retta una ∞^1 di 2^0 ordine sull'altra retta (col punto singo-

---

zione nota dei punti complessi di una retta r coi punti reali del piano; alle catene semplici od ∞^1 di 1^0 ordine di r corrispondono i cerchi (reali) del piano; ma ai punti reali di una conica reale qualunque corrispondono in generale su r i punti di una ∞^1 di 2^0 ordine, ecc.

A proposito dell'*ordine* di una ∞^1 iperalgebrica di punti di una retta r osserviamo ancora che esso fu definito in generale nella introduzione di questo Saggio; e che, se si rappresenta r sulla sfera reale, sicchè la ∞^1 ha per imagine una curva algebrica reale della sfera, cioè l'intersezione completa di questa con una superficie algebrica, l'ordine della ∞^1 di punti di r sarà precisamente l'ordine di quella superficie (mentre nella rappresentazione di r sul piano reale la ∞^1 d'ordine n ha per imagine una curva d'ordine $2n$ con due punti n-pli nei punti ciclici, od una degenerazione di una tal curva). Quindi una ∞^1 di 2^0 ordine corrisponde all'intersezione della sfera con una quadrica, e dalle note proprietà di questa curva biquadratica, per es. dai coni quadrici che la contengono, seguono delle proprietà della ∞^1 di 2^0 ordine, le sue generazioni mediante fasci projettivi di catene, l'esistenza di 2 o di 4 antinvoluzioni che la trasformano in se stessa, ecc. La ∞^1 di 2^0 ordine che sopra si è considerata in r è particolare avendo un punto doppio (è *razionale*, mentre quella generale è *ellittica*); la ∞^1 di 2^0 ordine generale di r non si può considerare come projezione di una ∞^1 di 2^0 ordine non rettilinea: vedremo invece nel seguito di questo lavoro che si può ottenere come projezione di una ∞^1 piana di 3^0 ordine (intersezione di tre iperconiche) da un suo punto. (Tutte queste osservazioni saranno completate da altre che si troveranno in altro scritto).

lare di questa per punto doppio). Solo quando r, r' fossero armoniche rispetto a **C** la corrispondenza si ridurrebbe ad un'antiprojettività (v. n. 21).

Se due catene doppie **C**, **D** di un piano si considerano come sezioni di uno stesso fascio P di rette, anche la corrispondenza univoca che così si avrà fra esse sarà in generale *quadratica*, in quanto che ad ogni catena rettilinea dell'una, per esempio di **C**, corrisponderà nell'altra **D** una catena conica (passante pel punto singolare di **D**, che è il suo punto d'incontro con la retta di **C** uscente da P). — Se dai due punti P, P' armonici rispetto a **C** projettiamo i vari punti di **C** sulla catena piana **D**, avremo in questa una corrispondenza quadratica, sezione della corrispondenza antiprospettiva fra i fasci P, P', ed avente in conseguenza un punto unito nell'intersezione di **D** colla retta PP': gli altri punti uniti saranno evidentemente i punti comuni a **C** e **D**, ed essi sono in generale, com'è noto, uno o tre; il che s'accorda col n. 24.

Delle antipolarità e delle iperconiche ed iperquadriche (44).

27. Rispetto ad un'antipolarità, piana o spaziale, introdurremo denominazioni affatto simili a quelle che si usano per le polarità.

---

(44) La trattazione geometrica di questi enti si troverà analoga in vari punti a quella delle coniche e delle quadriche fatta nell'opera di STAUDT: anche certe proposizioni, che, per l'analogia perfetta che presentano con cose note, potrebbero sembrare superflue, si dovettero esporre, sia per uniformità di metodo, sia perchè occorreranno nei Cap.i seg.i. Non è forse inutile, dopo la citazione fatta di STAUDT, rilevare come appunto la *sua* definizione delle coniche e quadriche sia quella che, trasportata per analogia (dalle polarità alle antipolarità), appare più importante nel nostro campo; le definizioni mediante fasci projettivi o stelle reciproche avrebbero invece per analoghe delle nozioni di enti il cui studio rientra come *parte* in quello delle iperconiche ed iperquadriche: ciò si vedrà più tardi.

(Dopo che io avevo già rivedute le bozze della Nota II del presente Saggio comparve nel vol. 14 degli *Acta mathematica* un lavoro del sig. JUEL: *Ueber einige Grundgebilde der projectiven Geometrie*, i cui risultati principali stavano già, secondo asserisce l'A., nella dissertazione danese che ho nominata in nota all'introduzione di questo Saggio; quel lavoro, studiando per via puramente sintetica le catene semplici e piane, non che le antiprojettività fra forme semplici e le anticollineazioni fra due piani (sotto il nome di corrispondenze *simmetrali*), viene ad avere molti punti di contatto con le mie due prime Note. Il sig. JUEL non si occupa però degli enti analoghi nello spazio, nè delle antireciprocità, delle iperconiche, iperquadriche, ecc.; e in complesso il suo indirizzo ed il suo scopo sono essenzialmente diversi dai miei. Ciò malgrado mi piace rilevare i suoi diritti di priorità negli argomenti che entrambi abbiamo trattati).

Due elementi omologhi si diranno *polari* l'un dell'altro (un punto si dirà *polo* del suo elemento polare). Quando di due elementi l'uno è incidente al polare dell'altro, viceversa questo sarà incidente al polare del primo, ed i due elementi si diranno *reciproci*. Così un punto ha infiniti punti reciproci sulla sua retta polare, oppure infiniti punti e rette reciproche sul suo piano polare. Una retta nel piano ha per reciproche tutte quelle che passano pel suo polo, e nello spazio tutte quelle che si appoggiano alla sua polare. Ecc. Un elemento *autoreciproco*, cioè incidente al suo polare, si dirà pure *unito*; però nello spazio la denominazione di *unite* sarà riservata alle rette *autopolari*.

Se una retta p è unita in un'antipolarità piana, cioè contiene il proprio polo P, è chiaro che nè per questo passerà alcun'altra retta unita, nè su p starà alcun altro punto unito. Ma nel caso contrario, cioè se p e P non sono incidenti, l'antipolarità (che sempre riferisce antiprojettivamente due forme omologhe qualunque) stabilirà fra la punteggiata p ed il fascio di rette P un'antiprojettività in posizione involutoria: ne deriva che i punti reciproci su p (o le rette reciproche per P) si corrispondono in un'antinvoluzione, e quindi che su p o non sta alcun punto unito (e per P non passa alcuna retta unita), oppure ne stanno infiniti formanti una catena (e per P passa una catena di rette unite di cui quella è sezione). La possibilità che esista una retta di cui tutti i punti siano uniti rimane, come si vede, assolutamente esclusa.

Segue dunque che se un'antipolarità piana ammette un punto unito, essa ne ammetterà ∞^3, giacchè su ognuna delle ∞^2 rette passanti per quello ve n'è una catena, eccezion fatta per la retta polare del punto, la quale non contiene altri punti uniti. Questa varietà ∞^3 di punti si dirà *iperconica* (*fondamentale* per l'antipolarità), e sue *tangenti* nei vari punti le polari di questi nell'antipolarità, cioè le rette unite di questa (45). Mentre la tangente in un punto all'iperconica non l'incontra altrove, ogni altra retta del piano o la sega secondo una catena rettilinea o non l'incontra affatto. Similmente per un punto dell'iperconica passa una sola tangente di questa, la tangente in esso: per ogni altro punto o non passa alcuna tangente o ne passano infinite formanti una catena: il punto si dirà allora rispettivamente *interno* ovvero *esterno* all'iperconica.

---

(45) Quest'applicazione del nome di *tangente*, come pure quella che ne faremo nel n. seg. alle iperquadriche, sono d'accordo colle definizioni generali di *tangenti* alle ∞^3 di punti di un piano ed alle ∞^5 spaziali date al n. 15.

28. Per un'antipolarità spaziale le coppie di punti (o di piani) reciproci situate su una retta qualunque che non sia autoreciproca formano pure un'antinvoluzione. E così pure in un piano non unito si ha sempre un'antipolarità piana in cui si corrispondono i punti e le rette reciproche.

Se una retta è incidente alla sua polare, pur essendone distinta, solo quel punto e quel piano che essa ha comuni con questa saranno uniti. Se invece una retta coincide colla propria polare è chiaro che tutti i suoi punti e piani (mutuamente polari) saranno uniti. Se infine una retta è sghemba con la sua polare, segue da un'osservazione precedente che o essa non conterrà alcun punto unito o ne conterrà una catena, ed analogamente pei piani uniti.

Se un'antipolarità spaziale ammette un punto (od un piano) unito (o, ciò che fa lo stesso, una retta autoreciproca) essa ne ammetterà ∞^5, poichè su ognuna delle ∞^4 rette passanti per quel punto (e non giacenti nel suo piano polare) ne avrà una catena. Questa varietà di ∞^5 punti (*fondamentale* per l'antipolarità) si dirà *iperquadrica.* Il piano polare di ogni suo punto si dirà *tangente* in esso all'iperquadrica, e così pure le rette giacenti in quel piano e passanti per quel punto si diranno *tangenti.* Sono dunque tangenti gli ∞^5 piani uniti e le ∞^7 rette autoreciproche. Una retta od un piano non tangenti all'iperquadrica non l'incontrano affatto, oppure l'incontrano, la retta secondo una catena semplice, il piano secondo un'iperconica. Dualmente per un punto non posto sull'iperquadrica o non passano rette nè piani tangenti, o ne passano infiniti costituenti le generatrici ed i piani tangenti del *cono iperquadrico* circoscritto, projettante l'iperconica d'intersezione dell'iperquadrica col piano polare del punto (e questo punto si dirà nel 1^0 caso *interno*, nel 2^0 *esterno* all'iperquadrica); per una retta non tangente all'iperquadrica o non passano piani tangenti o ne passa una catena semplice.

Una retta tangente o incontra l'iperquadrica nel solo punto di contatto (e sta in un sol piano tangente), oppure vi è tutta contenuta (e tutti i suoi piani sono piani tangenti): quest'ultimo fatto accade se la retta è unita. In un piano tangente le rette che passano pel punto di contatto e che si corrispondono nella antipolarità costituiscono un'antinvoluzione di quel fascio: a seconda che questa non ha rette unite o ne ha una catena, quel piano non conterrà alcuna retta autopolare e quindi alcun altro punto dell'iperquadrica, oppure segherà questa secondo una catena semplice di rette (autopolari).

29. Se un'iperquadrica contiene una retta r, non solo ogni piano passante per questa, ma anche ogni altro piano tangente all'iperquadrica segherà questa secondo una catena di rette, perocchè oltre che nel proprio punto di contatto la incontrerà in un punto di r. Ne segue che un'iperquadrica la quale contenga una retta ne contiene ∞^4, per modo che da ogni punto (od in ogni piano tangente) dell'iperquadrica ne esce una catena semplice. Essa si dirà allora iperquadrica *rigata.* Per una retta non tangente ad una siffatta iperquadrica accadrà simultaneamente che la seghi (in una catena di punti) e che stia in (una catena di) piani tangenti; e viceversa, se una retta che non sia tangente ad un'iperquadrica ne contiene un punto e sta in un piano tangente, l'iperquadrica sarà rigata. Se una retta taglia un'iperquadrica rigata lo stesso accadrà per la sua polare e tutte le infinite rette che si appoggiano alle due catene rettilinee d'intersezione staranno sull'iperquadrica, poichè ognuna di esse avrà per polare se stessa.

Su un'iperquadrica rigata si possono evidentemente tracciare infiniti quadrangoli, pentagoni, esagoni,... sghembi (semplici). *Dato un pentagono sghembo* ABCDE *è individuata un'iperquadrica rigata che ne contiene i cinque lati.* Invero l'antireciprocità che ai vertici A, B, C, D, E di quel pentagono fa corrispondere rispettivamente le facce EAB, ABC, BCD, CDE, DEA, avrà i lati AB, BC, CD, DE, EA per rette autoomologhe e farà corrispondere inversamente a quelle facce rispettivamente quei vertici. Sarà dunque un'antipolarità la cui iperquadrica fondamentale conterrà quelle cinque rette.

30. Resta così stabilita per incidenza l'esistenza delle iperquadriche rigate. Ma per ottenere un modo affatto generale di costruzione di tutte le specie di antipolarità in uno con nuove proprietà di queste conviene considerare la *permutabilità fra antinvoluzioni ed antipolarità,* cercando le proposizioni che per le forme di specie superiore corrispondono a quelle sulle forme di 1ª specie viste ai n^i 17 e 18.

Un'antinvoluzione avente per punti uniti i vertici di un triangolo o tetraedro *polare* di un'antipolarità, cioè di un triangolo o tetraedro tale che rispetto a questa corrispondenza i vertici abbiano per polari i lati o le facce opposte, è permutabile all'antipolarità. Invero il prodotto delle due corrispondenze sarà una reciprocità in cui ai vertici del triangolo o del tetraedro corrispondono i lati o le facce opposte, cioè sarà una polarità. (V. la nota al n. 17).

Ne segue che, dato un triangolo ABC come polare per un'antipolarità, la polare di un punto qualunque P del piano non si potrà più assumere ad arbitrio; perocchè l'antinvoluzione che ha per punti uniti A, B, C, P, essendo permutabile all'antipolarità, avrà per retta unita la polare del punto unito P. Questa polare deve dunque appartenere alla catena piana che contiene ABC e P (46). — Analogamente si vede che il piano polare di un punto rispetto ad un'antipolarità di cui è dato un tetraedro polare deve stare nella catena che congiunge quel tetraedro a quel punto.

Viceversa, se per determinare un'antipolarità si dà ad arbitrio un triangolo o tetraedro polare e di un punto (non posto su alcun lato o faccia) si dà come polare una retta od un piano (non passante per alcun vertice) della catena piana o spaziale che congiunge il punto al triangolo o tetraedro, l'antipolarità riesce ben determinata. In fatti, considerando ad esempio il caso dello spazio, l'antireciprocità determinata facendo corrispondere ai 4 vertici del tetraedro ed al quinto punto dato rispettivamente le 4 facce opposte ed il quinto piano dato si può considerare come il prodotto, in qualunque ordine, della polarità determinata dalle stesse coppie di elementi omologhi e dell'antinvoluzione che ha tutti questi elementi per elementi uniti, cioè che ha la catena nominata per fondamentale. Essendo dunque il prodotto di due corrispondenze involutorie permutabili, quell'antireciprocità sarà anche essa involutoria, cioè un'antipolarità.

Come poi dai dati si riconosca la specie dell'antipolarità che si determina in questa guisa vedremo fra poco.

31. È bene avvertire che le antinvoluzioni spaziali permutabili ad un'antipolarità non sono solo quelle considerate nel n. prec. Se un'antinvoluzione ed un'antipolarità sono permutabili, il loro prodotto sarà una polarità, e viceversa il prodotto di una polarità ed un'antinvoluzione permutabili è un'antipolarità permutabile con esse. Ma una polarità dello spazio può presentare due casi ben distinti, secondo che è una polarità ordinaria (rispetto ad una quadrica), ovvero un sistema nullo. Questo 2^0 caso, che finora non s'era considerato, è particolarmente notevole quando l'antinvoluzione spaziale ammette una catena fondamentale. Allora ogni punto di questa, essendo unito per l'antinvoluzione, avrà rispetto al sistema nullo per corrispondente

(46) Ciò si dedurrebbe anche facilmente dalla seconda proposizione del n. 17, applicandola ai lati del triangolo.

un piano che gli corrisponderà pure nell'antipolarità: questa avrà dunque anche essa per punti uniti tutti i punti di quella catena, cioè ammetterà un'iperquadrica fondamentale contenente tutta la catena. Ogni retta della catena la quale sia unita pel sistema nullo sarà pure unita per l'antipolarità, cioè giacerà sull'iperquadrica. Questa è dunque rigata. Viceversa un'iperquadrica rigata contiene infinite catene spaziali, ossia è permutabile con infiniti sistemi nulli: un pentagono gobbo tracciato su essa individua oltre a lei (n. 29) anche una catena spaziale ed un sistema nullo che ne hanno i cinque lati per rette unite; e le tre corrispondenze così determinate sono mutuamente permutabili (47).

Nel piano non esistendo altre polarità che quella rispetto ad una conica, non si hanno da fare considerazioni analoghe. Una iperconica non può contenere una catena piana, poichè altrimenti tutti i punti di questa sarebbero uniti per la reciprocità prodotto dell'antipolarità e dell'antinvoluzione; il che è impossibile (48).

32. Se si determina un'antipolarità, piana o spaziale, come prodotto della polarità rispetto ad una conica o quadrica e di un'antinvoluzione che le sia permutabile ed abbia una catena fondamentale, è facile riconoscerne subito la specie quando sia data la natura dell'intersezione della catena con la conica o quadrica.

In fatti osserviamo anzitutto che ogni punto della catena il quale sia unito per la polarità o per l'antipolarità sarà pure unito per l'altra di queste due corrispondenze. Ne segue che se ha luogo effettivamente un'intersezione della catena con la conica o quadrica, l'antipolarità avrà un'iperconica od iperquadrica fondamentale, che nella catena considerata darà appunto quell'intersezione.

---

(47) Le catene spaziali contenute in un'iperquadrica rigata si ottengono pure in quest'altro modo. Si prendano due rette polari rispetto all'iperquadrica sì che la seghino entrambe in due catene rettilinee. Ogni catena spaziale contenente queste due catene rettilinee (che vien determinata dandone ancora un punto allineato con due punti di quelle), starà sull'iperquadrica, perchè per ciascun suo punto passerà una retta appoggiata a quelle due catene e giacente in conseguenza (n. 29) sull'iperquadrica.

(48) Solo le iperconiche *degeneri* che più tardi considereremo (n. 37) contengono delle catene piane, ed anzi una proposizione vista al n. 20 (cfr. anche la nota al n. 21) si può enunciare dicendo che ogni catena piana è in infiniti modi l'intersezione (parziale) di due iperconiche degeneri.

In generale quando un'iperquadrica appartenente ad S_n contiene una catena generale di specie n, l'iperquadrica è necessariamente degenere se n è pari.

Viceversa se vi è un'iperconica od iperquadrica fondamentale, esisterà quell'intersezione, cioè vi saranno dei punti comuni alla catena ed all'iperconica od iperquadrica. Invero prendasi una retta qualunque della catena, in modo che sia tagliata dall'iperconica od iperquadrica: la permutabilità fra l'antipolarità e l'antinvoluzione avrà per conseguenza la permutabilità fra le due catene rettilinee in cui l'iperconica od iperquadrica e la catena piana o spaziale segano la retta; donde segue (v. un'osservazione verso la fine del n. 16) che queste due catene rettilinee dovranno incontrarsi in due punti. La retta considerata contiene dunque due punti comuni alla catena piana o spaziale, all'iperconica od iperquadrica, ed alla conica o quadrica.

