Corrado Segre

Corrado Segre

Le geometrie proiettive nei campi di numeri duali, Nota I
Le geometrie proiettive nei campi di numeri duali, Nota II

Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **47** (1911-12), p. 114–133
Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **47** (1911-12), p. 164–185
in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 396–431

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_396>

XL.

LE GEOMETRIE PROIETTIVE NEI CAMPI DI NUMERI DUALI

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino »,
vol. XLVII, 1911-12, pp. 114-133 e 164-185.

Il sig. P. PREDELLA ha pubblicato recentemente un *Saggio di Geometria non-Archimedea* (1), in cui pone le basi di una geometria, avente per elementi, o *punti in nuovo senso*, le *omografie paraboliche* (cioè a punti uniti coincidenti) delle ordinarie rette punteggiate. Le lunghezze (e quindi anche gli angoli, ecc.) sono misurate, in questo campo, da numeri del tipo $a + b\eta$, ove η è una nuova unità tale che $\eta^2 = 0$ (2).

Si può confrontare l'ingegnosa idea del PREDELLA con quella che era stata svolta dallo STAUDT per i *punti imaginari*. Questi so-

---

(1) Giornale di matem., 49, 1911, pp. 281-299; seguito da una « Nota seconda », con lo stesso titolo, pubblicata in opuscolo separato, a Torino (Tip.a Bona, Ottobre 1911). L'Autore mi avverte che anche questa 2a Nota verrà poi stampata nel Giornale di matem. [V. vol. 50, 1912, pp. 161-171].

(2) I numeri complessi di questa specie s'erano già adoperati ripetutamente, per enti geometrici diversi da quelli del PREDELLA, e cioè in Geometria delle *rette*, e delle *dinami* o *viti*. Primo di tutti, in ordine cronologico, pare sia stato un lavoro di A. P. KOTJELNIKOFF (1895), seguito da uno di D. SEILIGER (1897) (lavori in lingua russa, che io conosco solo per le recensioni del « Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik »). Viene poi subito: J[oh]. PETERSEN (ora HJELMSLEV), *Nouveau principe pour études de géométrie des droites*, Oversigt over k. Danske Videnskabernes Selskab, 1898, pp. 283-344. Ma specialmente van citate le ricerche di E. STUDY, svoltesi indipendentemente da quelle, e in particolare l'opera del più alto interesse, *Geometrie der Dynamen* (Teubner, 1903). Ritornerò, alla fine di questo scritto (n. 46), sul contenuto di quel libro, non che di altri lavori derivati da quelli dello STUDY. Solo conviene che sia fatta fin da ora la citazione seguente di uno di essi: J. GRÜNWALD, *Ueber duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie*, Monatshefte für Math. u. Physik, 17, 1906, pp. 81-136.

no, secondo STAUDT, *involuzioni* di punti reali sopra rette (con determinati *versi*); ed i numeri a cui essi dànno origine (*Würfe*, ecc.) sono del tipo $a + bi$, con $i^2 = -1$. Questo concetto è stato proseguito, con l'introduzione di *punti bicomplessi*, rappresentati da involuzioni rettilinee fra punti complessi, ecc. (3).

Tale confronto porta a ricercare se le altre sorta di projettività rettilinee possano dar luogo a geometrie corrispondenti a sistemi più generali di numeri complessi.

Premesse sui numeri duali (4).

1. D'or innanzi, quando si parli di numeri o quantità, senza aggiungere alcun qualificativo, s'intenderà che siano *numeri complessi ordinari* $(a + bi)$; e similmente più innanzi per i punti, rette, ecc. (Ma potremmo invece convenire che si restringano le considerazioni ai *numeri reali*, e così ai *punti reali*, ecc.: quasi tutto ciò che esporremo varrebbe ancora, con lievi modificazioni).

Diciamo *numeri duali* un sistema di numeri complessi $a + b\varepsilon$, a due distinte unità 1, ε, nel quale la moltiplicazione sia commutativa, e si abbia:

$$\varepsilon^2 = g\varepsilon + h\,, \tag{1}$$

ove g, h son due quantità *fisse* (5). Ne deriva che, ad esempio:

$$(a + b\varepsilon)(x + y\varepsilon) = ax + hby + (bx + ay + gby)\,\varepsilon\,. \tag{2}$$

S'intende che alla considerazione dei numeri duali $a + b\varepsilon$ si potrebbe sostituire sempre quella delle *coppie* di numeri ordinari

---

(3) C. SEGRE, *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*, Math. Ann., XL, 1892, pp. 413-467 [V. questo volume, p. 338].

(4) Queste premesse son cose ben note; e solo si metton qui per comodità del lettore, e per i riferimenti che ad esse saran da fare in seguito. — Per la teoria dei numeri complessi a più unità veggansi, ad esempio, le citazioni contenute a p. 455 e seg.i della Memoria (3), e l'articolo di E. STUDY, *Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen*, IA4, a pp. 147-183 del 1o vol. della *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (1898-1904).