Fissiamo ora la conica e determiniamo la catena piana che le è permutabile seguendo il n. 25, cioè dando l'antinvoluzione semplice che essa determina fra i punti della conica: a seconda che quest'antinvoluzione ammetterà o no una catena conica fondamentale, l'antipolarità piana che risulta come prodotto ammetterà o no un'iperconica fondamentale.

Similmente, fissata la quadrica, determiniamo secondo il n. 25 l'antinvoluzione spaziale che le è permutabile. Se essa è di 1ª specie, cioè muta ogni schiera di generatrici in se stessa, allora ove essa non abbia rette unite in nessuna di queste schiere, avrà (v. n. cit.) una catena spaziale fondamentale la quale non incontrerà la quadrica: quindi l'antipolarità prodotto non avrà iperquadrica fondamentale. Ove invece in una schiera od in entrambe esistano delle rette unite, ciascuna di queste essendo tale sì per la polarità che per l'antinvoluzione, sarà pure unita per l'antipolarità; laonde questa ammetterà un'iperquadrica fondamentale rigata, contenente tutte quelle rette unite (mentre solo nell'ultimo caso l'antinvoluzione spaziale ha una catena fondamentale). Se poi l'antinvoluzione permutabile alla quadrica è di 2ª specie, la sua catena fondamentale incontrerà (sempre secondo il n. 25) la quadrica in ∞^2 punti: quindi l'antipolarità avrà un'iperquadrica fondamentale. Ma questa non sarà rigata: invero uno qualunque di quegli ∞^2 punti ha uno stesso piano della catena spaziale per piano tangente alla quadrica ed all'iperquadrica, e nel fascio delle rette per quel punto in quel piano l'antipolarità determina un'antinvoluzione **A** che è il prodotto dell'antinvoluzione **B** determinatavi dall'antinvoluzione spaziale per l'involuzione **I** determinata dalla polarità, cioè per un'involuzione avente per rette unite due rette omologhe di **B**; ora poichè **B** ha una catena fondamentale, non potrà **A** averne (altrimenti una retta unita di **A** avrebbe per omologa rispetto a **B** la sua coniugata armonica rispetto alle due rette unite dell'involuzione **I**, cioè **B** ammetterebbe due coppie di rette omologhe separantisi fra loro nella catena semplice che le contiene, il che, secondo la fine del n. 18, è assurdo) ([49]).

33. Dato un triangolo o tetraedro polare di un'antipolarità, per riconoscere la posizione dei suoi elementi rispetto a questa si consideri una catena piana o spaziale passante pei suoi vertici: essa sarà permutabile all'antipolarità (n. 30) e su essa, fra i suoi punti e le sue catene, rettilinee o piane, quell'antipolarità determinerà una corrispondenza polare, che in forza delle cose precedenti sarà della specie analoga a quella dell'antipolarità (cioè avrà punti uniti se questa ne ha, ecc. ecc.). Applicando dunque le cose note sui triangoli e tetraedri polari delle polarità nelle catene piane e spaziali (cfr. la fine del n. 12), ed inoltre il fatto visto dianzi (n. 32) che una retta della catena considerata contiene simultaneamente dei punti uniti dell'antipolarità e dei punti uniti della polarità nella catena avremo che:

Un triangolo polare rispetto ad un'iperconica ha un lato solo che non la sega, e quindi un punto solo interno ad essa ([50]).

Un tetraedro polare rispetto ad un'iperquadrica rigata ha solo due spigoli opposti che non la taglino.

([49]) Seguendo la definizione generale di ente *reale* (v. n. 6) chiamiamo *reale* un'antipolarità del piano reale o dello spazio quando essa è permutabile alla corrispondenza di *coniugio*. Allora un'antipolarità reale si costruirà mediante una polarità reale facendo corrispondere ad ogni elemento il coniugato di quello che gli è omologo nella polarità (o, ciò che è lo stesso, l'omologo in questa del coniugato). Se la polarità che essa definisce *fra gli elementi reali* del piano o dello spazio non ha punti (reali) uniti l'antipolarità reale è priva di punti uniti. In caso contrario essa ammetterà un'iperconica od iperquadrica fondamentale *reale* che si può costruire come il luogo delle coppie di punti complessi-coniugati che son reciproci in una polarità reale. Se si è nello spazio e se la polarità che si ha fra gli elementi reali è la polarità rispetto ad una quadrica iperbolica od ellittica, quell'iperquadrica sarà rispettivamente rigata o no. Se invece quella polarità è un sistema nullo, l'iperquadrica sarà necessariamente rigata e conterrà tutti i punti reali dello spazio: essa si potrà definire come l'insieme degli ∞^5 punti (reali ed imaginari) posti sulle ∞^3 rette reali di un complesso lineare reale.

([50]) Dall'esistenza di rette che non incontrano l'iperconica, mentre una curva algebrica è sempre incontrata da ogni retta del suo piano, segue subito che *un'iperconica non contiene alcuna curva algebrica* (in particolare nessuna conica), e quindi che *un'iperquadrica non contiene alcuna superficie algebrica*. Si vede come un'osservazione analoga con opportune restrizioni si possa fare anche per enti iperalgebrici superiori (anche sostituendo alle curve e superficie algebriche degli enti trascendenti). Le curve e le superficie algebriche si posson certo considerare come intersezioni di enti iperalgebrici: ma *non tutti* gli enti iperalgebrici possono servire per tale considerazione.

Un tetraedro polare rispetto ad un'iperquadrica non rigata ha solo tre spigoli concorrenti in un vertice che la seghino, e quindi ha solo quel vertice interno ad essa.

Da queste proposizioni si traggono subito proprietà delle iperconiche ed iperquadriche completamente analoghe a quelle di cui godono le coniche e le quadriche rispetto ai punti interni ed esterni, ecc. Così si avrà che ogni retta passante per un punto interno di un'iperconica o di un'iperquadrica non rigata la sega, che ogni retta che non incontri un'iperconica od un'iperquadrica non rigata ha tutti i suoi punti esterni ad essa, ecc. ecc. (proprietà che si potrebbero far rientrare in una più generale: cfr. la fine del n. 35).

Si trae inoltre immediatamente il modo con cui si devono assumere i dati nella determinazione di un'antipolarità considerata al n. 30 affinchè essa risulti di una data specie. Così se nel piano si determina un'antipolarità dando un triangolo polare ABC ed un punto P colla sua polare p presa nella catena piana $ABCP$, si chiami P' la projezione di P fatta da A su BC e P_1 la traccia di p su BC: saranno B, C e P', P_1 due coppie di punti reciproci rispetto all'antipolarità cercata, sicchè sulla catena rettilinea che le contiene esse non si separeranno (n. 18) se l'antipolarità ha un'iperconica fondamentale che incontri la retta BC, e solo allora. Facendo per gli altri due lati del triangolo ABC la costruzione analoga si dovrà trovare o che in ciascun lato le due coppie di punti ottenute sulla catena rettilinea si separano, oppure che ciò accade solo per un lato: nel 1° caso l'antipolarità non ammetterà un'iperconica fondamentale, nel 2° ne avrà una per cui quel lato sarà esterno.

In modo perfettamente simile si procederebbe nello spazio per la questione analoga ([51]).

34. Qui ci conviene osservare, a proposito di siffatte determinazioni delle antipolarità e delle proposizioni sui triangoli e tetraedri polari viste al n. 30, che esse valgono, con poche modificazioni, anche quando a queste ultime locuzioni si dia un significato più ampio. Si chiami cioè *autopolare* ogni triangolo o tetraedro che sia trasformato in se stesso dall'antipolarità. Allora oltre ai triangoli po-

([51]) Data un'iperquadrica mediante un tetraedro polare ed un suo punto P col relativo piano tangente π (della catena spaziale che congiunge P al tetraedro) si riconosce che l'iperquadrica è rigata o no secondo che, nella catena semplice che le contiene, le coppie di rette del fascio $P\pi$ appoggiate rispettivamente alle coppie di spigoli opposti del tetraedro non si separano mutuamente oppure si separano.

lari finora considerati ve ne sarà una 2ª specie, composta di triangoli in cui solo un vertice ha per polare il lato opposto, mentre gli altri due hanno per polari lati che li contengono e sono perciò uniti (sicchè l'antipolarità deve ammettere un'iperconica fondamentale). Similmente oltre alla specie finora considerata di tetraedri autopolari ve ne sarà una 2ª, in cui solo 2 vertici hanno per polari le facce opposte, sicchè gli altri due sono uniti per l'antipolarità (la quale deve dunque avere un'iperquadrica fondamentale); ed una 3ª, in cui ciascun vertice ha per polare una faccia che lo contiene sicchè 4 spigoli del tetraedro formano un quadrilatero giacente nella iperquadrica fondamentale (la quale deve perciò essere rigata). Orbene, come s'è fatto per quelli di 1ª specie al n. 30 così si può dimostrare in generale che se un'antinvoluzione ed un'antipolarità hanno un triangolo o tetraedro per unito (v. la nota al n. 24) ed autopolare *della stessa specie* (con che intenderemo pure che ogni vertice abbia per omologo nell'antinvoluzione quel vertice che non gli è reciproco nell'antipolarità), le due corrispondenze saranno permutabili. Così da un triangolo o tetraedro autopolare di qualunque specie di un'antipolarità resta determinato un sistema infinito di antinvoluzioni e catene permutabili a quella: per ogni punto passa una tal catena (n. 24); ed anche qui si vede come al n. 30 che la retta od il piano polare del punto in quell'antipolarità dovrà far parte di quella catena, piana o spaziale, e che inversamente se si dà in tal modo la retta od il piano polare del dato punto, da ciò e dal triangolo o tetraedro autopolare riesce individuata l'antipolarità. Ne segue che l'antipolarità piana è pur determinata dandone oltre al triangolo autopolare, di 1ª o 2ª specie, una coppia di punti reciproci distinti, purchè la catena piana che ha quel triangolo per unito della stessa specie e che contiene l'uno di quei punti non contenga anche l'altro: poichè allora resta determinata la retta della catena che passa per questo secondo punto e che si dovrà assumere come polare del primo nell'antipolarità.

35. La *rappresentazione analitica delle antipolarità* e quindi *delle iperconiche ed iperquadriche* si fa assai semplicemente. Affinchè l'antireciprocità rappresentata (n. 9) dall'equazione

$$\Sigma\, a_{lm}\, x_l\, \bar{y}_m = 0 \tag{1}$$

sia un'antipolarità, cioè equivalga alla sua inversa, dovranno la (1) e l'equazione sua coniugata

$$\Sigma\, \bar{a}_{lm}\, \bar{x}_l\, y_m = 0 \tag{$\bar{1}$}$$

equivalere a quella della reciprocità inversa

$$\Sigma a_{lm} y_l \overline{x}_m = 0 ,$$

ossia, scambiando gli indici l, m:

$$\Sigma a_{ml} x_l \overline{y}_m = 0 . \tag{2}$$

Ora il confronto della (2) colla $(\overline{1})$ conduce a:

$$a_{ml} = \varrho \overline{a}_{lm} , \tag{3}$$

essendo ϱ un fattor costante, indipendente dagl'indici. Lo scambio di questi dà

$$a_{lm} = \varrho \overline{a}_{ml} ,$$

e prendendo i coniugati

$$\overline{a}_{lm} = \overline{\varrho} a_{ml} ,$$

sicchè confrontando colla (3) si ha:

$$\varrho \cdot \overline{\varrho} = 1 , \quad \text{ossia mod. } \varrho = 1 . \tag{4}$$

Di qui si trae subito la possibilità di determinare, in infiniti modi, un numero complesso σ tale che sia

$$\varrho = \overline{\sigma} : \sigma .$$

Con ciò la (3) diventa

$$\sigma a_{ml} = \overline{\sigma} \overline{a}_{lm} ,$$

e mostra che: *l'equazione di un'antipolarità si può sempre moltiplicare per un fattor numerico tale che ogni coefficiente venga ad essere coniugato a quello che ha gli stessi indici, ma scambiati; sicchè in particolare ogni coefficiente coi due indici uguali diventi reale.* (Queste particolarità nei coefficienti si conservano per trasformazioni lineari, com'è facile vedere).

È poi evidente che viceversa ogni equazione di tal fatta rappresenta un'antipolarità. Si può dunque assumere in generale come equazione di un'antipolarità la seguente:

$$\Sigma a_{lm} x_l \overline{y}_m = 0 , \tag{5}$$

ove sia

$$a_{ml} = \overline{a}_{lm} ; \tag{6}$$

ed in conseguenza come equazione di un'iperconica o di un'iperquadrica:

$$\Sigma a_{lm} x_l \overline{x}_m = 0 , \tag{7}$$

con le stesse condizioni (6) pei coefficienti ed inoltre con la condizione che vi siano effettivamente dei punti soddisfacenti a quest'equazione ([52]).

La forma iperalgebrica (7) con le condizioni (6) ha, qualunque sia il punto x che vi si sostituisce, i suoi termini a due a due coniugati, sicchè prende soltanto valori reali. Se questi valori hanno tutti uno stesso segno, l'equazione (7) non rappresenta un'iperconica od un'iperquadrica; l'antipolarità (5) non ha punti uniti. In caso contrario l'iperconica o l'iperquadrica rappresentata da (7) divide i punti complessi del piano o dello spazio in due regioni corrispondentemente ai due segni che il 1^0 membro della (7) può assumere: per l'iperconica e per l' iperquadrica non rigata le due regioni sono costituite dai punti *interni* e dai punti *esterni*.

36. Quando l'equazione dell'antipolarità è riferita ad un triangolo o tetraedro polare, essa si riduce, come subito si vede, alla forma (*canonica*)

$$\Sigma a_l x_l \bar{y}_l = 0,$$

in cui i coefficienti a_l si possono assumere tutti reali. Allora si riconosce subito la specie dell'antipolarità. I punti uniti, cioè l'iperconica o l'iperquadrica fondamentale, saranno dati da

$$\Sigma a_l x_l \bar{x}_l = 0, \tag{8}$$

ossia

$$\Sigma a_l (\text{mod. } x_l)^2 = 0,$$

e quindi esisteranno solo se quei coefficienti a_l non sono tutti d'un segno. In tale ipotesi, e se si è nello spazio, si avrà poi un'iperquadrica rigata solo quando due di quei coefficienti sian di segno contrario agli altri due ([53]).

([52]) Il ragionamento fatto, applicato al campo binario, dà pure la rappresentazione analitica delle antinvoluzioni e delle catene nelle forme di 1ª specie alla quale siam già ricorsi nella nota al n. 18. Esso si può anzi estendere agli enti iperalgebrici di ogni ordine e prova allora un'asserzione relativa alle forme iperalgebriche *reali* fatta nell'introduzione di questo Saggio.

([53]) Per le forme iperalgebriche reali del tipo

$$\Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m, \qquad \text{ove} \qquad a_{ml} = \bar{a}_{lm}$$

essendo le x e le y variabili (in numero qualunque) *cogredienti*, o addirittura uguali, ha luogo un *teorema d'inerzia* analogo a quello ben noto per le forme algebriche quadratiche (e riducibile a questo col supporre reali tanto i coefficienti

Se invece un'iperconica vien riferita ad un triangolo autopolare di 2ª specie, la sua equazione prende la forma

$$(9) \qquad a_{12}\, x_1\, \overline{x}_2 + a_{21}\, x_2\, \overline{x}_1 + a_{33}\, x_3\, \overline{x}_3 = 0 \;;$$

e similmente per un'iperquadrica riferita ad un tetraedro autopolare di 2ª specie si ha l'equazione

$$(10) \qquad a_{12}\, x_1\, \overline{x}_2 + a_{21}\, x_2\, \overline{x}_1 + a_{33}\, x_3\, \overline{x}_3 + a_{44}\, x_4\, \overline{x}_4 = 0 \,,$$

mentre se è rigata e si riferisce ad un tetraedro autopolare di 3ª specie diventa

$$(11) \qquad a_{12}\, x_1\, \overline{x}_2 + a_{21}\, x_2\, \overline{x}_1 + a_{34}\, x_3\, \overline{x}_4 + a_{43}\, x_4\, \overline{x}_3 = 0 \,.$$

Naturalmente anche in queste equazioni s'intende che i coefficienti verifichino la (6) [54].

---

delle forme quanto quelli delle trasformazioni lineari che si considerano), che si può dimostrare con lo stesso ragionamento semplicissimo che si usa di solito per quello. Si può cioè in infiniti modi ridurre con una trasformazione lineare una forma siffatta alla forma *canonica*

$$\Sigma a_l\, x_l\, \overline{y}_l \,,$$

ma sempre in quest'espressione, in cui i coefficienti saranno tutti reali, ve ne sarà un numero fisso di positivi (e di negativi). — Considerando l'antipolarità che rappresenta geometricamente una tal forma si ha un'interpretazione geometrica di questo teorema d'inerzia (simile a quella nota relativa alle forme quadratiche). L'antipolarità non ha punti uniti se tutti i coefficienti della forma canonica sono dello stesso segno. In caso contrario, se il numero dei coefficienti di uno stesso segno è r, e il numero di quelli di segno opposto è $\geq r$, l'antipolarità ha un'*iperquadrica* fondamentale di quella specie che è caratterizzata dal contenere degli S_{r-1} e non degli spazi superiori.

(54) In generale per le iperquadriche di S_d, oltre alla rappresentazione canonica accennata or ora nella nota precedente, se ne hanno altre corrispondenti alle varie specie di (poligoni completi di $d+1$ vertici appartenenti ad S_d, o) *piramidi* autopolari che l'iperquadrica ammette. Esse son date dall'equazione

$$\Sigma a_{lm}\, x_l\, \overline{x}_m = 0 \,, \qquad \text{ove} \qquad a_{ml} = \overline{a}_{lm} \,,$$

in cui l, m indichino i numeri $1, \ldots, d+1$, accoppiati secondo una qualunque *corrispondenza univoca involutoria*; come si vede ad esempio nelle equazioni (8), ..., (11). Allora la piramide fondamentale è autopolare: il vertice d'indice l ha per polare la faccia d'indice m, che è la sua opposta solo per $l = m$. Se r sono le combinazioni d'indici *distinti* fra le coppie lm considerate, altrettante saranno le coppie di vertici della piramide (*autopolare di specie* r + 1) le quali giaceranno sull'iperquadrica, e questa dovrà (come appare da quell'equazione) contenere degli S_{r-1}, ad esempio quelli fondamentali che congiungono rispettivamente i vertici delle r coppie.

Da queste rappresentazioni canoniche, ed in particolare dalla prima (che si trasforma subito nelle altre, ma ha il vantaggio di valere per *tutte* le antipolarità), segue immediatamente che due antipolarità della stessa specie (distinte o no), due iperconiche, o due iperquadriche non rigate, od infine due iperquadriche rigate, sono fra loro projettive (ed antiprojettive) in infiniti modi: potendosi prendere ad arbitrio due triangoli o tetraedri polari come omologhi nella projettività (e nell'antiprojettività) (55). Si trarrebbero anche facilmente i

---

(55) *Delle trasformazioni lineari della forma* $\Sigma a_{lm} x_l \bar{x}_m$ (*con* $a_{ml} = \bar{a}_{lm}$) *in se stessa.* — Tali trasformazioni, vale a dire le collineazioni permutabili ad una data antipolarità, godono di proprietà analoghe (ma in certo modo più generali) di quelle delle collineazioni che mutano in sè una data quadrica, cioè delle *sostituzioni ortogonali.* Tanto dal punto di vista *geometrico* quanto dal punto di vista *algebrico* esse presentano un grande interesse e meritano di essere studiate. Oltre poi all'importanza che esse hanno in sè, vi è da considerare, ad esempio, quella delle loro applicazioni alle *funzioni di variabili complesse che ammettono delle trasformazioni lineari in se stesse.* Invero le trasformazioni lineari i cui gruppi definiscono le *funzioni modulari ellittiche,* ed in generale le *funzioni Fuchsiane* (specialmente nelle ricerche dei signori KLEIN e POINCARÉ su quelle funzioni), son rappresentate geometricamente dalle projettività che in una forma semplice mutano una catena in se stessa. Similmente, in lavori che già nell'introduzione ho ricordati, il sig. PICARD si occupa delle funzioni di due variabili che ammettono un gruppo di trasformazioni lineari a coefficienti interi, le quali corrispondono a certe collineazioni piane che mutano in sè un'iperconica fissa. E volendo generalizzare ancora si dovranno considerare quelle funzioni dei punti complessi di un S_d che non mutano per convenienti gruppi discontinui di collineazioni, le quali lascino fissa un'iperquadrica appartenente a quello spazio. Appare dunque opportuno (sebbene pel seguito di questo Saggio non occorra) un cenno generale su tali trasformazioni.

Le particolarità di una collineazione di S_d dipendono tutte, com'è noto, da quelle del suo *determinante caratteristico* (v. SEGRE: *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie,* ecc., Mem. Acc. Lincei, (3) XIX, 1884): è dunque questo determinante che si tratta di esaminare.

Supponiamo anzitutto che le sue radici siano tutte distinte, sicchè la collineazione abbia precisamente $d+1$ punti uniti. Allora se essa è permutabile ad un'antipolarità, poichè i suoi punti uniti dovranno avere per polari rispetto a questa i suoi S_{d-1} uniti, segue che quei punti saranno i vertici di una piramide autopolare per l'antipolarità. Dunque corrispondentemente alle varie specie di piramidi autopolari, vi saranno *varie specie di collineazioni trasformanti in sè un'iperquadrica.* Assumendo poi quella piramide come fondamentale, la collineazione viene rappresentata da

$$x'_s = p_s x_s$$

essendo le p_s le radici del determinante caratteristico; mentre l'equazione dell'antipolarità prende la forma indicata nella nota preced., dipendente dalla specie della piramide autopolare. Quindi affinchè quella collineazione trasformi effetticriteri per distinguere la specie di un'antipolarità, senza ridurne l'equazione a forma canonica: così, nel caso dello spazio, vista l'invariantività del discriminante e del suo segno, si ha che questo è

---

vamente in se stessa l'antipolarità, o meglio la forma che la rappresenta analiticamente (il che suppone solo che si scelga convenientemente un fattore per cui si moltiplicano tutte le variabili), è necessario e sufficiente che per ognuna delle coppie d'indici lm ivi considerate sia

$$p_l \bar{p}_m = 1 .$$

Queste relazioni provano che: *una collineazione qualunque non muta in generale nessun'antipolarità in se stessa, ma se per una collineazione avente precisamente* $d+1$ *punti uniti distinti esiste un'antipolarità che le sia permutabile, saranno tali tutte le infinite antipolarità per le quali la piramide determinata da quei punti è autopolare della stessa specie che per quella* (proposizioni che sono già applicabili per $d=1$ e quindi per le *catene unite* di una projettività sopra una forma semplice).

Ma questi risultati si possono generalizzare ed estendere ai casi in cui il determinante caratteristico abbia radici multiple qualunque. Procedendo in modo simile a quello che per le collineazioni permutabili ad una quadrica io ho tenuto altrove (*Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale*, ecc., Mem. Acc. Torino, (2) XXXVII, 1885; v. specialmente i n.i 2 e 3) si ottengono infatti, tra le altre, le proposizioni seguenti:

Per qualunque trasformazione lineare atta a mutare in se stessa una forma iperalgebrica del tipo considerato, il determinante caratteristico ha le sue radici accoppiate per modo che ogni radice è coniugata al valor reciproco della sua associata e in particolare ogni radice autoassociata ha per modulo l'unità (sicchè nello sviluppo del determinante caratteristico secondo le potenze della variabile i coefficienti equidistanti dagli estremi sono coniugati, a meno di un fattore). *A due radici associate distinte corrispondono divisori elementari del determinante aventi rispettivamente gli stessi gradi.*

Dalle note reciprocità che mutano la collineazione nella sua inversa e gli spazi fondamentali di punti uniti negli spazi fondamentali di S_{d-1} uniti rispettivamente *associati* a quelli, facendole seguire dall'antipolarità data, si traggono delle *anticollineazioni che trasformano la collineazione nella sua inversa, scambiando fra loro due spazi fondamentali di punti (o di* S_{d-1}*) che corrispondono a radici associate* e che perciò diciamo pure *associati*. Quindi *i due spazi fondamentali di punti e di* S_{d-1}, *i quali sono associati ad uno stesso spazio fondamentale di punti saranno polari fra loro nell'antipolarità.* Ne segue che *due spazi fondamentali di punti i quali non siano associati sono reciproci nell'antipolarità, cioè stanno ognuno nello spazio polare dell'altro.* In particolare *ogni spazio fondamentale di punti che non sia autoassociato sta sull'iperquadrica. Se invece si considera uno spazio fondamentale di punti autoassociato e s'indica con* r *il numero dei divisori elementari di grado* >1 *che gli corrispondono, esso sarà tagliato secondo un* S_{r-1} *dallo spazio fondamentale di* S_{d-1} *che gli è associato e che in pari tempo gli è polare, e però toccherà l'iperquadrica lungo quell'*S_{r-1}. Queste ultime proposizioni applicate successivamente alle varie specie di forme (quali furono distinte nella prima nota a questo n^0), dànno risultati algebrici notevoli. Così *se la forma trasformata in se stessa è definita, cioè equivalente alla* negativo solo quando l'antipolarità ammette un'iperquadrica fondamentale non rigata.

Osserviamo ancora che se un' iperconica od iperquadrica è rappresentata *come luogo* dall'equazione (7), se ne deduce che le sue rette od i suoi piani tangenti devono soddisfare l'equazione *aggiunta*

$$\Sigma \alpha_{lm} \xi_l \bar{\xi}_m = 0 , \tag{12}$$

ove α_{lm} indica il complemento algebrico di a_{lm} nel discriminante della (7), sicchè dalle (6) risulta

$$\alpha_{ml} = \bar{\alpha}_{lm} ; \tag{13}$$

la (12) rappresenta dunque l'iperconica od iperquadrica considerata *come inviluppo*. Ecc. ecc.

37. L'equazione

$$\Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 , \quad \text{ove} \quad a_{ml} = \bar{a}_{lm} ,$$

rappresenta un'antipolarità nel senso finora dato a questa locuzione solo quando il suo discriminante non sia nullo, il che si supponeva sempre. Però conviene considerare anche le *antipolarità degeneri*, per le quali il discriminante è nullo (cfr. n. 10) ([56]). Si vede subito, in modo analogo a cose ben note sulle coniche e sulle quadriche, che nel piano un'antipolarità degenere di 1ª specie fa corrispondere (come punti reciproci in essa) i punti posti su rette omologhe di un'antinvoluzione di un fascio di rette: se questa ha rette unite, l'antipolarità ha un'iperconica fondamentale degenerata nella catena di rette

---

somma $\Sigma x_1 \bar{x}_1$ *delle norme delle variabili, il determinante caratteristico avrà tutte le radici* (autoassociate cioè) *col modulo uguale ad* 1, *e tutti i divisori elementari di* 1° *grado.* Ecc.

Infine osserviamo che la relazione fra due radici associate del determinante caratteristico è rappresentata geometricamente dal fatto che *sulla retta congiungente due punti omologhi qualunque della collineazione esiste un'antinvoluzione semplice in cui si corrispondono quei punti, come pure i due punti d'intersezione coi sostegni di due spazi fondamentali di* S_{d-1} *associati; (quell'antinvoluzione è permutabile con quella dei punti della retta stessa reciproci rispetto all'antipolarità).*

([56]) Definendo le antipolarità con equazioni tangenziali invece che con equazioni locali si avrebbero altre degenerazioni, corrispondenti per dualità a quelle che ora accenniamo.

unite dell'antinvoluzione (57); il centro del fascio di rette è il punto singolare o punto doppio dell'antipolarità e dell'iperconica ed è definito dalle equazioni

$$\sum_l a_{lm} x_l = 0 . \tag{14}$$

Se l'antipolarità è degenere di 2ª specie, queste equazioni coincidono e si ha così tutta una retta di punti singolari a ciascun dei quali corrisponde ogni punto del piano: la retta stessa è allora il luogo dei punti uniti (∞^2 anzi che ∞^3) dell'antipolarità, e la definisce comple-

---

(57) Che gli ∞^3 punti di una catena di rette di un fascio formino un'iperconica (e che similmente gli ∞^5 punti di una catena semplice di piani formino un'iperquadrica, ecc.) risulta subito dall'equazione reale

$$A\overline{B} - \overline{A}B = 0$$

che per la catena stessa abbiamo incontrata nella nota alla fine del n. 21; ovvero anche dalla rappresentazione parametrica che di tali ∞^3 punti si vide al n. 14 (poichè uguagliandone le coordinate, a meno di un fattore, a quelle forme (3), ed eliminando fra queste uguaglianze e le loro coniugate i parametri e quel fattore col suo coniugato si ottiene un'equazione reale e lineare tanto nelle coordinate quanto nelle loro coniugate).

Valendosi della rappresentazione parametrica delle catene si vede facilmente la natura dell'*intersezione di una catena con una forma iperalgebrica rappresentata da un'equazione reale.* Basta in fatti sostituire in quest'equazione alle coordinate (ed alle coniugate) le forme lineari dei parametri reali $\lambda, \mu, \ldots$ (e le forme coniugate), che rappresentano la catena. Si avrà con ciò un'equazione *a coefficienti reali* fra quei parametri, la quale sarà di grado $2n$ se i due ordini della forma iperalgebrica sono eguali ad n. La discussione di quell'intersezione si riduce dunque all'esame di una forma *algebrica* a coefficienti reali di grado $2n$, esame fatto dal punto di vista della *realtà* delle variabili $\lambda, \mu, \ldots$. Applicando ciò alle iperconiche ed iperquadriche si ha ad esempio che le loro intersezioni rispettivamente con catene piane e spaziali che non vi giacciano sono le trasformate per projettività delle varietà dei punti reali di coniche o quadriche reali, e per conseguenza possono mancare affatto, o costituire catene coniche nell'un caso, e nell'altro le trasformate di quadriche ellittiche o di quadriche rigate; cose che per catene permutabili alle iperconiche ed iperquadriche sono evidenti e furono già rilevate, mentre per altre catene si potrebbero dimostrare sinteticamente considerandovi la corrispondenza fra i punti che son reciproci rispetto all'iperconica od iperquadrica. Così ancora se un'iperconica qualunque si sega con una catena semplice di rette del suo piano (iperconica degenere, o catena tripla degenere), dal fatto che su questa catena l'intersezione vien rappresentata da una forma quadratica reale quaternaria si trarrebbe che se essa contiene una catena rettilinea non posta su alcuna retta della catena nominata, ne conterrà in generale due schiere ∞^1 aventi le stesse relazioni mutue che le due schiere di generatrici di una quadrica rigata: fatto che risulterà pure dallo studio dei fasci d'iperconiche. Ecc. ecc.

tamente (l'equazione dell'antipolarità riducendosi allora al prodotto delle due equazioni, fra loro coniugate, della retta), ecc.

Nello spazio un'antipolarità degenere di 1ª specie definisce un'antipolarità non degenere fra gli elementi di una stella avente il centro nel punto singolare (dato ancora dalle equazioni (14)): ai punti di una retta della stella corrisponde il piano che è omologo della retta nell'antipolarità della stella. Se questa ammette delle rette unite esse formeranno un *cono iperquadrico* (di 1ª specie), che sarà l'iperquadrica fondamentale dell'antipolarità spaziale. Invece un'antipolarità degenere di 2ª specie, cioè avente una retta di punti singolari, definisce un'antinvoluzione nel fascio di piani avente questa retta per asse, sicchè ove sia dotata d'iperquadrica fondamentale, questa sarà la varietà costituita dai punti di una catena semplice di piani (cono iperquadrico di 2ª specie). L'antipolarità degenere di 3ª specie si riduce alla corrispondenza fra i punti dello spazio e quelli di un piano fisso; i punti di questo sono i punti uniti (singolari) [58].

---

(58) *Sulle proprietà metriche delle iperconiche ed iperquadriche.* — Chiamando *diametri* e *piani diametrali* le rette od i piani polari di punti e rette all'infinito rispetto ad un'antipolarità piana o spaziale, e *centro* il polo della retta o del piano all'infinito, si hanno per l'antipolarità, e quindi per le iperconiche ed iperquadriche, delle proprietà di simmetria rispetto al centro (se non è all'infinito), ai diametri od ai piani diametrali, completamente simili a quelle note delle polarità, delle coniche e delle quadriche, e collegantisi alla nozione del *centro* di una catena rettilinea che si accennò nella nota sulle proprietà metriche delle catene semplici posta alla fine del n. 18. Su esse, come sulla distinzione delle iperconiche ed iperquadriche in specie basata sul modo di comportarsi rispetto alla retta ed al piano all'infinito, non occorre fermarsi.

Un'iperconica che non sia tangente alla retta all'infinito avrà per equazione, rispetto a due diametri reciproci come assi cartesiani,

$$a x\bar{x} + b y\bar{y} = c,$$

essendo a, b, c reali. Dunque le norme delle distanze di un punto dell'iperconica da due diametri reciproci son legate da un'equazione lineare a coefficienti reali. Viceversa, se si legano le norme delle distanze di un punto da due o più rette del piano mediante un'equazione lineare (la quale sia possibile), il punto descriverà in generale un'iperconica, se i coefficienti dell'equazione hanno rapporti reali: perocchè allora una tal equazione equivale ad un'equazione reale bilineare nelle coordinate del punto e nelle coniugate. Invece non sembra che si possa definire in modo semplice un'iperconica considerando le distanze da punti fissi (come si fa per le coniche quando si ricorre ai fuochi): giacchè tali distanze introdurrebbero delle funzioni *quadratiche* delle coordinate del punto mobile.

Applicando all'antinvoluzione fra i diametri reciproci alcune osservazioni fatte alla fine della citata nota al n. 18 si hanno altri risultati. Un'iperconica

Per poter studiare meglio alcune altre proprietà delle antipolarità che naturalmente si affacciano alla mente, per esempio i legami che passano fra i vertici di due o più triangoli o tetraedri autopolari in una stessa antipolarità, ecc., convien passare addirittura allo studio dei *sistemi lineari* di antipolarità, di iperconiche ed iperquadriche: è in tale studio, a cui sarà dedicato il Cap. seg., che le dette proprietà troveranno il loro posto migliore.

Sistemi lineari ed intersezioni d'iperconiche e d'iperquadriche.

38. Abbiansi le $r+1$ equazioni linearmente indipendenti

(1) $$\Sigma\, a_{lm}\, x_l\, \bar{y}_m = 0\ , \quad \text{ove} \quad a_{ml} = \bar{a}_{lm}$$

(2) $$\Sigma\, b_{lm}\, x_l\, \bar{y}_m = 0\ , \quad \text{ove} \quad b_{ml} = \bar{b}_{lm}$$

. . . .

---

la quale non incontri la retta all'infinito ammette sempre una coppia di diametri reciproci perpendicolari fra loro, cioè una coppia di *assi*, ed in generale una sola: ne ammette infinite (costituenti una catena) quando i punti ciclici sono reciproci rispetto ad essa. Un'iperconica che tagli la retta all'infinito e però abbia una catena di *asintoti* (tangenti passanti pel centro) avrà pure due assi se i punti ciclici del piano non son separati da essa (sono entrambi interni od entrambi esterni); ma non ne avrà affatto nel caso contrario in cui essa separi i punti ciclici, ed allora vi sarà invece una coppia di asintoti perpendicolari (e ve ne saranno infinite se si presenta la particolarità che i punti ciclici siano reciproci rispetto all'iperconica). Se poi si ha un'iperconica *circolare*, cioè passante pei punti ciclici, allora vi saranno infinite coppie di assi (costituenti una catena) ed infinite coppie di asintoti perpendicolari. — Quanto alle iperconiche tangenti alla retta all'infinito, si vede subito che ognuna di esse ammette un solo asse di simmetria.

Se nessuno dei punti ciclici è interno ad un'iperconica, questa ammetterà dei *fuochi*, cioè dei punti d'intersezione di tangenti dell'iperconica uscenti dai due punti ciclici, ossia punti da ciascun dei quali esce una catena circolare di rette tangenti all'iperconica. Tali fuochi saranno in generale ∞^2 ed oltre che sulle due catene di tangenti condotte dai punti ciclici staranno pure (per le proprietà che presto si vedranno dei fasci d'iperconiche) su una nuova catena semplice di rette, e cioè sulla catena di diametri che contiene gli assi dell'iperconica e che separa armonicamente i punti ciclici: ognuno di questi diametri contiene una catena rettilinea di fuochi, mentre ciascun altro non contiene alcun fuoco. Se l'iperconica è *reale* (v. la nota alla fine del n. 32) i suoi fuochi *reali* formano in generale un cerchio.

Per le iperquadriche si possono dare proprietà metriche analoghe: un'analoga equazione riferita ad una terna di piani diametrali reciproci; l'esistenza nel caso generale di *uno* o di *tre* assi; ecc. ecc.

rappresentanti due o più antipolarità del piano o dello spazio. Mediante esse si determina un *sistema lineare di antipolarità*, e quindi d'iperconiche o d'iperquadriche, considerando l'equazione

$$(3) \qquad \lambda \Sigma\, a_{lm}\, x_l\, \overline{y}_m + \mu \Sigma\, b_{lm}\, x_l\, \overline{y}_m + \dots = 0\ ,$$

analoga a quella che definisce un sistema lineare di polarità, di coniche o di quadriche. Qui però si ha una differenza sostanziale, dalla quale derivano come conseguenze varie altre; ed è che i parametri $\lambda, \mu, \dots$ non possono più essere numeri complessi qualunque, e però la dimensione del sistema non è più $2r$. Invero affinchè la (3) sia l'equazione di un'antipolarità dovranno (n. 35) $\lambda, \mu, \dots$, moltiplicate, ove occorra, per uno stesso fattor numerico, esser tali che

$$\lambda a_{ml} + \mu b_{ml} + \dots = \overline{\lambda}\, \overline{a}_{lm} + \overline{\mu}\, \overline{b}_{lm} + \dots,$$

ossia, tenendo conto delle condizioni a cui soddisfano le a, le $b, \dots$,

$$(\lambda - \overline{\lambda})\, a_{ml} + (\mu - \overline{\mu})\, b_{ml} + \dots = 0\ ,$$

donde infine, in causa dell'indipendenza lineare supposta fra le equazioni (1), (2), ... ,

$$\lambda - \overline{\lambda} = 0\ ,\ \mu - \overline{\mu} = 0\ , \dots ;$$

sicchè la (3) rappresenterà un'antipolarità solo quando $\lambda, \mu, \dots$, o meglio i loro mutui rapporti, siano *reali*. — Ne segue che le antipolarità rappresentate da quell'equazione sono ∞^r (59).