(5) In questo significato generale è stata introdotta la denominazione «*numeri duali*» dal sig. STUDY, ad es.o a p. 122 del t. 11 (1902) del Jahresber. der deutschen Math.-Vereinigung. In qualcuno dei lavori posteriori è usata quella locuzione in senso più ristretto, cioè pel caso che la (1) si riduca a $\varepsilon^2 = 0$.

Nel seguito avremo cura di usare, in generale, le lettere latine solo per indicare i numeri e gli enti geometrici *ordinari*, mentre per quelli *duali* si useranno lettere greche.

(a, b); sicchè la legge di moltiplicazione (2) si potrebbe trasformare in una definizione del prodotto di due coppie (a, b), (x, y); ecc.

2. Siano e_1, e_2 le due quantità (ordinarie) radici dell'equazione (1), nella quale per un istante si riguardasse ε come quantità ordinaria. Varranno le seguenti relazioni, che scriviamo distesamente, perchè ci occorreranno:

$$e^2 - ge - h = 0 \qquad (e = e_1, e_2) \tag{3}$$

$$e_1 + e_2 = g, \qquad e_1 e_2 = -h \tag{4}$$

$$e_1 = \frac{g + \sqrt{\Delta}}{2}, \qquad e_2 = \frac{g - \sqrt{\Delta}}{2}, \tag{5}$$

ove si pone

$$\Delta = g^2 + 4h, \tag{6}$$

e si fisserà il significato di $\sqrt{\Delta}$.

Chiamiamo *parabolico* il sistema di numeri duali, quando $\Delta = 0$, ossia $e_1 = e_2$. (Se g ed h son reali, e reali le quantità che si considerano come ordinarie, si potrebbe chiamare *ellittico* il sistema se $\Delta < 0$, *iperbolico* se $\Delta > 0$).

La (1) si può scrivere così:

$$(\varepsilon - e_1)(\varepsilon - e_2) = 0. \tag{7}$$

Ma di qui non si penserà a dedurre che ε è uguale ad e_1, o e_2: poichè ε è un simbolo che non ha significato di quantità ordinaria. Così la (7) ci presenta un prodotto di numeri duali, che è nullo senza che sia nullo nessuno dei due fattori.

Più in generale, se vogliamo che si annulli il prodotto dei due numeri duali $a + b\varepsilon$, $x + y\varepsilon$, senza che alcuno di questi sia nullo, vale a dire, applicando la (2), se

$$\begin{cases} ax + hby = 0 \\ bx + (a + gb)y = 0, \end{cases} \tag{8}$$

senza che x ed y siano entrambe uguali a zero, dovrà essere

$$a^2 + gab - hb^2 = 0,$$

ossia

$$(a + be_1)(a + be_2) = 0.$$

Se $a + be_1 = 0$, tenendo conto che a e b non sono ambedue nulle, dalle (8) si trae: $x + ye_2 = 0$; e così se invece $a + be_2 = 0$ si ottiene $x + ye_1 = 0$. La relazione $a + be_1 = 0$ equivale a: $a + b\varepsilon = b(\varepsilon - e_1)$; e analogamente per le altre. Concludiamo: *affinchè il prodotto di due* *numeri duali sia nullo, occorre e basta che uno dei fattori sia il prodotto di una quantità per* $\varepsilon - e_1$; *e l'altro il prodotto di una quantità per* $\varepsilon - e_2$.

Diciamo *nullifici, di 1ª e 2ª schiera,* risp. quei numeri duali, del tipo $b(\varepsilon - e_1)$, $b(\varepsilon - e_2)$, qualunque sia la quantità b (incluso lo zero) : ossia numeri duali che dànno un valor nullo, quando il simbolo ε che compare in essi si sostituisca con e_1, oppure con e_2.

Nel caso dei numeri duali *parabolici* le due schiere di nullifici coincidono. Allora il quadrato di un nullifico è sempre zero.

3. La *divisione* è possibile nel campo dei numeri duali, e dà un risultato ben determinato, solo se il divisore $a + b\varepsilon$ non è un nullifico. Infatti, se il dividendo s'indica con $c + d\varepsilon$, si avranno le equazioni (8), nei cui secondi membri al posto di 0 stanno c, d; e si dovran ricavare x, y. La cosa è possibile se il determinante dei coefficienti di x, y non si annulla : il che viene appunto a dire che $a + b\varepsilon$ non è nullifico. Se invece fosse tale, le suddette equazioni non avrebbero in generale soluzioni; si trova subito che, affinchè ne abbiano (e allora saranno infinite) dev'essere il dividendo $c + d\varepsilon$ un nullifico della stessa schiera di $a + b\varepsilon$.

4. Si può fare un *cambiamento di unità* nel dato sistema di numeri duali, introducendo al posto di ε come nuova unità

$$\zeta = m + n\varepsilon \qquad \text{(ove } n \neq 0\text{)}. \tag{9}$$

La (1) con questa sostituzione diventa

$$(\zeta - m)^2 = gn(\zeta - m) + hn^2,$$

ossia

$$\zeta^2 = G\zeta + H, \tag{10}$$

ove

$$\begin{cases} G = 2m + gn \\ H = -m^2 - gmn + hn^2 . \end{cases} \tag{11}$$

Queste formole ci serviranno più tardi.