Se nella (3) si fanno coincidere i punti x, y, l'equazione che così si ottiene

$$(4) \qquad \lambda \Sigma\, a_{lm} x_l \overline{x}_m + \mu \Sigma\, b_{lm} x_l \overline{x}_m + \dots = 0$$

rappresenta, per valori reali dei parametri, un *sistema lineare d'iperconiche o d'iperquadriche*, composto delle iperconiche od iperquadriche fondamentali per le antipolarità del sistema (3).

Da $r + 1$ *forme* (cioè antipolarità, iperconiche, iperquadriche) linearmente indipendenti è individuato un sistema lineare di dimensione r che le contiene; l'indipendenza lineare consiste nel non stare in un sistema lineare inferiore. Così due forme distinte determinano

(59) Questo breve ragionamento vale per un numero qualunque di variabili, e però si applica già ai sistemi lineari di antinvoluzioni e di catene semplici su una forma di 1ª specie. Esso è pur valido per enti di gradi superiori: se le forme iperalgebriche $f(x, \overline{x})$, $\varphi(x, \overline{x})$, ... sono *reali* nel senso fissato nell'introduzione di questo Saggio, le forme *reali* del sistema lineare $\lambda f + \mu\varphi + \dots$ da esse determinato sono quelle che corrispondono a valori reali dei parametri $\lambda, \mu, \dots$.

un *fascio* ∞^1; tre forme non situate in un fascio determinano una *rete* ∞^2; ecc.

39. Assoggettando una forma del sistema lineare ad avere una data coppia x, y di punti reciproci si vengono a porre pei parametri reali $\lambda, \mu, \ldots$ *due* equazioni lineari reali, cioè quelle in cui si scinde la (3) (combinazioni di questa e della sua coniugata): però se x ed y coincidono, cioè se si dà un punto unito, quelle equazioni coincidono nella (4). Ne segue ad esempio che da k coppie di punti reciproci distinti (ove $2k \leq r$) ed $r - 2k$ punti uniti è *in generale* individuata una forma del sistema lineare di dimensione r. Inoltre è chiaro che ogni coppia di punti reciproci, ed in particolare ogni punto unito, che sia comune a due o più antipolarità (1), (2), ... , od alle loro iperconiche o iperquadriche fondamentali, sarà pur comune a tutte le forme del sistema lineare che esse determinano.

Esaminando i coefficienti delle loro equazioni si scorge che le antipolarità e le iperconiche di un piano formano un sistema lineare di dimensione 8, mentre le antipolarità spaziali e le iperquadriche formano un sistema lineare ∞^{15}. Ne segue che le antipolarità, le iperconiche e le iperquadriche, aventi alcuni punti uniti dati od alcune date coppie di punti reciproci formano sistemi lineari le cui dimensioni si conosceranno in generale immediatamente. In particolare per 8 punti del piano passa in generale un'iperconica ben determinata, per 7 punti un fascio, per 6 una rete, per 5 un sistema triplo, e così via; e vedremo in seguito che le iperconiche di quel fascio hanno in generale ∞^2 punti comuni, quelle della rete ∞^1, e quelle del sistema triplo un sesto punto oltre ai 5 per cui esso è condotto. Similmente per 15 punti dello spazio passa in generale una sola iperquadrica, e per $15 - r$ punti un sistema lineare ∞^r avente per *base*, se $r \leq 5$, una ∞^{5-r} di punti comuni.

40. Se nell'equazione (3) del n. 38 si fan variare *ad arbitrio* i parametri $\lambda, \mu, \ldots$, essa rappresenta un *sistema lineare* ∞^{2r} *di antireciprocità* nel quale è contenuto — e corrisponde ai valori *reali* dei parametri — il sistema lineare ∞^r di antipolarità che ivi si considerava. Quel sistema di antireciprocità presenta la particolarità che le antireciprocità in esso contenute sono a due a due inverse fra loro e corrispondenti a valori coniugati di $\lambda, \mu, \ldots$, (come subito si scorge formando l'equazione inversa della (3)). Si potrebbe dire che in un siffatto sistema lineare di antireciprocità esiste un'*antinvoluzione* in cui si corrispondono due antireciprocità quando sono fra loro inverse,

e per cui è *catena* fondamentale di specie r il sistema delle antipolarità. Queste espressioni corrisponderebbero al fatto che scaturisce dall'equazione (3) e che in seguito adopreremo ripetutamente: che *le rette od i piani polari di un punto rispetto alle antipolarità del sistema lineare costituiscono una catena* (generale o degenere) *nella varietà lineare formata dalle rette o dai piani che corrispondono al punto nelle antireciprocità del sistema, e quella catena è fondamentale per l'antinvoluzione* (generale o degenere) *che in questa varietà si ha considerando come omologhi due rette o due piani che corrispondano al punto in due antireciprocità inverse fra loro.* Aggiungiamo che la varietà delle polari del punto è riferita *projettivamente* al sistema lineare di corrispondenze (cioè al sistema descritto dai parametri $\lambda, \mu, \ldots$), sicchè mutando il punto essa rimane projettiva a se stessa.

In particolare le polari di un punto rispetto ad un fascio di antipolarità del piano concorrono in un punto, che sarà reciproco di quello rispetto a tutte le antipolarità, e formano una catena semplice che sarà riferita projettivamente a quel fascio; i poli di una retta rispetto alle varie antipolarità di questo si potranno considerare come intersezioni delle polari di due punti fissi arbitrari della retta e però formeranno una catena semplice di 2^0 ordine (v. n. 25) situata sulla conica luogo di quei punti che son reciproci ai punti della retta rispetto a tutte le antireciprocità del fascio (60). Similmente rispetto ad una rete di antipolarità piane le polari di un punto formano una catena doppia di rette; ed i poli di una retta formano la ∞^2 (di ordini 1 e 2) luogo delle intersezioni delle rette omologhe di due catene piane projettive. Ecc. Nello spazio rispetto ad un fascio di antipolarità i piani polari di un punto stanno pure in un fascio e vi formano una catena semplice, mentre le polari di una retta formano una catena semplice di una schiera di rette di una quadrica, ed i poli di un piano formano una catena semplice cubica. Analogamente per le reti ecc.

---

(60) Se ad ogni punto di un piano si fa corrispondere quel punto che gli è reciproco in due date antireciprocità (e quindi nel fascio da esse determinato) si avrà una corrispondenza *iperalgebrica* in cui ad una retta corrisponde una conica, e in generale ad una curva (algebrica) corrisponde una curva (algebrica). Si avverta però che un fatto analogo non si presenta sempre nelle corrispondenze iperalgebriche: generalmente da corrispondenze siffatte le curve non sono trasformate in curve (v. ad esempio la corrispondenza accennata nella seconda nota al n. 47).

41. Come nello studio dei sistemi lineari di antipolarità si presentano naturalmente le antireciprocità non involutorie, così viceversa lo studio di una tale antireciprocità si può collegare strettamente con quello di un fascio di antipolarità. Sia in fatti

$$\Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m = 0$$

l'equazione di un'antireciprocità non involutoria: perchè un fascio che la contenga passi pure per un fascio di antipolarità esso dovrà (n. 40) contenere anche l'antireciprocità inversa di quella, cioè

$$\Sigma \bar{a}_{ml} x_l \bar{y}_m = 0 ;$$

ed effettivamente il fascio di antireciprocità determinato da queste due,

$$\lambda \Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m + \mu \Sigma \bar{a}_{ml} x_l \bar{y}_m = 0 ,$$

contiene un fascio di antipolarità, corrispondenti a valori coniugati di λ e μ, poichè per valori siffatti quest'equazione diventa tale che due coefficienti qualunque corrispondenti agli stessi indici ma invertiti sono sempre coniugati. Ogni punto il quale sia unito per l'antireciprocità data, e quindi anche per l'inversa, sarà pure unito per tutto quel fascio di antireciprocità, e starà perciò sulla base del fascio d'iperconiche o d'iperquadriche; viceversa ogni punto x di quella base soddisferà all'equazione del fascio di antireciprocità in cui si ponga $y = x$ e però sarà unito per ognuna di quelle antireciprocità. Dunque concludiamo che: *i punti uniti di un'antireciprocità non involutoria, piana o spaziale, costituiscono (ove esistano) la varietà base di un fascio d'iperconiche o d'iperquadriche, e viceversa una tal varietà si può sempre considerare come il luogo dei punti uniti di ogni antireciprocità non involutoria di un fascio determinato.*

L'antireciprocità non involutoria da cui siamo partiti può essere *degenere*. Allora (v. n. 10) se si è nel piano essa riferisce antiprojettivamente fra loro due certi fasci di raggi; se si è nello spazio essa dà luogo a due stelle antireciproche ovvero a due fasci antiprojettivi di piani secondo che è degenere di 1ª o di 2ª specie. La sua inversa è data dalla stessa antiprojettività di fasci od antireciprocità di stelle, scambiando però le due forme. In ogni caso sono punti uniti dell'antireciprocità i punti comuni agli elementi omologhi dei due fasci o delle due stelle. Dunque applicando a questi casi le osservazioni precedenti abbiamo che: *Nel piano il luogo dei punti d'incontro dei raggi omologhi di due fasci antiprojettivi di rette è la base di un fascio d'iperconiche. Nello spazio il luogo dei punti d'incontro degli elementi omologhi di due stelle antireciproche, oppure di due* *fasci antiprojettivi di piani, è la base di un fascio d'iperquadriche.*

In quali casi si possa inversamente considerare la base di un fascio d'iperconiche o d'iperquadriche come generata da due fasci antiprojettivi di rette o di piani, o da due stelle antireciproche, risulterà nello studio speciale che ora passiamo a fare dei fasci d'iperconiche o d'iperquadriche (v. n[i] 45 e seg[i]).

42. **Dei fasci.** — Cominciamo coll'esame della base di un *fascio d'iperconiche.* È chiaro che se in questo fascio vi sono delle antipolarità prive d'iperconiche fondamentali, cioè prive di punti uniti, il fascio sarà privo di base; e così pure se vi è un'antipolarità avente un solo punto unito e quindi degenere, la base del fascio o manca affatto o si riduce a quell'unico punto.

In generale dall'equazione del fascio di antipolarità risulta evidente che esso determina su una retta qualunque un fascio di antinvoluzioni, o per eccezione un'antinvoluzione unica. Quindi le iperconiche del fascio tagliano in generale la retta secondo le catene di un fascio; donde segue (v. la nota al n. 18 (61) ed il n. 24) che la varietà Q base del fascio d'iperconiche (62) incontra in generale la retta in due punti, od in nessuno: a seconda dei due casi non vi è, oppure vi è sulla retta una determinata coppia di punti reciproci rispetto a tutte le forme del fascio. Se poi si avesse il caso eccezionale in cui sulla retta fosse determinata un'unica antinvoluzione di punti reciproci da tutte le antipolarità ed antireciprocità del fascio, l'iperconica di questo che passerebbe per un punto della retta non unito per l'antinvoluzione dovrebbe contenere tutta la retta e quindi degenerare in una catena semplice di rette: sicchè solo sulle rette che compongono le iperconiche degeneri del fascio accade quel fatto eccezionale e può l'intersezione con Q esser costituita da una catena semplice (essendo allora tale intersezione quella delle rette stesse con *una* iperconica del fascio, diversa da quella degenere considerata).

Come limite del caso generale in cui una retta non incontra l'ente Q, oppure lo taglia in due punti, si ha il caso in cui la retta è *tangente* a Q in un punto, cioè quei due punti del caso generale

(61) Alcune proprietà ivi trovate pei fasci di catene di una forma semplice sono le analoghe di proprietà che presto vedremo dei fasci d'iperconiche e d'iperquadriche.

(62) Nel seguito chiameremo sempre Q l'insieme dei punti base di un fascio d'iperconiche (e Γ l'ente analogo per un fascio d'iperquadriche).

vengono a coincidere. Allora nel fascio di catene rettilinee determinate sulla retta dal fascio d'iperconiche ve ne sarà una degenere che si ridurrà a quel solo punto; vale a dire tra quelle iperconiche ve ne sarà una tangente alla retta nel punto considerato; e viceversa. Dunque le tangenti a Q nei suoi vari punti sono le tangenti nei punti stessi alle iperconiche del fascio. Ne segue (n. 40) che le tangenti in un punto ordinario di Q formano in generale una catena semplice (il che concorda con una proposizione generale del n. 15); ma può quella catena ridursi ad una retta sola, tangente comune a tutte le iperconiche; oppure può un punto di Q esser tale che *tutte* le rette passanti per esso vi siano tangenti, e ciò accade se il punto stesso è singolare per un'iperconica degenere del fascio: esso si dirà allora *singolare* o *doppio* anche per Q.

Se l'ente Q esiste, cioè se vi è almeno un punto A il quale sia comune alle iperconiche di un fascio, tali punti, cioè i punti di Q, saranno in generale ∞^2; poichè su ciascuna delle ∞^2 rette passanti per A (escluse le tangenti) vi sarà in generale un altro punto di Q. Ciò se A è un punto ordinario. Se poi esso è singolare per un'antipolarità del fascio, e se questa è degenere di 1ª specie, avendo per fondamentale una catena semplice di rette, l'ente Q si comporrà in generale ancora di ∞^2 punti; mentre se essa è degenere di 2ª specie ed ha quindi una retta per fondamentale, Q si ridurrà in generale ad una catena rettilinea, ed eccezionalmente al solo punto A, oppure a tutta quella retta.

43. Per la base Γ di un fascio d'iperquadriche si possono fare considerazioni analoghe alle precedenti relative alla base Q di un fascio d'iperconiche. Del resto le une si collegano alle altre osservando che un piano qualunque sega il fascio di antipolarità in generale secondo un'altro fascio di antipolarità. Per eccezione può un piano dare per sezione una sola antipolarità piana: ciò accade quando il piano stesso sia contenuto in un'iperquadrica del fascio, la quale deve quindi degenerare in una catena semplice di piani. Mentre in questo caso eccezionale un piano di questa catena il quale incontri Γ la taglia generalmente secondo un'iperconica, in generale avviene che un piano qualunque incontra Γ secondo un ente Q.

Una retta qualunque incontra Γ in generale in due punti od in nessuno; è *tangente* a Γ se quei due punti coincidono. Le tangenti a Γ in un suo punto A sono le tangenti in questo alle varie iperquadriche del fascio ed hanno quindi per luogo i piani tangenti in A a queste iperquadriche, piani che formano in generale (n. 40) una catena semplice e che si posson chiamare *tangenti* a Γ (coincidono coi piani che segano Γ secondo enti Q aventi in A un punto doppio): la retta di loro intersezione è la *tangente singolare* in A (cfr. n. 15). Va escluso il caso che A sia punto singolare per un'iperquadrica degenere del fascio: allora esso è *singolare* o *doppio* per Γ, in quanto che ogni retta passante per esso si può considerare come tangente a Γ, non incontrando essa altrove quest'ente, a meno che essa giaccia in quell'iperquadrica, nel qual caso incontra Γ in generale secondo una catena semplice.

Un fascio d'iperquadriche può mancare di punti base. Ma se ne ha uno, appare dalle osservazioni precedenti che esso ne avrà in generale una ∞^4 costituente l'ente Γ; come pure appare subito quali siano i casi d'eccezione.

44. Date le due antipolarità, piane o spaziali,

$$\Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m = 0\,, \quad \text{ove} \quad a_{ml} = \bar{a}_{lm} \tag{1}$$

$$\Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m = 0\,, \quad \text{ove} \quad b_{ml} = \bar{b}_{lm}\,, \tag{2}$$

e quindi il fascio

$$\lambda \Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m + \mu \Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m = 0\,, \tag{3}$$

si possono collegare varie proprietà o particolarità che quelle o questo possono presentare alle proprietà della collineazione che risulta come prodotto delle due antipolarità: precisamente come nella nota teoria dei fasci di polarità o di quadriche si riduce tutta la classificazione a quella della collineazione prodotto di due polarità. Però nel caso attuale si presentano certi fatti da considerare che non hanno gli analoghi in quella teoria.

Si vede subito che i punti uniti di quella collineazione sono in pari tempo i punti singolari delle antireciprocità degeneri del fascio (3) ed i punti che rispetto alle antipolarità (1) e (2), e quindi rispetto a tutto il fascio (3), hanno una stessa retta od uno stesso piano come polare. Una qualunque di queste proprietà si esprime per un punto x mediante le equazioni

$$\lambda \sum_l a_{lm} x_l + \mu \sum_l b_{lm} x_l = 0\,, \tag{4}$$

dalle quali eliminando le x si trae

$$|\lambda a_{lm} + \mu b_{lm}| = 0\,. \tag{5}$$

Ai valori di $\lambda : \mu$ che son radici di quest'ultima equazione corrispondono per la (3) le antireciprocità degeneri del fascio e per le (4) i relativi punti singolari. Poichè il fascio contiene con ogni antireciprocità anche l'inversa e due antireciprocità inverse fra loro corrispondono a valori coniugati di $\lambda : \mu$, segue che le radici imaginarie dell'equazione (5) saranno a due a due coniugate: cosa evidente del resto poichè il determinante (5) in causa delle ipotesi fatte sulle a e le b è funzione reale di λ e μ. Se poi una radice imaginaria della (5) annulla anche i primi suddeterminanti, lo stesso fatto accadrà per la radice coniugata (ed entrambe saranno radici doppie) e l'antireciprocità corrispondente (come pure la sua inversa) sarà degenere di 2ª specie. In ogni caso i punti singolari di due antireciprocità degeneri fra loro inverse, cioè i punti dati dalle (4) per radici coniugate dell'equazione (5), costituiscono i due centri od i due assi dei fasci antiprojettivi o delle stelle antireciproche che vengono a definire quelle antireciprocità degeneri: dalle intersezioni degli elementi omologhi di quei fasci o di quelle stelle viene allora generato l'ente base del fascio d'iperconiche o d'iperquadriche (v. n. 41).

45. Applichiamo queste considerazioni anzitutto al caso più generale di un fascio d'iperconiche, cioè a quello in cui la collineazione che abbiamo nominata è generale, sicchè l'equazione (5) ha 3 radici distinte, e nel fascio vi sono 3 distinte antireciprocità degeneri. *Due casi* possono presentarsi secondo che quelle radici sono tutte reali, ovvero una sola è reale e le altre due imaginarie coniugate; corrispondentemente a ciò abbiamo due specie generali di fasci d'iperconiche, o di enti Q, o (n. 41) di antireciprocità piane non involutorie.

Nel 1^0 caso le tre antireciprocità degeneri sono tutte antipolarità: detti A, B, C i loro punti singolari, è chiaro che la polare di A rispetto al fascio sarà la retta BC, e così via; sicchè ABC sarà un triangolo polare ordinario od autopolare di 1ª specie (v. n. 34) per tutte le antipolarità del fascio. Riferendole a questo triangolo le equazioni di queste corrispondenze e quindi delle iperconiche del fascio si riducono alla 1ª forma canonica del n. 36. Da ciò si trae subito una nuova distinzione di casi secondo che nel fascio vi sono o no delle antipolarità prive di iperconiche fondamentali. Se vi sono, esisterà tra le antipolarità degeneri una sola dotata d'iperconica fondamentale, cioè il fascio d'iperconiche ne conterrà una sola degenerata in una catena semplice di rette; le iperconiche del fascio non s'incontreranno affatto, cioè non esisterà un ente base Q. Se invece il fascio non contiene antipolarità prive d'iperconiche fondamentali, fra le iperconiche del fascio ve ne saranno tre degenerate in catene di rette di centri A, B, C, ed esisterà un ente Q base del fascio, ente che si potrà dunque considerare come l'intersezione di due catene semplici di rette. In questo caso Q contiene 3 schiere ∞^1 di catene rettilinee situate rispettivamente sulle rette delle 3 catene nominate di centri A, B, C; per ogni punto di Q passa una sola catena di ciascuna schiera; due catene di schiere diverse si tagliano in un sol punto; le catene di una schiera punteggiano projettivamente due altre catene qualunque, ecc.

Nel 2^0 caso, in cui una sola radice della (5) è reale, una sola delle antireciprocità degeneri sarà un'antipolarità e sia A il suo punto singolare. Le altre due inverse fra loro abbiano per punti singolari B e C; esse determineranno fra i fasci che hanno questi punti per centri un'antiprojettività. In questo caso, e solo in questo, *il fascio d'iperconiche avrà per base un ente* Q *generato dalle intersezioni dei raggi omologhi di due fasci antiprojettivi* B, C ([63]) ([64]). La polare del punto A rispetto al fascio sarà evidentemente la retta BC. Quanto alla polare di B si osservi che mentre a questo punto nell'una delle due antireciprocità degeneri e fra loro inverse corrisponde una retta indeterminata, nell'altra gli corrisponde quella retta del fascio B che è omologa alla CB nell'antiprojettività fra i fasci B e C: tale retta sarà dunque la polare di B e dovrà quindi passare per A. Similmente la polare di C sarà la CA e corrisponderà alla BC del fascio B nell'antiprojettività dei fasci B e C. Il triangolo ABC è dunque autopolare di 2^a specie per tutte le antipolarità del fascio ([65]). Queste

---

([63]) È chiaro che per un siffatto ente Q generato da due fasci antiprojettivi B, C non si può spostare il centro di uno dei fasci generatori in modo che esso rimanga antiprojettivo all'altro; ed invero se l'ente stesso fosse generato dai due fasci antiprojettivi B, C', esso risulterebbe pure da due fasci *projettivi* C, C', e però sarebbe una conica: il che è assurdo, poichè una conica non può stare in alcuna iperconica (cfr. una nota al n. 33).

([64]) Applicando al fascio delle iperconiche che passano per 7 punti qualunque del piano i risultati sopra ottenuti abbiamo che: *sette punti qualunque del piano ne determinano in generale* 3 *oppure* 1 *tali che da ognuno di questi essi son projettati mediante sette rette d'una catena semplice; nel caso che vi sia solo un punto siffatto esisteranno inoltre altri due punti distinti dai quali i sette punti dati vengon projettati mediante due gruppi antiprojettivi di sette rette.* Un analogo corollario si potrà dedurre dai corrispondenti risultati che tosto otterremo pei fasci d'iperquadriche.

([65]) Dall'esistenza in ambo i casi di un triangolo autopolare comune a tutte le antipolarità del fascio risulta sotto un nuovo aspetto il fatto (n. 40) che le polari di un punto rispetto a quelle antipolarità formano una catena semplice nel fascio di rette che le contiene. Invero quelle rette dovranno (n^i 30 e 34) far parte della catena piana che ha il triangolo detto per triangolo unito della stessa specie che quella secondo cui è autopolare per le antipolarità, e che inoltre passa corrispondenze sono tutte dotate d'iperconiche fondamentali aventi comuni le tangenti BA e CA nei punti B e C (66). Una sola di esse degenera in una catena semplice di rette, catena di centro A e contenente le rette AB, AC. Le rette di questa catena sono le sole su cui secondo il n. 42 vi sia un'unica corrispondenza di punti reciproci rispetto alle due antireciprocità degeneri fra loro inverse, cioè su cui i due fasci antiprojettivi B, C diano per sezione due punteggiate in antinvoluzione. L'ente Q contiene una ∞^1 di catene rettilinee poste su una parte delle rette di quella catena, parte che ha per estremi le rette AB, AC su cui quelle catene rettilinee d'incontro con Q si riducono rispettivamente ai punti B, C; sulle rette dell'altra parte della catena non vi sono punti d'incontro con Q.

46. Risultati simili ai precedenti si possono ottenere in modo perfettamente analogo pei fasci d'iperquadriche. Qui però i casi in cui si suddivide il caso generale sono *tre*, corrispondenti all'essere 4, ovvero 2, o nessuna, le radici reali dell'equazione (5), e quindi 4, 2, 0 le antipolarità fra le quattro antireciprocità degeneri del fascio.

Nel 1° caso il fascio ammette un tetraedro polare ordinario od autopolare di 1ª specie. Valendosi di questo (segando ad esempio con una catena spaziale che ne contenga i vertici e ricorrendo al n. 32 ed a proposizioni note sui fasci di quadriche reali) si vede che o non vi sono punti base, ed allora due sole delle 4 antipolarità degeneri hanno dei coni iperquadrici fondamentali; oppure il fascio d'iperqua-

---

pel punto dato. Da ciò segue appunto (cfr. n. 20) che quelle rette formano una catena. Aggiungiamo che per la 1ª specie di fasci di antipolarità queste catene di rette passano tutte pei vertici del triangolo autopolare, mentre per la 2ª specie esse contengono un vertice e separano armonicamente gli altri due.

(66) Si presenta così per le iperconiche un fatto opposto a quello che accade per le coniche. Mentre per due coniche l'avere punti di contatto è una particolarità di posizione, per due iperconiche può accadere nel caso più generale di avere comuni le tangenti in due punti d'incontro, senza che ciò costituisca una particolarità, anzi essendo questo caso altrettanto generale quanto quello contrario. Però si avverta subito che per due iperconiche un punto comune avente la stessa tangente non è sempre *punto di contatto* nello stesso senso che si avrebbe per due coniche; esso non è in generale *punto doppio* per l'intersezione delle due iperconiche, vale a dire tale che conti due volte fra i punti d'incontro di quest'intersezione e di una retta qualunque passante per esso. Un tal punto si ha solo (n. 42) quando esso è singolare per un'*antipolarità* degenere del fascio. — Osservazioni analoghe si potrebbero fare al n° seg., ove vedremo che nel caso più generale due iperquadriche possono avere comuni i piani tangenti in due o quattro particolari punti d'incontro.

driche contiene 4 coni ed allora vi è un ente Γ base del fascio (contenente 4 serie ∞^3 di catene rettilinee, ecc. ecc.).

Nel 2^0 caso (e non nel 1^0) *il fascio d'iperquadriche avrà per base un ente Γ generato dalle intersezioni degli elementi omologhi di due stelle antireciproche* C, D. I piani di quelle due stelle che corrispondono alla comune retta CD nella loro antireciprocità saranno tangenti rispettivamente in C e D a tutte le iperquadriche del fascio e si taglieranno secondo una retta contenente i centri A, B dei due coni del fascio. Il tetraedro $ABCD$ sarà autopolare di 2^a specie per tutte le iperquadriche.

Nel 3^0 caso *il fascio d'iperquadriche avrà per base un ente Γ generato dalle intersezioni degli elementi omologhi di due stelle antireciproche* A, B *ed anche da altre due stelle antireciproche* C, D. I 4 punti A, B, C, D hanno per polari rispetto a tutto il fascio rispettivamente i piani ACD, BCD, ABC, ABD e sono quindi vertici di un tetraedro autopolare di 3^a specie comune a tutte le iperquadriche. Queste saranno tutte rigate e conterranno il quadrilatero semplice $ACBD$. Fra esse non vi sarà alcun cono ([67]).

([67]) *Sui fasci d'iperquadriche in uno spazio qualunque.* Sia:

$$\lambda \Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m + \mu \Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m = 0$$

l'equazione di un fascio d'antipolarità di S_d, ove $a_{ml} = \bar{a}_{lm}$, $b_{ml} = \bar{b}_{lm}$; e s'indichino con α_{ml}, β_{ml} i rapporti dei complementi algebrici di queste quantità, rispettivamente nei determinanti (supposti non nulli) formati con esse, ai determinanti stessi. Il determinante caratteristico

$$| \lambda a_{lm} + \mu b_{lm} |$$

di quel fascio, ossia della collineazione prodotto delle antipolarità con cui il fascio stesso s'è determinato, avrà le radici imaginarie a due a due coniugate e corrispondenti a divisori elementari in egual numero e di gradi uguali. Ad ogni radice corrisponde uno spazio fondamentale di punti che si compone di punti uniti della collineazione ed è singolare per un'antireciprocità del fascio e luogo di punti ognun dei quali ha uno stesso S_{d-1} per polare rispetto a tutto il fascio. Due spazi fondamentali di punti corrispondenti a radici coniugate sono sostegni di due forme antireciproche le quali generano colle intersezioni degli spazi omologhi l'ente base del fascio d'iperquadriche. Fra essi passa pure un altro legame geometrico notevole, che si collega a quello, ma che possiamo anche stabilire in modo indipendente. Sia x un punto dello spazio fondamentale di punti corrispondente alla radice $\lambda : \mu$, sicchè

$$\lambda \sum_l a_{lm} x_l + \mu \sum_l b_{lm} x_l = 0\,;$$

le coordinate dello spazio polare di x rispetto a tutte le forme del fascio si

47. *I casi particolari* più notevoli nei fasci di antipolarità e quindi nella posizione mutua di due iperconiche od iperquadriche,

---

potranno rappresentare con ξ_m, ove

$$\xi_m = \lambda \sum_l a_{lm} x_l = - \mu \sum_l b_{lm} x_l ,$$

e quindi

$$\bar{\xi}_m = \bar{\lambda} \sum_l a_{ml} \bar{x}_l = - \bar{\mu} \sum_l b_{ml} \bar{x}_l .$$

Ne segue che questo S_{d-1} sarà nello spazio fondamentale di S_{d-1} definito dalle equazioni

$$\lambda' \sum_m \alpha_{mk} \xi_m + \mu' \sum_m \beta_{mk} \xi_m = 0$$

se si ha

$$\lambda' \bar{\lambda} \sum_{lm} \alpha_{mk} a_{ml} \bar{x}_l - \mu' \bar{\mu} \sum_{lm} \beta_{mk} b_{ml} \bar{x}_l = 0 ,$$

relazione che, per le note proprietà dei determinanti, si riduce (dopo esser stata divisa pel fattore $\bar{x}_k$) a

$$\lambda' \bar{\lambda} - \mu' \bar{\mu} = 0 .$$

Da essa si trae (v. i n[i] 12 e 13 del lavoro già citato *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie*) che quello spazio fondamentale di S_{d-1} è quello *associato* (nel senso che ivi ed altrove ho fissato) allo spazio fondamentale di punti che corrisponde alla radice $\bar{\lambda} : \bar{\mu}$. Dunque: *di due spazi fondamentali di punti corrispondenti a radici coniugate l'uno qualunque ha per polare rispetto al fascio di antipolarità quello spazio fondamentale di* S_{d-1} *che è associato all'altro.* Possiamo chiamare *associati* due siffatti spazi fondamentali di punti.

Da quel risultato si deduce (v. loc. cit.) che ogni spazio fondamentale di punti ha per polare uno spazio che contiene tutti gli spazi fondamentali di punti tranne l'associato di quello. Uno spazio fondamentale di punti che non sia autoassociato starà dunque su tutte le iperquadriche del fascio (e lungo esso vi sarà uno spazio tangente fisso). E così pure starà sulla base del fascio lo spazio che congiunge due o più spazi fondamentali di punti fra i quali non ve ne siano due associati (nè, in particolare, uno autoassociato). Se poi uno spazio fondamentale di punti è autoassociato, la sua intersezione con lo spazio fondamentale di S_{d-1} che gli è associato (e polare) starà nelle iperquadriche: una tal intersezione esiste solo quando i divisori elementari corrispondenti al detto spazio non sono tutti lineari.

Quando si conosce la specie di una forma del fascio, le osservazioni precedenti dànno delle condizioni pel determinante caratteristico. Così se supponiamo anzitutto che nel fascio vi sia una forma definita, cioè un'antipolarità priva di punti uniti, il fascio sarà privo di base, e però *le radici del determinante caratteristico saranno tutte reali e corrispondenti a divisori elementari di* 1^0 *grado.* Di questa proprietà godrà in particolare il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \varrho & a_{12} & . \\ a_{21} & a_{22} + \varrho & . \\ . & . & . \end{vmatrix}$$

si hanno quando qualcuna delle radici del determinante caratteristico ne annulla anche i primi suddeterminanti, ecc.

Nel piano questo fatto può accadere solo per una radice, la quale sarà perciò reale. Ad essa corrisponderà nel fascio un'iperconica degenere di 2ª specie, cioè ridotta ad una retta. L'intersezione di questa con un'altra iperconica del fascio darà la base di questo: sicchè questa base o non esisterà o sarà una catena semplice di punti di quella retta (catena che può ridursi ad un sol punto) ed allora questi punti saranno da considerarsi come doppi per quella base e saranno punti di contatto per tutte le iperconiche del fascio, avendo per tangenti le rette che compongono l'altra iperconica degenere che il fascio in generale ammette.

Per un fascio d'iperquadriche se una radice *reale* del determinante caratteristico annulla i primi suddeterminanti, essa corrisponde ad un'iperquadrica degenere di 2ª specie, i cui punti costituiranno una catena semplice di piani oppure soltanto una retta; se la base del fascio non è generabile mediante due stelle antireciproche, il fascio ammetterà ancora due iperquadriche degeneri di 1ª specie, le quali possono coincidere in una nuova iperquadrica degenere di 2ª specie. Tale sarebbe il fascio che ha per base l'intersezione di due

---

ove $a_{ml} = \overline{a}_{lm}$. Essa costituisce una notevole estensione di un noto teorema sull'equazione da cui dipendono le perturbazioni secolari (teorema che si riferisce al caso che le a_{lm} siano reali), e fu data prima dal sig. HERMITE nel 1855 (Comptes Rendus, 41, p. 181), e poi indipendentemente e in modo più completo dal CLEBSCH nel 1859 (Crelle J., 57, p. 327; e 62, p. 232).

Possiamo ottenere subito una proposizione più generale supponendo anzitutto di avere un fascio pel quale il determinante caratteristico abbia le radici tutte distinte. Dicendo r il numero delle coppie di radici imaginarie coniugate e congiungendo r punti uniti corrispondenti a radici prese rispettivamente in quelle r coppie, avremo degli spazi S_{r-1} che giaceranno su tutte le iperquadriche del fascio. Se dunque nel fascio vi è un'iperquadrica contenente degli spazi S_{r-1}, ma non degli S_r, il che significa (v. una nota al n. 36) che ridotta a forma canonica essa ha r coefficienti di un segno e $d+1-r \, (\geq r)$ del segno opposto, il determinante caratteristico non potrà avere più di r coppie di radici imaginarie coniugate. Quando poi si abbia un fascio pel quale le radici non siano tutte distinte basterà considerarne uno infinitamente vicino per dedurne che questa proposizione rimane ancor vera. Possiamo dunque dire in generale che *quando nel fascio considerato di forme ve n'è una che ridotta a forma canonica viene ad avere* k *per differenza fra i numeri di coefficienti rispettivamente dei due segni, il determinante caratteristico ha almeno* k *radici reali (distinte o coincidenti).* — Nel caso particolare in cui le forme del fascio siano a coefficienti reali, questo teorema si riduce ad uno contenuto nell'*Inauguraldissertation* del sig. KLEIN (cfr. Math. Ann., XXIII, nota a p. 562).

catene semplici di piani aventi gli assi sghembi fra loro: quest'intersezione si compone di ∞^2 rette che costituiscono un ente duale a se stesso. — Se poi una radice annulla anche i suddeterminanti di 2° ordine, vi sarà nel fascio un'iperquadrica degenere di 3ª specie, cioè ridotta ad un piano; la base, ove esista, starà in questo piano e sarà in generale un'iperconica lungo cui tutte le iperquadriche del fascio avranno lo stesso cono tangente; ecc. ecc.

Altro caso notevole di fasci d'iperquadriche si ha quando una radice *imaginaria* annulla i primi suddeterminanti del determinante caratteristico, sicchè lo stesso fatto accade per la radice coniugata. Allora vi sarà nel fascio un'antireciprocità non involutoria la quale sarà degenere di 2ª specie, cioè si ridurrà ad un'antiprojettività fra due fasci di piani (mentre l'antireciprocità inversa si ridurrà all'inversa di quest'antiprojettività). *Il fascio d'iperquadriche avrà per base un ente Γ generato dalle intersezioni degli elementi omologhi di due fasci antiprojettivi di piani*, o ciò che fa lo stesso, *un ente Γ generato dalle congiungenti i punti omologhi di due punteggiate antiprojettive* (sezioni di quei fasci coi loro assi, scambiati; assi che supponiamo sghembi) (68) (69).

48. Infine altri casi particolari di fasci d'iperconiche o d'iperquadriche, degni di menzione, si hanno quando il determinante caratteri-

---

(68) Un esempio di siffatto ente Γ si ha nel luogo delle rette di un'iperquadrica rigata che si appoggiano a due generatrici sghembe qualunque; poichè queste vengono punteggiate antiprojettivamente da quelle rette.