Ad esempio, se siamo in un campo di numeri duali *parabolici*, si può sostituire ad ε il nullifico $\eta = \varepsilon - e_1$, sicchè (v. la fine del n. 2) sarà

$$\eta^2 = 0. \tag{12}$$

La (1) viene così semplificata nella (12).

5. Talvolta converrà anche *cambiare le due unità* 1, ε, esprimendole come forme lineari di due nuove.

Se il sistema non è parabolico, si posson prendere come nuove unità due nullifici di schiere diverse, sicchè poi ogni numero duale risulterà come somma di due tali nullifici. È opportuno scegliere in ogni schiera come unità quel nullifico che coincide col proprio quadrato. Il quadrato del nullifico $b(\varepsilon - e_1)$ è, applicando la (7),

$$b^2 (\varepsilon - e_1)^2 = b^2 [(\varepsilon - e_1)^2 - (\varepsilon - e_1)(\varepsilon - e_2)] = b^2 (e_2 - e_1)(\varepsilon - e_1)$$

e quindi coincide con $b(\varepsilon - e_1)$ se si ha $b(e_2 - e_1) = 1$, ossia, per le (5), $b = -(1/\sqrt{\Delta})$. Così nella 1ª schiera il nullifico che uguaglia il suo quadrato è

$$\eta_1 = \frac{e_1 - \varepsilon}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{2} + \frac{g - 2\varepsilon}{2\sqrt{\Delta}} . \tag{13}$$

Similmente quello della 2ª schiera è

$$\eta_2 = \frac{e_2 - \varepsilon}{-\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{2} - \frac{g - 2\varepsilon}{2\sqrt{\Delta}} . \tag{13'}$$

Queste nuove unità η_1, η_2 verificano dunque le relazioni

$$\eta_1^2 = \eta_1 , \quad \eta_2^2 = \eta_2 , \quad \eta_1 \eta_2 = 0 , \tag{14}$$

e con esse si esprimono le primitive unità 1 e ε nel seguente modo:

$$\begin{cases} 1 = \eta_1 + \eta_2 \\ \varepsilon = e_2 \eta_1 + e_1 \eta_2 \end{cases} \tag{15}$$

I numeri duali $a + b\varepsilon$ si rappresenteranno ora con $a_1\eta_1 + a_2\eta_2$, ove

$$a_1 = a + be_2 , \quad a_2 = a + be_1 :$$

cioè a_1, a_2 sono i numeri ordinari che si deducono dal numero duale dato $a + b\varepsilon$, sostituendo ad ε rispettivamente e_2 ed e_1.

Basandosi sulle relazioni (14) si dimostra subito che, se f è il simbolo di una funzione razionale (i cui coefficienti son numeri ordinari), si ha in generale:

$$f(a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 , b_1 \eta_1 + b_2 \eta_2 , \ldots) = f(a_1 , b_1 , \ldots) . \eta_1 + f(a_2 , b_2 , \ldots) . \eta_2 .$$

6. In un sistema qualunque di numeri duali diciamo *coniugato* di $a + b\varepsilon$ il numero duale $(a + gb) - b\varepsilon$.

Si vede subito che la relazione tra due numeri duali coniugati è reciproca. Se poi si fa il cambiamento d'unità (9), basta applicare la 1ª delle (11) per verificare che il coniugio definito in base all'unità ε equivale al coniugio relativo all'unità ζ.

Un numero duale $a + b\varepsilon$ coincide col coniugato quando $b = 0$, cioè quando si riduce ad un numero ordinario.

Il coniugato di ε è $g - \varepsilon$.

La somma, il prodotto, ... di due o più quantità duali hanno per coniugate la somma, il prodotto, ... delle coniugate di quelle.

Formando il prodotto di un numero duale $a + b\varepsilon$ pel suo coniugato si ha:

$$(a + b\varepsilon)(a + gb - b\varepsilon) = a^2 + gab - hb^2 = (a + be_1)(a + be_2),$$

quantità ordinaria, che può chiamarsi *norma* di $a + b\varepsilon$, e s'annulla (n. 2) quando $a + b\varepsilon$ è un nullifico.

Dalla definizione dei nullifici si trae che il coniugato di un nullifico è ancora un nullifico. Se il campo non è parabolico, i nullifici di una schiera han per coniugati quelli dell'altra. Così sono coniugati η_1, η_2 (n. 5).

Ne segue che, se rappresentiamo un numero duale con $a_1\eta_1 + a_2\eta_2$ (n. 5), il suo coniugato sarà $a_2\eta_1 + a_1\eta_2$. Ossia, se in base alle unità η_1, η_2 riguardiamo i numeri duali come *coppie* di numeri ordinari (a_1, a_2), son coniugate due coppie *invertite*, come (a_1, a_2) e (a_2, a_1).