Abbiamo visto al n. 45 che *le rette di un piano sulle quali due dati fasci antiprojettivi di rette determinano un'antinvoluzione sono le rette di una catena semplice.* Questa proposizione non ha in generale l'analoga per due stelle antireciproche: cioè non esistono in generale dei piani su cui queste due stelle determinino delle antipolarità piane (v. ad es. il n. 43). Solo si può dire, come risulta dalle cose esposte, che ove esistano cotali piani essi formano una catena semplice (iperquadrica degenere che contiene l'ente Γ generato dalle due stelle antireciproche). La proposizione ricordata relativa al piano conduce a quest'altra relativa alle *rette dello spazio le quali segano due fasci antiprojettivi di piani secondo un'antinvoluzione*, o, ciò che fa lo stesso, *alle rette dalle quali si projettano secondo un'antinvoluzione due punteggiate antiprojettive date* (sezioni di quei fasci coi loro assi): tali rette formano una varietà ∞^5 tale che in ogni piano ne giace una catena semplice e per ogni punto ne passa una catena semplice. Se si considerano come omologhi il centro ed il piano di una tal catena si viene per tal modo ad avere una corrispondenza univoca fra i punti ed i piani dello spazio sì che ogni punto sta nel piano omologo: la corrispondenza è iperalgebrica, ma *non è* un'antireciprocità.

(69) Verso la fine del n. 26 abbiamo esaminato la natura della corrispondenza fra i punti di due rette di un piano le quali si considerino come sezioni

stico è identicamente nullo (il che finora si escludeva), cioè tutte le forme del fascio sono degeneri. Osservando che la retta od il piano polare di un punto singolare di una forma rispetto ad un'altra sarà polare del punto rispetto a tutte le forme, e conterrà quindi i punti singolari di tutte, si giunge facilmente alla conclusione che oltre ai fasci in cui un punto singolare è comune a tutte le forme si hanno solo i fasci seguenti.

Il fascio d'iperconiche degeneri, o catene semplici di rette, determinato da due tali forme prese in modo da avere una retta comune. La base del fascio si comporrà (v. n. 20), oltre che di questa retta, di una catena piana. Questa catena piana incontrerà quella retta secondo una catena semplice, che sarà il luogo dei punti singolari delle iperconiche del fascio.

Il fascio d'iperquadriche degeneri determinato da due coni iperquadrici che abbiano comune una generatrice ed il piano tangente lungo essa. Il luogo dei vertici dei coni del fascio sarà ancora una catena posta su quella retta. Però vi sarà nel fascio un'iperquadrica contenente il piano nominato e quindi degenere di 2^a specie (70) (71).

49. Reti d'iperconiche; fili cubici. — Da tre antipolarità piane che non formino fascio

$$\Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \,, \qquad (a_{ml} = \bar{a}_{lm}) \tag{1}$$

$$\Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \,, \qquad (b_{ml} = \bar{b}_{lm}) \tag{2}$$

$$\Sigma c_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \,, \qquad (c_{ml} = \bar{c}_{lm}) \tag{3}$$

---

di una catena piana di rette. Un'analoga corrispondenza fra i punti di due piani π, π' si ha considerando come omologhi due punti quando stanno su una *corda* di una catena spaziale fissa C, cioè su una retta unita dell'antinvoluzione che ha questa catena per fondamentale. Allora ad una retta qualunque di π corrisponderà rispetto a quest'antinvoluzione una retta punteggiata antiprojettivamente a quella: dunque le corde di C uscenti dai punti di quella formano un ente Γ della specie che sopra è stata per ultima discorsa, e questo segherà π' secondo una ∞^2 Q, base di un fascio d'iperconiche. Alle rette di ogni piano corrispondono dunque nell'altro enti Q siffatti. La corrispondenza fra i due piani si potrebbe dunque, come quella analoga fra due rette ora ricordata, chiamare *quadratica* (iperalgebrica).

(70) Lo studio generale dei fasci d'iperquadriche degeneri di ogni spazio si può condurre in modo simile a quello dei fasci di quadriche degeneri (v. ad es. Segre, t. 19 di questi Atti; e Bertini, Rend. Acc. Lincei, (4) 2).

(71) *Su alcune forme invariantive del sistema di due iperconiche od iperquadriche.* Rappresentiamo con la notazione simbolica le due forme ripetutamente conside-

è determinata una rete (di antireciprocità o di antipolarità),

(4) $$\lambda \Sigma a_{lm} x_l \overline{y}_m + \mu \Sigma b_{lm} x_l \overline{y}_m + \nu \Sigma c_{lm} x_l \overline{y}_m = 0 \, .$$

Due punti qualunque x, y reciproci rispetto a quelle tre saranno reciproci rispetto a tutte le antipolarità (ed antireciprocità) della rete, e se coincidono daranno un punto unito o punto *base* della rete. La condizione necessaria e sufficiente perchè un punto x faccia parte

---

rate, sicchè:

$$\Sigma a_{lm} x_l \overline{y}_m = a_x \overline{a}_{\overline{y}} = a'_x \overline{a}'_{\overline{y}} = \ldots$$

$$\Sigma b_{lm} x_l \overline{y}_m = b_x \overline{b}_{\overline{y}} = b'_x \overline{b}'_{\overline{y}} = \ldots$$

Allora servendoci degl'invarianti che pel campo binario furono introdotti nella nota al n. 18, ed applicando il principio di trasporto di CLEBSCH (convenientemente esteso) otteniamo subito questi primi risultati. Nel piano le rette su cui quelle due antipolarità (iperconiche) determinano due antinvoluzioni (catene semplici) permutabili od armoniche, inviluppano l'iperconica

$$(ab\xi)\,\overline{(ab\xi)} = 0 \, .$$

Nello spazio le rette aventi la stessa relazione con due antipolarità spaziali (iperquadriche) soddisfano l'equazione

$$(ab\xi\eta)\,\overline{(ab\xi\eta)} = 0 \, ,$$

e però formano una varietà ∞^7 tale che le rette giacenti in un piano inviluppano un'iperconica, e quelle uscenti da un punto formano un cono iperquadrico. — Nel piano l'*equazione tangenziale dell'ente* Q intersezione delle due iperconiche considerate, cioè base del loro fascio, vale a dire l'equazione soddisfatta dalle rette che segano quelle iperconiche secondo catene semplici tangenti fra loro, è:

$$(ab\xi)\,\overline{(ab\xi)} . (a'b'\xi)\,\overline{(a'b'\xi)} - (aa'\xi)\,\overline{(aa'\xi)} . (bb'\xi)\,\overline{(bb'\xi)} = 0 \, .$$

Un'analoga equazione in coordinate di rette tangenti si ha per l'ente Γ intersezione di due iperquadriche (basta rendere quaternari i determinanti ternari che figurano nell'equazione precedente, introducendovi ancora i simboli η, od $\overline{\eta}$).

Degl'invarianti delle due iperconiche od iperquadriche si ottengono subito considerando il determinante del fascio che esse determinano; e da essi applicando il principio di trasporto si traggono, similmente a quanto ora si fece, altre forme invariantive. Così nel caso delle iperconiche si ha

$$| \lambda a_{lm} + \mu b_{lm} | = \Delta \lambda^3 + I \lambda^2 \mu + I_1 \lambda \mu^2 + \Delta_1 \mu^3$$

ove Δ e Δ_1 sono i determinanti delle due forme

$$\Delta = | a_{lm} | = \frac{1}{6} (aa'a'')\,\overline{(aa'a'')}$$

$$\Delta_1 = | b_{lm} | = \frac{1}{6} (bb'b'')\,\overline{(bb'b'')} \, ,$$

di una tal coppia di punti reciproci rispetto alla rete si avrà eliminando le y_m dalle equazioni (1), (2), (3), cioè sarà:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \Sigma a_{l1} x_l, & \Sigma a_{l2} x_l, & \Sigma a_{l3} x_l \\ \Sigma b_{l1} x_l, & \Sigma b_{l2} x_l, & \Sigma b_{l3} x_l \\ \Sigma c_{l1} x_l, & \Sigma c_{l2} x_l, & \Sigma c_{l3} x_l \end{vmatrix} = 0.$$

Alla stessa condizione giungiamo se vogliamo che un punto x sia singolare per un'*antireciprocità* della rete. Se quest'antireciprocità corrisponde ai valori (complessi) λ, μ, ν dei parametri che compaiono nella (4), dovrà essere (successivamente per $m = 1, 2, 3$)

$$(6) \qquad \lambda \Sigma a_{lm} x_l + \mu \Sigma b_{lm} x_l + \nu \Sigma c_{lm} x_l = 0,$$

donde eliminando λ, μ, ν si ritorna alla (5) ([72]). Questa sarà similmente soddisfatta dal punto singolare dell'antireciprocità inversa, la quale

---

mentre I ed I_1 sono due invarianti simultanei

$$I = \Sigma b_{lm} A_{lm} = \frac{1}{2} (aa'b) \overline{(aa'b)}$$

$$I_1 = \Sigma a_{lm} B_{lm} = \frac{1}{2} (abb') \overline{(abb')},$$

i quali col loro annullarsi esprimono una particolare posizione *armonica* delle due forme, della quale ci occuperemo nel seguito di questo Saggio. Il discriminante della forma cubica in λ, μ è un nuovo invariante che col suo segno serve ad indicare quale fra i due casi principali discussi al n. 45 presentano le due iperconiche; mentre annullandosi esprime che l'intersezione di queste ha un punto doppio. Col principio di trasporto dall'invariante I si trae che i piani su cui due date antipolarità dello spazio (iperquadriche) determinano due antipolarità piane (iperconiche) in posizione armonica inviluppano un'iperquadrica

$$(aa'b\xi) \overline{(aa'b\xi)} = 0;$$

e dal discriminante testè nominato si trarrebbe similmente l'*equazione tangenziale dell'ente Γ* intersezione di due iperquadriche, cioè l'equazione soddisfatta dai piani che gli sono tangenti. Ecc. ecc.

([72]) Anche sinteticamente si vede subito che per ogni punto il quale sia singolare per un'antireciprocità della rete, cioè abbia la stessa retta per polare rispetto ad un fascio di antipolarità della rete (v. n. 44), esiste un punto che gli è reciproco rispetto a tutte le forme della rete (il punto d'incontro di quella retta colla polare del punto rispetto ad una forma che stia nella rete ma non in quel fascio). Viceversa se un punto A ne ammette uno A' come reciproco rispetto a tutta la rete, la catena piana delle rette polari di A rispetto alla rete (n. 40) dovendo comporsi di rette passanti per A' degenererà in generale in questo fascio; e però vi sarà in questo (n. 14) una retta singolare la quale terrà luogo delle ∞^1 rette di una catena semplice contenuta nella catena piana, cioè sarà corrisponde ai valori coniugati di λ, μ, ν. Quando questi valori sono reali, i due punti coincidono nel punto singolare di un'*antipolarità* della rete.

Osserviamo però subito che l'equazione (5) potrebbe ridursi ad un'identità; potrebbe cioè accadere che ogni punto del piano ne avesse uno reciproco rispetto a tutta la rete, ossia che ogni forma della rete fosse degenere. Ricordando (n. 48) che un fascio d'iperconiche è tutto composto di forme degeneri solo quando le due forme che lo determinano hanno comune il punto singolare, ovvero quando la base del fascio si spezza in una retta ed una catena piana, è facile dedurne che una rete d'iperconiche si compone tutta di forme degeneri solo nei seguenti casi: 1^0 quando le tre forme che la determinano hanno comune il punto singolare. 2^0 quando le tre iperconiche degeneri contengono una stessa catena piana: i punti di questa costituiscono allora la base della rete e le iperconiche di questa sono le ∞^2 catene semplici di rette che la projettano dai suoi punti (cfr. n. 20); due punti armonici rispetto alla catena piana sono reciproci rispetto alla rete; ecc. 3^0 quando le tre iperconiche contengono una stessa retta: questa sarà allora comune a tutte e ne conterrà i punti singolari; sulla catena piana in cui due iperconiche si segano ancora, un'altra determinerà (n^i 25, 26) una catena semplice di 2^0 ordine (di punti di una conica) la quale unitamente alla retta nominata costituirà la base della rete.

50. Nel seguito noi escluderemo sempre questi casi in cui tutte le forme della rete sono degeneri. Con questa restrizione avremo dunque dal n^0 prec. i risultati seguenti.

La rete determina una cubica γ e due corrispondenze iperalgebriche univoche, involutorie (o simmetriche), fra i suoi punti. Le coppie di punti omologhi dell'una corrispondenza, Ω, sono le coppie di punti reciproci rispetto a tutte le forme della rete. Le coppie di punti omologhi dell'altra corrispondenza, Π, sono le coppie di punti singolari delle antireciprocità degeneri della rete, cioè i centri delle coppie di fasci antiprojettivi che fan parte della rete.

---

polare di A rispetto a tutto un fascio di antipolarità della rete: il punto A sarà dunque singolare per un'antireciprocità degenere della rete. — Quando quest'antireciprocità è involutoria si presenta il caso più particolare in cui la catena piana delle polari di A degenera in una catena semplice di rette del fascio A'; ognuna di queste figurando come singolare (cfr. n. 52).

Di qui derivano altre conseguenze importanti. Due punti reciproci rispetto alla rete di antireciprocità dovranno in particolare trovarsi su due raggi omologhi di due fasci antiprojettivi costituenti un'antireciprocità degenere della rete. Dunque *i due fasci antiprojettivi di rette aventi i centri in due punti omologhi qualunque di Π projettano i punti di γ che si corrispondono in Ω.* In altri termini *alle coppie di punti di γ allineate con un punto fisso qualunque* A *di γ corrispondono mediante Ω delle coppie di punti allineate col punto* B *che è omologo di* A *in Π, e la corrispondenza che così si ha fra i due fasci di rette* A, B *è antiprojettiva.* In particolare considerando una tangente condotta da A a γ si vede che le dovrà corrispondere una tangente condotta da B, cioè *nella corrispondenza Π sono omologhi due punti quando sono i tangenziali su γ di due punti omologhi di Ω. Così i tangenziali dei punti uniti di Ω saranno punti uniti per Π.*

51. I punti uniti della corrispondenza Ω sono, come già notammo, i punti base della rete. Può accadere però che essi manchino completamente: basta perciò che nella rete vi sia un'antipolarità priva d'iperconica fondamentale (o coll'iperconica fondamentale degenerata in un punto, che non sia punto base). Ma se esistono, quei punti formeranno in generale sulla cubica γ una varietà iperalgebrica ∞^1, che noi diremo per brevità *filo del* 3^0 *ordine* o *filo cubico* (ed indicheremo ancora con Ω); chiamando in generale *fili* tutte le varietà di ∞^1 punti, e in particolare *fili del* 1^0 *ordine* le catene rettilinee e *fili* (piani) *del* 2^0 *ordine* le catene coniche. Vedremo che un filo cubico può comporsi di un sol *ramo*, o tratto continuo, ovvero anche di due rami.

I punti uniti della corrispondenza Π sono i punti singolari delle antipolarità degeneri della rete. Ognuno di essi è dunque centro di un fascio di rette nel quale si ha un'antinvoluzione che projetta la corrispondenza Ω: ogni retta unita di quest'antinvoluzione sega dunque γ ancora in due punti i quali o sono omologhi in Ω, ovvero sono uniti per Ω. Chiamando *corda* di Ω ogni retta la quale o incontri in due punti il filo cubico Ω, ovvero contenga due punti reciproci della rete cioè due punti omologhi nella corrispondenza Ω, potremo dire che le catene semplici di rette che, come iperconiche degeneri, fan parte della nostra rete, si compongono tutte di corde di Ω. Viceversa ogni corda di Ω fa parte di un'iperconica degenere della rete, giacchè l'iperconica della rete che è individuata dal passare per due punti arbitrari di quella retta avrà su questa 4 punti uniti, ovvero 2 punti uniti e 2 punti reciproci, assunti in modo arbitrario, e però dovrà contenere tutta la retta. Poichè le corde di Ω, anche quando la rete non ha un filo cubico base Ω, sono ∞^2, si vede che sempre vi saranno nella rete ∞^1 iperconiche degenerate in catene semplici di rette [73]: il che risultava anche da ciò che (n. 45) in ogni fascio d'iperconiche contenuto nella rete vi è sempre un'iperconica (o tre) così degenerata. — *La corrispondenza Π*, a differenza della Ω, *ammette sempre in generale un filo Π di punti uniti.* Ogni corda (e in particolare ogni tangente) del filo Ω sega il filo Π. In altri termini ogni retta che congiunga un punto del filo Ω ad un punto del filo Π incontra ancora la curva γ in un 3^0 punto che sta pure nel filo Ω. Ecc. ecc.

52. Possiamo dimostrare che *il filo Π è pure del 3^0 ordine*, e più precisamente che *la corrispondenza Π fra i punti di γ si può, al modo stesso di Ω, considerare come la corrispondenza delle coppie di punti reciproci rispetto ad una rete d'iperconiche.*

Invero sia A un punto qualunque del filo Π e A' il suo reciproco rispetto alla rete, cioè l'omologo di A nella corrispondenza Ω. Il punto A ammette una retta fissa passante per A' come polare rispetto a tutto un fascio di forme della rete che comprenda l'antipolarità degenere di cui A è punto singolare. A seconda della natura di quel fascio (n. 45) accadrà che i due punti in cui quella retta incontra ancora γ saranno singolari per due antipolarità del fascio, cioè saranno punti del filo Π, ovvero saranno singolari per due antireciprocità degeneri del fascio inverse l'una dell'altra, cioè saranno punti omologhi della corrispondenza Π. Facendo muovere quel fascio di forme in modo che descriva tutta la rete passando sempre per l'antipolarità che ha in A un punto singolare, la retta considerata, polare di A, descriverà intorno ad A' una catena semplice (poichè si può considerare come polare di A rispetto ad un'antipolarità mobile di un fascio contenuto nella rete ma *non* passante per la suddetta antipolarità degenere). Ciò posto, se il punto A percorre tutto il filo Π, il suo reciproco A' descriverà un nuovo filo

---

(73) Se si projetta un filo cubico Ω da un suo punto su una retta r, e si considerano le projezioni delle due serie ∞^1 di catene rettilinee che sulle rette di un'iperconica degenere della rete son determinate da due altre (non formanti un fascio con quella), si vede che esse daranno su r *due fasci projettivi di catene rettilinee dai quali vien generato il filo di 2^0 ordine projezione di Ω*: si ottengono così tutti i fili rettilinei del 2^0 ordine e le loro generazioni projettive (cfr. la nota al n. 26).

Π' sì che ogni punto di questo sarà centro di una catena semplice composta di rette che projettano il filo Π (doppiamente) e di rette che contengono coppie di punti omologhi della corrispondenza Π. Considerando tre di queste catene di rette e la rete d'iperconiche che esse (considerate come iperconiche degeneri) determinano, vediamo che il filo Π è l'intersezione di quelle tre catene di rette, ossia il filo base di una rete d'iperconiche, cioè un filo cubico : come appunto avevamo asserito. Potremo inoltre aggiungere che *il filo Π' trasformato di Π mediante la corrispondenza Ω è quello che ha colla Π la stessa relazione che il filo Π ha colla Ω* (74).

53. *La cubica γ su cui sta un filo del 3º ordine ha necessariamente l'invariante assoluto reale, vale a dire è projettiva ad una cubica reale.* Per dimostrare questa proposizione e collegare la natura di γ alla natura dei fili cubici che essa contiene, consideriamo un punto qualunque P del filo Π e le 4 tangenti a, b, c, d che da esso si possono condurre a toccare altrove, in A, B, C, D, la cubica γ. Quelle tangenti saranno distinte se questa curva non ha punti doppi. Nel fascio di rette di centro P abbiamo un'antinvoluzione (in cui degenera un'antipolarità della rete) che projetta la corrispondenza Ω fra i punti di γ; sì che due rette omologhe di quell'antinvoluzione segano ancora γ secondo due coppie di punti le quali si corrispondono in Ω. Quindi i punti A, B, C, D dovranno corrispondersi fra loro rispetto ad Ω; ciò che può avvenire in tre modi diversi, cioè : 1º senza che alcuno di essi sia unito per Ω, sicchè ad esempio A, B e C, D saranno due coppie di punti omologhi rispetto ad Ω; 2º essendo A, B, C, D quattro punti uniti di Ω; 3º essendo due di essi, A, B

(74) Poichè le iperconiche passanti per 6 punti del piano formano in generale una rete (n. 39), possiamo dedurre immediatamente le proposizioni seguenti da cui riescon definiti i fili cubici generali mediante la sola nozione delle catene semplici. *Il luogo di un punto dal quale 6 punti dati del piano son projettati mediante sei rette di una catena semplice è in generale un filo cubico; ed i punti comuni alle ∞^1 catene semplici di rette che così si ottengono costituiscono a lor volta un filo cubico, che riesce individuato dal passaggio pei 6 punti dati, e che sta con l'altro in una stessa curva del 3º ordine. Questa è il luogo descritto da due punti dai quali quei 6 — e quindi tutti i punti del filo cubico che li contiene — son projettati mediante due gruppi antiprojettivi di rette.* Ecc. ecc. — Queste proposizioni si connettono poi strettamente (v. n. 54) ad altre dell'ordinaria geometria projettiva relative alle coppie di punti di due piani da cui due date sestuple di punti son projettate mediante gruppi *projettivi* di rette (v. ad es. STURM, *Das Problem der Projectivität u. s. w.*, Math. Ann., I, p. 541), ecc.

ad es., punti uniti, e gli altri due C, D punti omologhi rispetto ad Ω. Nei primi due casi l'antinvoluzione considerata del fascio P mostra che il gruppo di rette $abcd$ sarà antiprojettivo (al gruppo corrispondente, $badc$ nel 1° caso, $abcd$ nel 2°, cioè) a se stesso, cioè che il birapporto $(abcd)$ sarà reale. Nel 3° caso essa mostra che il gruppo $abcd$ sarà antiprojettivo ad $abdc$, cioè che il birapporto $(abcd)$ sarà (coniugato al suo inverso, cioè) un numero complesso avente per modulo l'unità. Dunque *la cubica γ fa parte o di quella specie di cubiche per cui il birapporto è reale, oppure di quella specie per cui il birapporto ha per modulo l'unità.* Com'è noto queste due specie di cubiche sono appunto quelle per cui l'invariante assoluto [75] è reale; esso è positivo per quelle della 1ª specie, negativo per quelle della 2ª. Le cubiche armoniche appartengono ad ambe le specie; per esse l'invariante s'annulla.

Ora *se la rete d'iperconiche non ha un filo base*, cioè se la corrispondenza Ω su γ non ha punti uniti, dovrà necessariamente presentarsi il caso in cui A, B e C, D son due coppie di punti reciproci, e però *la cubica γ avrà un birapporto reale.* Se invece esistono punti uniti di Ω, si prenda per A uno di essi e si determinino in conseguenza il punto P e poi B, C, D. Supponiamo che anche questi tre vengano a stare nel filo Ω. Allora se immaginiamo un raggio del fascio P il quale si muova descrivendo la catena semplice di rette che costituisce l'iperconica degenere di centro P, i due punti di γ projettati da questo raggio saranno due punti del filo Ω oppure due punti omologhi nella corrispondenza Ω, e passeranno dall'una all'altra relazione appunto quando il raggio mobile passerà per le quattro rette a, b, c, d della catena, su ognuna delle quali quei due punti vengono a coincidere. Ma da ciò segue subito che il filo Ω si compone di due rami continui, staccati fra loro, sì che quella catena di rette è divisa da a, b, c, d in quattro parti, di cui due, per es. ab e cd, projettano doppiamente rispettivamente quei due rami del filo Ω, e le altre due, bc e da, non ne contengono alcun punto. — Se poi supponiamo che solo A, B siano uniti per Ω, mentre C, D siano omologhi, seguendo ancora il movimento continuo di un raggio del fascio P che

---

[75] Qui e nel seguito per *invariante assoluto* della cubica, cioè della quaterna di tangenti condotte a questa da un suo punto, intendiamo quello che, indicando con α uno dei birapporti di questa quaterna, è dato da $(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2/\alpha^2(1-\alpha)^2$, e si esprime in modo noto mediante gl'invarianti g_2, g_3 (od i, j), oppure S, T, della quaterna, o della cubica.

descrive quella catena semplice, abbiamo che solo nel passaggio per a e b esso comincierà oppure cesserà di projettare due punti del filo Ω: questo si comporrà dunque di un sol ramo. Concludiamo che *i fili cubici possono comporsi di due rami o di un solo; i fili a due rami stanno su cubiche aventi un birapporto reale, mentre quelli ad un ramo stanno su cubiche il cui birapporto ha per modulo l'unità.* (Cfr. n. 55).

Quando la corrispondenza Ω non ha punti uniti, il filo Π si compone di due rami, luoghi l'uno dei centri delle catene di rette che fan parte della rete, l'altro dei centri delle antinvoluzioni prive di catene fondamentali che pur si trovano in tal caso fra le antipolarità della rete. Così pure quando i punti uniti della corrispondenza Ω formano un filo composto di due rami, anche il filo Π si comporrà di due rami: l'uno di essi è incontrato dalle rette che tagliano il filo Ω in due punti di uno stesso ramo (e per un punto P di questo accade che i punti A, B, C, D che dianzi consideravamo sono uniti per Ω); l'altro invece dalle rette che s'appoggiano ad ambi i rami del filo Ω (e per un suo punto P accade invece che A, B e C, D son due coppie di punti omologhi di Ω).

54. L'analogia evidente fra alcuni dei risultati precedenti (n[i] 49 e seg[i]) e certe proposizioni note relative alle corrispondenze univoche fra due cubiche piane, alle forme di queste curve, ecc., avrà condotto naturalmente il lettore a considerare il legame che passa fra queste e quelli. Tale legame si può derivare da un concetto generale che riduce in molti casi le questioni relative ad antiprojettività a questioni riguardanti delle projettività: *si facciano seguire tutte le corrispondenze antiprojettive da un'antiprojettività fissa arbitraria, ad esempio dal coniugio, e si avranno così in luogo di esse altrettante corrispondenze projettive.*

Così, per lo studio della rete di antireciprocità (4) (n. 49) determinata dalle antipolarità (1), (2) e (3) di un piano π, si consideri un'anticollineazione $\mathbf{C}$ fra questo ed un piano π', distinto o sovrapposto a quello, e sia indicando con y e z due punti qualunque di π e π' omologhi rispetto a $\mathbf{C}$,

$$(\mathrm{C}) \qquad y_l = \bar{z}_l .$$

Come prodotti di quelle antireciprocità (4) per l'anticollineazione $\mathbf{C}$ si avranno le *reciprocità* fra i piani π, π'

$$(4') \qquad \lambda \Sigma a_{lm} x_l z_m + \mu \Sigma b_{lm} x_l z_m + \nu \Sigma c_{lm} x_l z_m = 0 ,$$

le quali formeranno pure una rete. Ora è ben noto, e si verifica subito, che da una rete di reciprocità fra π e π' risultano determinate in questi due piani due cubiche γ e γ' le quali si posson considerare sia come luoghi delle coppie di punti che son reciproci rispetto a tutte le reciprocità della rete, — il che stabilisce fra i punti di γ e γ' una determinata corrispondenza algebrica univoca **O**, — sia come luoghi delle coppie di punti singolari delle reciprocità degeneri della rete, cioè dei centri dei fasci projettivi che costituiscono queste reciprocità, — e ciò stabilisce fra γ e γ' un'altra corrispondenza univoca **P** tale che da due punti omologhi rispetto a questa i punti che si corrispondono rispetto ad **O** son projettati mediante due fasci projettivi. Per l'attuale rete (4') di reciprocità la cubica γ sarà appunto quella considerata nei n^{i} prec^{i}, avente per equazione la (5). E poichè le antireciprocità (4) si ottengono dalle reciprocità (4') facendole seguire dall'anticollineazione **C** (e da reciprocità degeneri si ottengono in questa guisa delle antireciprocità degeneri), si vede subito che la corrispondenza Ω fra i punti di γ reciproci rispetto alla rete di antireciprocità si può considerare come prodotto della corrispondenza **O** fra i punti di γ e γ' che son reciproci rispetto alla rete di reciprocità e della corrispondenza anticollineare **C** fra γ' e γ; e che similmente la corrispondenza Π su γ è il prodotto della **P** fra γ e γ' e della **C**. Di passaggio, dal fatto che fra γ e γ' esiste una corrispondenza univoca algebrica **O** (oppure **P**) ed in pari tempo un'anticollineazione **C**, deduciamo che gl'invarianti assoluti di queste cubiche sono in pari tempo uguali e coniugati, e quindi reali (cfr. n. 53).

Basandoci sulle considerazioni ora fatte possiamo proporci di *determinare tutti i fili cubici giacenti su una data cubica piana* γ *d'invariante assoluto reale*, e più precisamente di *determinare tutte le corrispondenze che esistono su* γ *di punti reciproci rispetto a reti di antipolarità* (*corrispondenze* Ω). A tal fine si consideri la cubica γ' che corrisponde a γ in un'anticollineazione **C** fissata ad arbitrio (potendo anche γ' coincidere con γ): le corrispondenze cercate fra i punti di γ si potranno considerare come prodotti di corrispondenze algebriche univoche **O** fra γ e γ' e della corrispondenza anticollineare **C**. Ed abbiamo dalle cose dette una 1^{a} condizione da imporre ad una tal corrispondenza **O** fra γ e γ': quella di esser la corrispondenza dei punti reciproci rispetto ad una rete di reciprocità. Se essa si verifica, esiste pure, come dicemmo, una corrispondenza **P** fra γ e γ' tale che da due punti omologhi di **P** la **O** è projettata mediante due fasci projettivi. Viceversa se la corrispondenza **O** determina fra γ e γ' una corrispondenza **P** siffatta, tre coppie di fasci projettivi di rette che projettino i punti di γ e γ' omologhi rispetto ad **O** costituiscono tre reciprocità degeneri dalle quali (se scelte in modo da non stare in un fascio) è determinata una rete di reciprocità rispetto a cui due punti di γ e γ' omologhi in **O** sono sempre reciproci. — Quando questa 1ª condizione è soddisfatta, la corrispondenza Ω fra i punti di γ che è prodotto della **O** per la **C** viene ad essere quella dei punti reciproci rispetto ad una rete di antireciprocità. Perchè questa contenga una rete di *antipolarità*, cioè Ω sia appunto della specie voluta, occorrerà ancora che Ω risulti involutoria. E questa condizione sarà anche sufficiente, poichè allora la rete di antireciprocità con ogni antireciprocità degenere (coppia di fasci antiprojettivi che projettano Ω) conterrà pure quella inversa, sicchè in essa vi saranno infiniti fasci di antipolarità.

Applicheremo questi concetti successivamente alle cubiche ellittiche ed a quelle razionali (cioè ai due casi in cui l'invariante assoluto è finito od infinito).

55. Sulla cubica ellittica γ ad invariante assoluto reale sia u l'integrale di 1ª specie determinato in modo da annullarsi in un flesso. Se la cubica ha il birapporto reale (cioè l'invariante assoluto positivo), è noto che per parallelogrammo dei periodi di u si può prendere un *rettangolo*, cioè che i periodi fondamentali si possono indicare con ω_1 e $i\omega_2$, essendo ω_1 ed ω_2 reali. Se invece il birapporto della cubica ha per modulo l'unità (cioè se l'invariante assoluto è negativo), si può prendere per parallelogrammo dei periodi un *rombo*, e come periodi fondamentali due numeri complessi coniugati, che nel seguito indicheremo con $(\omega_1 + i\omega_2)/2$ e $(\omega_1 - i\omega_2)/2$, cosicchè anche in questo 2º caso ω_1 ed $i\omega_2$ saranno due periodi, ma non più fondamentali: nei loro multipli si avranno ancora rispettivamente tutti i periodi reali e tutti quelli imaginari puri. — In ambo i casi, dalle espressioni note delle funzioni ellittiche di u mediante gl'invarianti, oppure anche dalla considerazione della cubica reale, si vede subito che la corrispondenza univoca fra i punti della curva che corrispondono a valori coniugati di u ([76]), cioè la corrispondenza rappresentata parame-

---

([76]) Questa corrispondenza è univoca appunto per l'ipotesi fatta che l'invariante assoluto di γ sia reale e che quindi il coniugato di un periodo sia ancora un periodo. Anche altre corrispondenze che ora otterremo su γ sono univoche solo in tali ipotesi. — A proposito di corrispondenze iperalgebriche simmetriche sulle curve ellittiche (*superficie simmetriche* $p = 1$) si confrontino gli ultimi paragrafi dell'opuscolo del sig. Klein: *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* (Leipzig, 1882).

tricamente da

$$u' \equiv \overline{u}, \qquad \text{(mod}^{\text{i}}\text{ periodi)}$$

è un'anticollineazione (nel caso della cubica reale il coniugio). Potremo assumerla come anticollineazione ausiliare **C** del n. preced. Allora, poichè la curva γ' coinciderà con γ, dovremo cercare le corrispondenze algebriche univoche fra i punti di γ che soddisfano alle due condizioni ivi trovate per le corrispondenze **O**.

La 1ª di quelle condizioni è soddisfatta da *ogni* corrispondenza algebrica univoca su γ. Poichè è noto ([77]) che qualunque sia questa corrispondenza, ne esiste *sempre* su γ un'altra (la corrispondenza dei *centri omologhi di projezione* rispetto a quella) che ha con quella le stesse relazioni che la **P** del n. prec. ha con la **O**. Ora le corrispondenze algebriche univoche (*ordinarie*) fra i punti di γ formano due sistemi infiniti rappresentati rispettivamente da

$$u' \equiv -u + C \tag{7}$$

$$u' \equiv u + C, \tag{8}$$

ove C indica una costante qualunque. Facendo il prodotto di queste corrispondenze per l'anticollineazione ausiliare avremo i due sistemi infiniti di corrispondenze univoche iperalgebriche

$$u' \equiv -\overline{u} + C \tag{9}$$

$$u' \equiv \overline{u} + C. \tag{10}$$

Queste sarebbero già corrispondenze di punti reciproci rispetto a reti di antireciprocità. Ma volendo che sian corrispondenze Ω della natura richiesta, cioè rispetto a reti di antipolarità, si dovrà introdurre la 2ª condizione, cioè che siano involutorie. Poniamo d'or innanzi $C = C_1 + iC_2$, e similmente $u = u_1 + iu_2$, ove le lettere con indici inferiori indicano numeri reali. Uguagliando la corrispondenza (9) alla sua inversa, si vede che essa è involutoria se $C - \overline{C} \equiv 0$, ossia $2iC_2 \equiv 0$, donde (poichè i periodi imaginari puri sono, per ambe le specie di cubiche, i multipli di $i\omega_2$)

$$iC_2 \equiv 0, \qquad \text{oppure} \qquad iC_2 \equiv \frac{i\,\omega_2}{2}.$$

([77]) V. il n. 1 della mia Nota: *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche* nel vol. XXIV di questi Atti [queste «Opere», I, pp. 152-172]; ed anche il lavoro del sig. CASTELNUOVO ivi citato.

Similmente si vede che la corrispondenza (10) è involutoria se

$$C_1 \equiv 0\,, \qquad \text{oppure} \qquad C_1 \equiv \frac{\omega_1}{2}\,.$$

Concludiamo dunque che le corrispondenze Ω cercate nella cubica ellittica γ son date da

$$(\Omega_1) \qquad u' \equiv -\bar{u} + C_1$$

$$(\Omega_2) \qquad u' \equiv \bar{u} + iC_2$$

$$(\Omega_1{}^0) \qquad u' \equiv -\bar{u} + C_1 + \frac{i\omega_2}{2}$$

$$(\Omega_2{}^0) \qquad u' \equiv \bar{u} + \frac{\omega_1}{2} + iC_2\,.$$

Sulla cubica ellittica a birapporto reale si hanno così quattro serie distinte ∞^1 *di corrispondenze* Ω. *Due di esse,* $\Omega_1{}^0$ *e* $\Omega_2{}^0$*, non hanno punti uniti, cioè derivano da reti che non hanno fili cubici base,* poichè ponendo $u' \equiv u$ l'equazione della $\Omega_1{}^0$ diventa

$$2u_1 \equiv C_1 + \frac{i\omega_2}{2}\,,$$

che è assurdo, non essendovi in questo caso dei periodi i quali abbiano per parte imaginaria $i\omega_2/2$; e analogamente per le $\Omega_2{}^0$. Ma pei punti uniti di una Ω_1 otteniamo invece

$$2u_1 \equiv C_1\,, \qquad (\text{mod. } \omega_1) \tag{11}$$

onde

$$u_1 \equiv \frac{C_1}{2}\,, \qquad \text{oppure} \qquad u_1 \equiv \frac{C_1}{2} + \frac{\omega_1}{2}\,; \qquad (\text{id.}) \tag{11'}$$

e similmente pei punti uniti di una Ω_2

$$2u_2 \equiv C_2\,, \qquad (\text{mod. } \omega_2) \tag{12}$$

$$u_2 \equiv \frac{C_2}{2}\,, \qquad \text{oppure} \qquad u_2 \equiv \frac{C_2}{2} + \frac{\omega_2}{2}\,. \qquad (\text{id.}) \tag{12'}$$

Dunque *le corrispondenze* Ω_1 *e* Ω_2 *ammettono tutte dei fili cubici di punti uniti, sì che per ogni punto di* γ *passa un filo cubico di ciascuno dei due sistemi* (78). Nel caso attuale *ogni filo si compone di due rami*

---

(78) La semplicità della rappresentazione analitica che così si è trovata dei fili cubici sulle curve ellittiche del 3^0 ordine, cioè in sostanza con *le funzioni ellittiche (d'invariante assoluto reale) di argomenti* u *la cui parte reale, o la cui parte*

distinti, corrispondenti alle due equazioni (11′), oppure (12′), poichè uno stesso punto non può corrispondere a due valori di u le cui parti reali differiscano di $\omega_1/2$, o le cui parti imaginarie differiscano di $i\omega_2/2$.