I punti nel campo duale.

7. Diciamo *punto duale* l'insieme dei valori di 4 numeri duali

$$\xi_i = x_i + y_i\varepsilon, \qquad (i = 1, ..., 4) \tag{16}$$

quando questi non siano nullifici di una stessa schiera, e si considerino come equivalenti ad essi i valori che si deducono moltiplicandoli tutti per uno stesso numero duale, che non sia un nullifico. Le ξ_i si diranno *coordinate omogenee* del punto, e questo s'indicherà pure con ξ, o con $x + y\varepsilon$. (Occorrendo, si considereranno come *coordinate non omogenee* i rapporti di tre delle ξ_i alla rimanente, supposto che questa non sia un nullifico).

Per ottenere una rappresentazione geometrica di questo ente, interpretiamo le x_i, y_i come coordinate omogenee di *punti ordinari* (complessi: cfr. n. 1) x, y in uno stesso sistema di riferimento; e vediamo come variano questi punti se alteriamo le ξ_i moltiplicandole per uno stesso fattore $\varrho = a + b\varepsilon$. Diventeranno x', y', se

$$(a + b\varepsilon)(x_i + y_i\varepsilon) = x'_i + y'_i\varepsilon. \tag{17}$$

Applicando la (2), ed omettendo l'indice i nelle coordinate omogenee dei punti [6], avremo

$$(18) \qquad \begin{cases} x' = ax + hby \\ y' = bx + (a + gb)y \, . \end{cases}$$

Se i punti x, y coincidono, cioè $y_i = mx_i$, coincideranno con essi anche i punti x', y'. Le ξ_i sono uguali alle x_i moltiplicate per uno stesso numero duale non nullifico. Diciamo che il punto duale ξ *si riduce allora ad un punto ordinario* x.

8. Siano invece x, y due punti distinti. Le (18) provano che, al variar del fattore duale $\varrho = a + b\varepsilon$, i punti x', y' variano in generale sulla retta che unisce x, y. Introducendo per i punti di questa la coordinata projettiva non omogenea w corrispondente alla rappresentazione dei punti stessi con $x + wy$, indichiamo con w, w' i valori di quel parametro che spettano ad x', y'. Le (18), supposto $ab \neq 0$, dànno

$$w = \frac{hb}{a}, \quad w' = \frac{a}{b} + g,$$

donde

$$(19) \qquad ww' = gw + h \, .$$

Dunque sulla retta xy i due punti x', y', tali che il punto duale $x' + y'\varepsilon$ coincida col punto duale $x + y\varepsilon$, variano come punti omologhi di una omografia, o projettività, ben determinata, avente per equazione la (19). Quest'omografia ha per discriminante $-h$; essa non sarà degenere se, *come supporremo d'or innanzi, salvo esplicita ipotesi contraria,* si ha

$$(20) \qquad h \neq 0 \, .$$

Ponendo nella (19) $w' = w$, e confrontando colla (3), si vede che i punti uniti della projettività sono

$$(21) \qquad z = x + e_1 y, \quad t = x + e_2 y \, .$$

Li diremo rispettivamente 1^0 *e* 2^0 *punto unito*. Essi si ottengono dal dato punto duale ξ (16) sostituendovi il simbolo ε rispettivamente con e_1, e_2. Coincidono, cioè la projettività è *parabolica*, se è parabolico il sistema di numeri duali, ossia se $\Delta = 0$.

---

[6] Intenderemo cioè d'or innanzi che una relazione lineare omogenea fra simboli, che han significato di punti, stia per indicare le 4 relazioni che si deducono da essa, scrivendo successivamente in luogo di quei simboli le coordinate $1^a, \ldots, 4^a$ dei punti.

Il *birapporto dell'omografia*, vale a dire il birapporto k del 1^0 e del 2^0 punto unito coi due punti omologhi x e y, o con altri due punti omologhi qualunque x' e y', vale $k = e_1/e_2$. Non muta dunque, se si cambia il punto duale ξ; dipende solo dal sistema di numeri duali, ossia dalle costanti g, h. Esso è dato (col suo reciproco) dall'equazione in k

$$h(k+1)^2 + g^2 k = 0\,, \tag{22}$$

In luogo del birapporto si può considerare l'invariante razionale $I = g^2/h$ (7).

9. Viceversa, sia data su una retta un'omografia di birapporto $k = e_1 : e_2$, od invariante $I = g^2 : h$. Si potrà sempre trovare, nel nostro campo di numeri duali, un punto duale che la rappresenti. In fatti fissiamo due punti omologhi distinti x, y di quell'omografia, e rappresentiamo con $x' = x + wy$, $y' = x + w'y$ due punti omologhi variabili. L'equazione della corrispondenza sarà della forma

$$ww' = g_1 w + h_1\,, \tag{19'}$$

ove, in causa dell'ipotesi fatta sul birapporto od invariante,

$$\frac{g_1^2}{h_1} = \frac{g^2}{h}\,.$$

Quindi, se le y_i moltiplicate per la costante $g_1 : g$ s'indicano di nuovo con y_i, e così pure i parametri w, w' divisi per la stessa costante, la (19') si trasformerà nella (19); la quale così rappresenterà la projettività data, essendo sempre omologhi due punti come $x+wy, x+w'y$. Ora appunto la projettività (19) si era ottenuta dal punto duale $x + y\varepsilon$.