Sulla cubica il cui birapporto ha per modulo l'unità si hanno in generale due soli sistemi ∞^1 *di corrispondenze* Ω, poichè le serie Ω_1^0, Ω_2^0 coincidono rispettivamente con Ω_1, Ω_2, ottenendosi le loro equazioni dalle equazioni di queste coll'aggiungere ai secondi membri il periodo $(\omega_1 + i\omega_2)/2$ (e mutando le costanti reali C_1, C_2). *Entrambi questi sistemi hanno fili cubici di punti uniti* rappresentati ancora dalle (11), (12), ecc. Però in questo caso un punto per cui $u_1 \equiv C_1/2$ (mod. ω_1) si può, aggiungendo quel periodo al suo parametro, ridurre ad avere $u_1 \equiv C_1/2 + \omega_1/2$, sicchè le due equazioni (11′) si equivalgono, *i fili* (11) *si compongono di un sol ramo*; e similmente i fili (12) [79].

Le due specie di cubiche ellittiche hanno a comune le cubiche armoniche. Ne segue che *sulle cubiche armoniche vi sono sei serie* ∞^1 *di corrispondenze* Ω, *di cui due prive di punti uniti, due con fili cubici ad un ramo, e due con fili cubici a due rami.* A ciò si giunge anche se si bada che per una cubica armonica, i cui periodi fondamentali

---

imaginaria pura, è costante fa presumere che essi devono già esser stati considerati, almeno analiticamente, da lungo tempo. Così è infatti: ciò che vi ha di essenzialmente nuovo nelle cose suesposte è la definizione *geometrica* di quei fili come *intersezioni di iperconiche* e le proprietà diverse che vi si collegano.

Ad esempio il Siebeck (Crelle J., 57, p. 359; e 59, p. 173) rappresentando una funzione ellittica di u sui punti reali di un piano ottenne su questo due sistemi ortogonali di quartiche bicircolari omofocali, le quali si possono appunto riguardare come imagini dei nostri fili cubici: v. anche Schwarz, Crelle J., t. 77, p. 38 (o Ges. Math. Abhandlungen, t. II, p. 260), che di quei sistemi di curve rilevò le proprietà caratteristiche. Ma più particolarmente va qui citato l'Harnack che nella seconda parte della Memoria *Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades* (Math. Ann., IX) rappresenta l'ente ellittico secondo un concetto di Klein, cioè mediante i punti reali delle tangenti complesse di una curva piana reale di 3ª classe, e studia certi due sistemi di ∞^1 curve reali ellittiche del 6⁰ ordine, le quali rappresentano precisamente la serie delle tangenti per cui è costante la parte reale o la parte imaginaria dell'integrale ellittico u, e corrispondono quindi ai nostri due sistemi di fili cubici. Sia ricorrendo a queste rappresentazioni dell'ente ellittico (dell'integrale u) sulla superficie piana di Riemann o su quella di Klein, sia più in generale con le rappresentazioni su superficie chiuse (simmetriche) qualunque per le quali $p = 1$ (v. l'opuscolo del sig. Klein citato precedentemente), le proprietà che sopra si trovano direttamente per le corrispondenze ed i fili cubici di γ, acquistano uno speciale carattere intuitivo, intorno al quale però non possiamo qui trattenerci.

[79] Questi risultati sono in pieno accordo con quelli del n. 53.

si posson rappresentare con ω (reale) ed $i\omega$ (sicchè il loro parallelogrammo sia un *quadrato*), le corrispondenze univoche algebriche non sono soltanto le (7), (8), ma anche quelle (*singolari*) date da

$$u' \equiv \pm iu + C\ ;$$

partendo da queste si ottengono i due nuovi sistemi di corrispondenze Ω

$$u' \equiv \pm i\bar{u} + C_1(1 \mp i)\,,$$

che hanno per fili di punti uniti i due sistemi

$$u_1 \mp u_2 \equiv C_1\,.$$ [80]

56. Quando la cubica γ è di 2ª specie abbiamo visto che le due serie Ω_1 e Ω_1^0 si fondono in un sol sistema, e così pure le altre due Ω_2 e Ω_2^0. È opportuno introdurre questa considerazione anche quando γ è di 1ª specie, e riguardare in ogni caso le Ω_1 e Ω_1^0 come formanti un 1^0 *sistema* di corrispondenze Ω (il quale per la 1ª specie di cubiche si comporrebbe di due tratti Ω_1 e Ω_1^0, e per la 2ª di un tratto solo), e similmente Ω_2 e Ω_2^0 come formanti un 2^0 *sistema*. Ciò permette di abbreviare alcuni enunciati.

Così se si forma l'equazione della corrispondenza Π relativa ad una delle Ω_1, Ω_1^0 ovvero ad una delle Ω_2, Ω_2^0 (e ciò si fa scrivendo che nella Π si corrispondono i tangenziali di due punti omologhi nella Ω), si trova rispettivamente:

$$(\Pi_1) \qquad u' \equiv -\bar{u} - 2C_1\,,$$

ovvero

$$(\Pi_2) \qquad u' \equiv \bar{u} - 2iC_2\,,$$

e si conchiude che *le corrispondenze Ω e Π sono entrambe del* 1^0 *od entrambe del* 2^0 *sistema.*

Così ancora se nelle equazioni delle Ω_1, Ω_1^0 si tien fisso u mentre varia la costante reale C_1, si vede che $2u_2'$ rimarrà costante, ecc. ecc., e si conchiude che *i punti di γ che corrispondono ad un punto fisso rispetto alle infinite corrispondenze Ω dell'uno dei due sistemi sono i punti di quel filo cubico dell'altro sistema che passa pel punto fisso.* Da questa proposizione risulta più evidente il legame fra la scomposizione di ogni filo cubico in due rami e lo scomporsi di ogni sistema di corrispondenze Ω in due tratti.

---

(80) Un altro caso particolare notevole delle cubiche di 2ª specie si ha nella *cubica equianarmonica*; ma di questo lascio l'esame al lettore.

Tralasciamo di risolvere altre questioni che si presentano spontanee sulle corrispondenze Ω, come le relazioni di *prodotti* e di *gruppi* che esse hanno fra loro e con le altre corrispondenze univoche, algebriche ed iperalgebriche; la determinazione delle serie finite di corrispondenze (o di fili cubici) di cui ognuna è la Π rispetto alla precedente considerata come Ω (il che coincide colla determinazione dei poligoni semplici che sono simultaneamente iscritti e circoscritti a γ); il numero e la natura delle intersezioni di due fili cubici di diverso sistema (4 in generale, ma 2 nel caso della curva armonica se i due sistemi da cui son presi i fili sono di specie diversa); ecc. ecc. Son tutte cose che dalle equazioni trovate delle corrispondenze e dei fili scaturiscono immediatamente.

57. Solo una questione conviene che trattiamo ancora, affine di rimuovere un'obiezione che altrimenti ci si potrebbe fare. I ragionamenti del n. 54 ci affidano completamente che ognuno dei fili da noi ottenuti sopra γ *sta* su una rete d'iperconiche; ma sarà egli sempre l'*intersezione completa* di questa rete? È facile vedere, basandosi sulla 2ª parte del n° 49, che ciò non sarà nel solo caso che la rete d'iperconiche abbia per base una catena piana, nella quale giacerà allora il filo. Questa catena piana sarà fondamentale per un'antinvoluzione che muta γ in se stessa determinandovi una particolare corrispondenza Ω. La ricerca di tali fili eccezionali (che chiameremo ancora *fili cubici*, quantunque ad essi non si applichi più senz'altro la definizione del n. 51) coincide colla ricerca di quelle fra le corrispondenze Ω che sono anticollineari. Ricorrendo alle equazioni delle Ω e scrivendo che a tre punti u allineati corrispondono tre punti u' allineati, si trova che le antinvoluzioni Ω sono le tre Ω_1 per cui si ha $3C_1 \equiv 0$, ossia

$$C_1 = 0\,, \quad \frac{\omega_1}{3}\,, \quad \frac{2\omega_1}{3}\,,$$

e le tre Ω_2 per cui $3iC_2 \equiv 0$, ossia

$$C_2 = 0\,, \quad \frac{\omega_2}{3}\,, \quad \frac{2\omega_2}{3}\,,$$

(fra le quali è la $u' \equiv \bar{u}$ di cui ci siam serviti al n. 55, come anticollineazione ausiliare). Dunque *per una cubica ellittica d'invariante assoluto reale vi sono in generale sei antinvoluzioni che la trasformano in se stessa, cioè sei catene piane che la segano secondo fili cubici: ognuno dei due sistemi di corrispondenze Ω contiene tre antinvoluzioni. Solo la cubica armonica, corrispondentemente ai quattro sistemi Ω che* *essa ammette, è trasformata in sè da dodici antinvoluzioni, le cui catene piane la segano, sei secondo fili cubici a due rami e sei secondo fili ad un sol ramo.*

Le particolari corrispondenze Ω che ora consideriamo si possono anche caratterizzare come quelle che coincidono con le rispettive Π: ciò si vede subito sì geometricamente che mediante le equazioni. In altri termini uno di questi particolari fili cubici si può caratterizzare dicendo che la retta che congiunge due suoi punti (e che in generale sega ancora γ in un punto del corrispondente filo Π: v. n. 51) lo sega ancora in un terzo punto: quando un filo cubico Ω ammette una tal retta *trisecante*, esso sta in una catena piana (intersezione di due catene semplici di rette contenenti quella trisecante, ecc.: cfr. n^0 cit.), e *ogni* retta che ne congiunga due punti ne contiene un terzo. Possiamo anche dire che questi fili cubici sono quei fili cubici di γ che contengono dei flessi della cubica. Ognuno di essi ne contiene tre posti in linea retta; in ogni sistema di fili cubici si hanno così 3 particolari fili i quali contengono rispettivamente le 3 terne di flessi poste sui lati di un triangolo sizigetico: in generale si hanno così, corrispondentemente ai due sistemi Ω, due triangoli sizigetici; per la cubica armonica ai quattro sistemi Ω vengono a corrispondere i 4 triangoli sizigetici.

Se la cubica γ è reale, una delle catene piane considerate si compone dei punti reali del piano, ed il particolare filo cubico in cui essa taglia γ non è altro che l'ordinaria parte reale di γ: la quale appunto si compone di due rami o di un solo a seconda che la cubica è di 1ª o di 2ª specie (e contiene sempre tre flessi); solo le cubiche reali *armoniche* possono aver le parti reali composte tanto di un ramo quanto di due.

58. Occupiamoci finalmente della determinazione delle corrispondenze Ω e dei relativi fili cubici sopra una cubica piana *razionale* γ. Rifacciamoci alle considerazioni del n. 54 ed alle conclusioni a cui esse ci avevano condotti riguardo alle condizioni a cui il problema si può ridurre. Si tratta anzitutto di vedere quando è che una corrispondenza algebrica univoca fra due cubiche piane razionali γ, γ', cioè una *projettività* fra i punti di queste, si può considerare come corrispondenza di punti reciproci rispetto ad una rete di reciprocità fra i due piani. Trovammo che perciò occorre e basta che, comunque si scelga su γ un punto A, esista su γ' un punto A_1 tale che i fasci di rette che da A e A_1 projettano i punti di γ, γ' omologhi in quella corrispondenza siano projettivi: o, ciò che fa lo stesso,

tale che alle coppie di punti di γ allineate con A corrispondano su γ' le coppie di punti allineate con A_1. Ora i due punti di γ che cadono nel punto doppio di questa curva (e che *sulla curva* van riguardati come distinti o come coincidenti secondo che quel punto doppio è un *nodo* od una *cuspide*) formano sempre una coppia allineata con A, qualunque sia questo punto: dunque i loro omologhi su γ' devono formare similmente una coppia di punti allineati con A_1, ovunque si trovi questo punto su γ', e però dovranno coincidere in un punto doppio di γ'. Dunque la projettività data fra i punti di γ e γ' deve soddisfare a questa condizione, che *rispetto ad essa ai due punti di γ che cadono nel punto doppio di questa curva corrispondano rispettivamente i due punti che cadono nel punto doppio di γ'*: condizione *doppia* se quei punti doppi son nodi, *semplice* se sono cuspidi. Questa condizione è in pari tempo sufficiente; poichè da una semplice applicazione del principio di corrispondenza segue che le coppie di punti di γ' corrispondenti alle coppie di γ allineate con un punto qualunque A di questa stanno in generale sulle rette di un inviluppo di 2ª classe: ora, se quella condizione è soddisfatta, quest'inviluppo dovrà scindersi nel fascio delle rette passanti pel punto doppio di γ' ed in un altro fascio di rette A_1, donde ecc. (81).

Applicando ora l'anticollineazione ausiliare C del n. 54 per ritornare da γ' a γ e valendosi delle cose ivi dette otteniamo subito i risultati seguenti. *Sulla cubica γ dotata di un nodo vi sono due sistemi ∞^1 di corrispondenze Ω, e cioè le antinvoluzioni fra i punti di γ le quali hanno per punti uniti i due punti della curva che cadono nel nodo, e le antinvoluzioni fra i punti di γ per le quali invece questi due punti sono omologhi: questi due sistemi (fasci armonici) di an-*

---

(81) Data una projettività *qualunque* fra due cubiche piane razionali γ, γ', essa vien projettata mediante fasci projettivi di rette dai due punti doppi, ed anche da altri due punti A, A_1 di γ, γ' che si ottengono, A come residua intersezione di γ colla retta che congiunge i due punti di γ corrispondenti al punto doppio di γ', ed A_1 in modo analogo. Ne segue che sempre esiste una corrispondenza birazionale quadratica fra i due piani (quella determinata da quelle due coppie di fasci projettivi), la quale determina fra γ e γ' quella corrispondenza projettiva (e vi sono altri due fasci projettivi di rette coi centri B, B_1 fuori di γ, γ', i quali projettano pure quella corrispondenza, sicchè alle terne di punti di γ allineate con B corrispondono le terne di punti di γ' allineate con B_1): in altri termini vi è sempre un fascio di reciprocità fra i due piani tale che son reciproci rispetto ad esso i punti omologhi della data projettività fra γ e γ'. I casi che sopra si considerano sono quelli in cui invece che un *fascio* si ha una *rete* di reciprocità, e quindi invece di *una* corrispondenza birazionale fra i due piani se ne hanno infinite.

tinvoluzioni dànno colle loro catene fondamentali due sistemi di fili cubici razionali, tra cui quelli del 1⁰ *sistema contengono il punto doppio di γ come punto doppio proprio, e quelli del* 2⁰ *lo contengono come punto isolato; ecc. — Sulla cubica γ dotata di cuspide vi è un sistema ∞^2 di corrispondenze Ω, cioè le antinvoluzioni fra i punti di γ le quali hanno per punto unito la cuspide: i fili cubici relativi ad esse sono la rete ∞^2 delle catene semplici di punti di γ che contengono quella cuspide* ([82]).

E qui, analogamente al n. 57, si presenta la questione di determinare quei fili cubici di γ i quali non sono l'intersezione *completa* di una rete d'iperconiche, ma l'intersezione di γ con catene piane: e si trova subito che se γ ha un nodo vi sono tre di questi fili nel 1⁰ sistema (passanti rispettivamente pei tre flessi), ed uno nel 2⁰ (contenente i tre flessi), e che se γ ha una cuspide vi sono ∞^1 tali fili (determinati da catene piane che contengono la cuspide ed il flesso di γ ed il punto comune alle tangenti in essi). Ecc.

Da ultimo osserviamo che anche una catena semplice *qualunque* di punti di una cubica razionale piana (od anche sghemba) γ si potrebbe chiamare (per ragioni che appariranno meglio in un altro lavoro) un *filo cubico*; ma non sarebbe in generale su una *rete* d'iperconiche. Si potrebbe veder facilmente che esso sarebbe invece l'intersezione di γ con un *fascio* d'iperconiche (v. la prima nota a questo n⁰) ([83]).

([82]) Si possono verificare analiticamente questi risultati ed ottenerne con facilità degli altri valendosi della rappresentazione parametrica delle curve piane razionali (data ad es. in CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie*, pp. 586 e 592). Così se la cubica con un nodo si rappresenta in guisa che tre punti qualunque in linea retta abbiano parametri il cui prodotto sia costante, i due sistemi ∞^1 di fili cubici sopra considerati si comporranno dei punti per cui è costante l'argomento (a meno di un multiplo di π), ovvero il modulo del parametro. E se per la cubica con cuspide si sceglie la rappresentazione con parametri $x + iy$ in modo che la condizione di allineamento di tre punti si abbia annullando la somma dei loro parametri, la ∞^2 suddetta di fili cubici si rappresenta coll'equazione $ax + by + c = 0$ a coefficienti a, b, c reali.

([83]) Per vedere ciò ed in pari tempo i principali risultati di questo n⁰ può servire utilmente la considerazione di γ come projezione di una cubica sghemba C (considerazione utile anche per lo studio delle projettività fra due cubiche piane razionali). Una catena semplice di punti di γ sarà la proiezione di una catena di C: possiamo supporre senza perdita di generalità (ed al solo scopo di abbreviare il discorso) che C sia reale e che quella sua catena sia appunto composta dei punti reali di C. Le catene semplici di rette che contengono la catena considerata di punti di γ si otterranno come sezioni di quelle catene semplici di piani cogli assi passanti pel centro P di proiezione, le quali contengono i punti reali di C. Una tal catena di piani è quella che ha per asse la retta reale su cui sta il punto (imaginario) P e che si compone tutta di piani reali. Se poi una retta imaginaria r passante per P è asse di un'altra catena di piani projettante i punti reali di C, questa catena sarà riferita projettivamente a quella dei piani coniugati,e però le rette reali, intersezioni di piani omologhi di queste due catene, saranno una schiera di generatrici reali di una quadrica rigata. Ognuna di queste rette conterrà un sol punto di C se r è la corda di questa curva che passa per P. Tolto questo caso, la r incontrerà semplicemente C, mentre i piani della catena, cioè le loro rette reali, incontreranno in due punti mobili il filo reale di C. Ora la quadrica reale considerata, dovendo contenere oltre a C la corda di questa curva passante per P, e la sua coniugata, sarà ben determinata; a meno che queste due rette coincidano, cioè che P stia su una corda reale di C, nel qual caso quella quadrica potrà muoversi in un fascio (ed il piano che le è tangente in P darà su C un punto mobile, quello d'appoggio di r, il quale descriverà su C una catena semplice). Da ciò si conclude che la catena semplice di γ sta in generale su tre sole catene semplici di rette (e quindi nel fascio d'iperconiche determinato da due di esse); e soltanto nei casi che i due punti di γ che cadono nel punto doppio stiano in quella catena semplice, ovvero siano armonici rispetto ad essa (casi che corrispondono rispettivamente all'incontrarsi di C e della corda passante per P in due punti reali ovvero in due punti coniugati), avverrà che quelle catene di rette saranno infinite (coi centri formanti una catena semplice di punti di γ).