Concludiamo: *I punti duali, che non si riducono a punti ordinari, son rappresentati geometricamente dalle omografie, col birapporto fisso* k, *fra i punti ordinari delle varie rette dello spazio.*

Così le *involuzioni* rettilinee si hanno dalla (19) se $g = 0$: d'accordo con la (22) che dà allora $k = -1$. *Le involuzioni rettilinee son rappresentate dai punti duali di un sistema di numeri duali pei*

---

(7) Per una projettività qualunque del campo binario, rappresentata così:

$$a_0 ww' + a_1 w + a_2 w' + a_3 = 0,$$

è invariante assoluto, ad esempio, l'espressione

$$I = \frac{(a_1 - a_2)^2}{a_1 a_2 - a_0 a_3}\,.$$

quali

$$\varepsilon^2 = h,$$

con $h \neq 0$. Si può prendere, per esempio, $h = -1$, oppure $h = +1$.

Le omografie rettilinee paraboliche si rappresentano mediante un sistema di numeri duali parabolici, cioè con

$$(\varepsilon - l)^2 = 0,$$

ove $l \neq 0$.

10. *La rappresentazione esposta dei punti duali mediante projettività rettilinee dipende essenzialmente dalla unità ε che si pone a base del sistema di numeri duali.* Se si cambia quell'unità (n. 4), muteranno in generale le omografie corrispondenti ai vari punti duali.

Invero introduciamo, al posto di ε, l'unità ζ data dalla (9). Con quella sostituzione verrà

$$x_i + y_i\varepsilon = X_i + Y_i\zeta \tag{23}$$

(le X_i, Y_i essendo quantità ordinarie). E poichè queste relazioni derivano unicamente dall'essere i simboli ε e ζ legati dalla (9), indipendentemente da ogni significato che a loro si attribuisca, avremo pure che la sostituzione tra u, w

$$u = m + nw, \tag{24}$$

avente gli stessi coefficienti che la (9), produrrà:

$$x_i + wy_i = X_i + uY_i. \tag{25}$$

Così il cambiamento (9) dell'unità duale si riflette, per i punti ordinari della nostra retta, su cui stanno i punti x, y, X, Y, nel cambiamento del primitivo parametro w (mediante cui i punti si rappresentano con $x + wy$) nel nuovo u, dato da (24) (mediante il quale i punti stessi si rappresentano con $X + uY$).

Coi nuovi parametri l'omografia analoga a (19) sarà:

$$uu' = Gu + H, \tag{26}$$

ove G, H, quantità analoghe a g, h, sono espresse dalle (11). Sostituendo dunque nella (26) queste espressioni, ed anche quelle di u, u' in funzione dei primitivi parametri w, w' date dalla (24), quell'omografia diventa:

$$(m + nw)(m + nw') - (2m + gn)(m + nw) + m^2 + gmn - hn^2 = 0,$$

ossia, dividendo per n:

$$n(ww' - gw - h) + m(w' - w) = 0. \tag{27}$$

È questa la projettività che si ottiene sulla retta, come imagine del punto duale ξ che ha per coordinate le (23), quando si ponga a fondamento, anzi che ε, come ai n^i 7-9, l'unità duale $\zeta = m + n\varepsilon$. Si vede che: *al mutar dell'unità* ζ *l'omografia rappresentante di un dato punto duale varia in un fascio di omografie dotate degli stessi punti uniti*: poichè nel fascio, che si ha dalla (27) variando $m : n$, sta l'*identità* $w' - w = 0$.

11. Se si esclude il caso *parabolico*, vale a dire la coincidenza dei due punti uniti, risulta che si potrà, a nostro arbitrio, rappresentare i punti duali colle projettività che hanno un dato invariante, o con quelle che ne hanno un altro. Sarà solo questione di scegliere l'unità duale, entro al dato campo di numeri duali [8]. Così, se si prende $2m + gn = 0$, ossia ad esempio $\zeta = 2\varepsilon - g$, si ottiene *l'involuzione.*

Solo i punti uniti risultan fissati, indipendentemente dall'unità duale. Essi erano i punti z e t, dati dalle (21). Escludendo ancora il caso parabolico, le (15) daranno subito:

$$x + y\varepsilon = t\eta_1 + z\eta_2 . \tag{28}$$

Rappresentando in questo modo il punto duale, cioè per mezzo delle due unità η_1, η_2 in luogo di $1, \varepsilon$ (n. 5), non vi è più da rilevare una determinata omografia del fascio, e invece restan messi in evidenza i due punti uniti. E si noti che, indicando con c, d due costanti qualunque non nulle, il punto duale rappresentato da $ct\eta_1 + dz\eta_2$ sarà sempre lo stesso che quel $t\eta_1 + z\eta_2$: si ottengono in fatti le coordinate di quello dalle coordinate di questo, moltiplicandole pel fattore $c\eta_1 + d\eta_2$.

Da questo punto di vista i punti duali non parabolici non sono altro che le coppie di punti ordinari (z, t), *presi in un determinato ordine.*

Invece che 1^0 *e* 2^0 *punto unito dell'omografia* (n. 8), diremo z e t rispettivamente 1^0 *e* 2^0 *nucleo del punto duale* [9].

---

(8) Questo fatto, a primo aspetto un po' strano, che la rappresentazione con projettività del nostro punto duale non dipenda solo da questo ente, cioè dalle sue coordinate, ma anche dall'unità duale con cui queste coordinate vengono espresse, si può confrontare coll'altro fatto che l'ordinario punto analitico, cioè l'insieme (per esempio) di 3 numeri, quando questi si assumano come coordinate cartesiane, viene ad avere per imagine un punto geometrico oppure un altro, a seconda dell'unità di misura che si sceglie per le lunghezze.

(9) Questa denominazione «*nucleo*» è usata dal sig. PREDELLA, nel caso parabolico.

Se il campo di numeri duali è parabolico, i due nuclei di ogni punto duale coincidono. Allora il concetto del punto duale, indipendente dall'unità duale che si pone a base, si ridurrebbe a quello di *un punto e una retta ordinari incidenti*: la retta *sostegno* del punto duale, ed il *nucleo* di questo. Mentre, nel caso non parabolico, il concetto del punto duale equivale indifferentemente a quello di projettività avente un dato invariante, oppure di coppia ordinata di punti ordinari, nel campo parabolico non vi è più un'analoga equivalenza. I punti duali, secondo la nostra primitiva definizione, sono sempre ∞^6, sia il campo parabolico o no; laddove gli enti «*punto e retta ordinari incidenti*» sono solo ∞^5.

Nei paragrafi seguenti, volendo nei nostri ragionamenti abbracciare il caso parabolico con quello non parabolico, dovremo conservare come concetto di *punto duale* quello che si ha fissando l'unità ε, base del campo di numeri duali. L'imagine geometrica del punto duale sarà dunque, di regola, una projettività rettilinea di birapporto k, anzi che una coppia di punti ordinari: se anche questo spezzamento in punti ordinari, nel caso non parabolico, abbrevierebbe o renderebbe superflue alcune dimostrazioni che ci accadrà di fare.

12. Per un momento riguardiamo come *ordinari* i numeri ed elementi geometrici *reali*. Si abbia un sistema di numeri duali *ellittici* (n. 2), cioè $\Delta < 0$, onde $h < 0$. Le omografie che rappresentano i punti duali saranno prive di punti uniti reali. Con una scelta conveniente dell'unità duale ([10]) si possono ottenere *involuzioni* (n. 9) in corrispondenza alla riduzione dell'equazione (1) a

$$\varepsilon^2 = -1 .$$

Otteniamo così, con STAUDT, le involuzioni come enti geometrici rappresentativi dei punti (analitici) imaginari $x + y\sqrt{-1}$. Ma se, invece che all'unità $\varepsilon = \sqrt{-1}$, riferiamo le coordinate di quei punti ad una nuova unità

$$\zeta = m + n\sqrt{-1} ,$$

noi otterremo nel modo esposto al n. 10, come rappresentanti dei punti imaginari, non più le involuzioni, ma le omografie di dato invariante I: che nel caso attuale, cioè calcolato per la (27) in cui $g = 0$, $h = -1$, in base alla nota ([7]), risulta:

$$I = -\frac{4m^2}{m^2 + n^2} .$$

([10]) Si ricavano valori reali per m, n dalle equazioni (11), ove $G = 0$, $H = -1$.

Ritroviamo così, sotto una nuova luce, l'idea di F. KLEIN [11] di assumere, per definire i punti imaginari, delle projettività diverse dalle involuzioni introdotte da STAUDT. Si tratta semplicemente di un cambiamento nell'unità imaginaria!

13. Nel campo dei numeri duali *parabolici* va rilevato che, se si adopera l'unità duale ε tale che

$$\varepsilon^2 = 0\,,$$

non si può più applicare direttamente la rappresentazione dei n$^{\text{i}}$ 8 e seguenti, perchè non è più verificata la condizione (20). E invero la (19) si ridurrebbe ora a $ww' = 0$, omografia degenere.

Ma si può ovviare a ciò, assumendo come imagini geometriche dei punti duali $x + y\varepsilon$ quelle che, seguendo il metodo esposto, ci son date da un'altra unità duale fissata, per esempio

$$\zeta = 1 + \varepsilon\,. \tag{29}$$

Allora la (27), applicata al caso attuale, cioè con $g = h = 0\,, m = n = 1$, diventa

$$ww' + w' - w = 0\,,$$

ossia, ponendo $w = 1/v\,,\ w' = 1/v'$,

$$v' = v + 1\,.$$

In conseguenza, come imagine del punto duale $x + y\varepsilon$, si considererà l'omografia della retta xy, nella quale al punto $vx + y$, per ogni valor di v, corrisponde il punto $(v + 1)\,x + y$. Questa omografia si può anche determinare, dicendo che ha x come unico punto unito, e trasforma il punto y nel punto $x + y$.

14. Due punti duali si diranno *coniugati* quando le loro coordinate omologhe sono numeri duali coniugati (n. 6). Cerchiamo quale legame passa tra le omografie che li rappresentano, in base alla stessa unità duale fissa ε.

Osserviamo anzitutto che se al n. 10 si suppone che la nuova unità ζ sia precisamente la coniugata di ε, ossia (n. 6)

$$\zeta = g - \varepsilon\,,$$

sicchè $m = g\,,\ n = -1$, la projettività (27) diventa:

$$ww' = gw' + h\,,$$

---

[11] *Zur Interpretation der complexen Elemente in der Geometrie,* Math. Ann., XXII, 1883, pp. 242-245 (dalle Götting. Nachrichten, 1872).

che è l'*inversa* della (19). Sono cioè inverse fra loro l'omografia in cui si corrispondono i punti x, y e quella in cui sono omologhi X, Y, quando $x + y\varepsilon$ e $X + Y\zeta$ rappresentano uno stesso punto duale. Ma il punto duale coniugato di $X + Y\zeta$ è $X + Y\varepsilon$. Quindi, riferendoci ai due punti $x + y\varepsilon$, $X + Y\varepsilon$, concludiamo: *Due punti duali coniugati hanno per imagini (fissata una stessa unità duale ε) due omografie inverse l'una dell'altra.*

Se il campo duale non è parabolico, rappresentiamo i suoi elementi in base alle due unità η_1, η_2. Allora si passa da una quantità duale alla sua coniugata scambiando η_1, η_2 (n. 6); e in conseguenza (n. 11) da un punto duale al suo coniugato scambiando fra loro i due nuclei: vale a dire *il coniugato del punto duale* (z, t) *è il punto duale* (t, z). — Ciò si accorda bene col risultato precedente, riguardando i nuclei z, t come punti uniti delle omografie.

15. Indichiamo con ξ e ξ' due punti duali *distinti*; e domandiamo se essi possono essere *legati linearmente*, cioè se possono esservi due numeri duali non nulli α, α' tali che

$$\alpha\xi_i + \alpha'\xi'_i = 0 \qquad (i = 1, \dots, 4). \tag{30}$$

I 4 prodotti $\alpha\xi_i$, e così i loro uguali $-\alpha'\xi'_i$, saranno nullifici di una stessa schiera, per esempio della 1ª: se no, si potrebbero assumere come coordinate di un punto duale, il quale coinciderebbe sì con ξ che con ξ'. Ora le ξ_i non son tutte nullifici della 1ª schiera: dovrà dunque essere il fattore α un tale nullifico. E similmente α'. Poniamo $\alpha = a\eta_1$, $\alpha' = a'\eta_1$, ove a e a' saranno quantità ordinarie non nulle. La (30) diventa

$$\eta_1 (a\xi_i + a'\xi'_i) = 0 ,$$

e prova che le $a\xi_i + a'\xi'_i$ sono nullifici della 2ª schiera. Ciò è come dire che queste espressioni si annullano se nelle ξ_i e ξ'_i al posto del simbolo ε si pone e_2. Ma con questa sostituzione le ξ_i e ξ'_i dànno le coordinate dei secondi nuclei di ξ e ξ' (n. 8 e 11). Dunque questi secondi nuclei coincidono.

Un legame lineare (30) *fra due punti duali distinti significa che questi punti han comune il* 1^0 *nucleo, oppure il* 2^0. *Quando si verifichi, per esempio, il secondo caso, i fattori α, α' saranno nullifici della* 1ª *schiera.*

I piani nel campo duale.

16. Consideriamo i punti duali $x + y\varepsilon$, le cui coordinate verificano un'equazione lineare omogenea (nel campo fissato di numeri duali)

$$\Sigma\,(u_i + v_i\varepsilon)\,(x_i + y_i\varepsilon) = 0\,, \tag{31}$$

ove i coefficienti $u_i + v_i\varepsilon$ non siano nullifici di una stessa schiera. L'insieme di quei punti si dirà un *piano duale*; e quei coefficienti, *coordinate* (omogenee) del piano. Essi si possono evidentemente moltiplicare per uno stesso numero duale, che non sia un nullifico.

Interpretiamo le u_i, v_i come coordinate di due piani ordinari u, v nello stesso sistema di riferimento che ci servì per i punti x, y. Se quei due piani coincidono, cioè ad esempio $v_i = mu_i$, la (31) si riduce a

$$\Sigma\,u_i\,(x_i + y_i\varepsilon) = 0\,,$$

e quindi si spezza nelle due

$$(ux) = 0\,, \qquad (uy) = 0\,, \tag{32}$$

ove (come anche nel seguito) si scrive (ux) in luogo di $\Sigma\,u_i\,x_i$, ecc. Distinguendo i due casi di x, y coincidenti, oppure distinti, queste (32) provano che i punti $x + y\varepsilon$ sono: i punti ordinari giacenti nel piano u, ed i punti non ordinari che stanno su rette ordinarie giacenti nel piano u. Diciamo che in questo caso *il piano duale si riduce al piano ordinario* u.

17. Supponiamo ora che i due piani u, v siano distinti, e sia anzitutto la retta uv sghemba colla retta xy.

Nel fascio di piani (ordinari) determinato da u, v si avrà un'omografia come imagine del piano duale $u + v\varepsilon$, nello stesso modo in cui per un punto (non ordinario) $x + y\varepsilon$ ottenevamo un'omografia fra i punti della retta xy. Come qui erano omologhi x e y, ed anche due punti qualunque x', y', quando valeva la (17), cioè moltiplicando le $x_i + y_i\varepsilon$ per uno stesso fattore duale $a + b\varepsilon$, si mutavano in $x'_i + y'_i\varepsilon$; così nell'omografia del fascio di piani si corrisponderanno u e v, come pure altri due piani u', v' tali che, mediante moltiplicazione delle $u_i + v_i\varepsilon$ per un fattore $c + d\varepsilon$, si ottengano le $u'_i + v'_i\varepsilon$.

In quelle ipotesi la (31), moltiplicata per i due fattori $a + b\varepsilon$, $c + d\varepsilon$, diventa:

$$\Sigma\,(u'_i + v'_i\varepsilon)\,(x'_i + y'_i\varepsilon) = 0\,,$$

che si spezza in due equazioni, una delle quali è:

$$(u'x') + h\,(v'y') = 0\,.$$

Di qui, poichè si suppone la (20), segue che: quando $(u'x') = 0$ è pure $(v'y') = 0$. Ossia: se un punto x' della retta xy sta su un piano u' del fascio uv, il punto omologo ad x' nell'omografia della retta xy sta nel piano omologo ad u' nell'omografia del fascio uv. Dunque, nell'attuale ipotesi generale: *dire che un punto duale non ordinario sta in un piano duale non ordinario equivale a dire che la projettività imagine del punto è sezione di quella che rappresenta il piano.*

In particolare, considerando gli elementi uniti, ed estendendo ai piani duali la locuzione «*nucleo*» (n. 11), si ha che il 1^0 ed il 2^0 nucleo del punto duale staranno rispettivamente nei piani ordinari che sono 1^0 e 2^0 nucleo del piano duale. Ciò risulta pure direttamente scrivendo che l'equazione (31) vale ancora, se al posto di ε vi si mette e_1, oppure e_2.

18. Se la retta uv coincide colla retta xy, si vede subito che l'equazione (31) è verificata.

Infine, se quelle due rette sono incidenti, ma distinte, si può applicare, con lievi modificazioni, il ragionamento del numero precedente. Si trova che l'appartenersi del punto duale $x + y\varepsilon$ e del piano duale $u + v\varepsilon$ equivale allora a dire che il punto comune alle due rette xy, uv è il 1^0 o 2^0 nucleo del punto duale, mentre il piano comune a quelle rette è rispettivamente il 2^0 o il 1^0 nucleo del piano duale.

Le rette duali.

19. Il fatto che le equazioni *lineari* nel campo dei numeri duali si trattano *in generale* come quelle fra numeri reali (tranne qualche riserva, su casi d'impossibilità o d'indeterminazione, che vedremo poi), permette di dire che: *in via generale* la *geometria lineare* nel campo duale (ad esempio relazioni fra punti duali e piani duali) è pienamente analoga a quella del campo geometrico ordinario.

Così è pel concetto della retta. Diciamo *retta duale* l'insieme dei punti duali, le cui coordinate son forme lineari, a coefficienti duali, di due parametri duali variabili λ, λ':

$$\lambda\xi_i + \lambda'\xi'_i, \tag{33}$$

con la condizione che non esistan valori (che non siano entrambi nulli) per λ, λ', tali da annullare quelle forme. Possiamo anche esprimerci così: son punti di una *retta duale* i punti che sono combinazioni lineari (a coefficienti duali) di due punti duali ξ, ξ', purchè questi non sian *legati linearmente*, cioè (n. 15) non abbian comune il 1^0 nucleo, od il 2^0.

Per due punti duali qualunque, purchè non legati linearmente, passa *una sola* retta duale.

Su una retta duale (33) stanno ∞^2 punti duali. Per essi i parametri λ, λ' si posson riguardare come coordinate omogenee *sulla retta*, nel senso solito, cioè della alterabilità per un fattore duale non nullifico ([12]). In fatti, se uno stesso punto duale corrisponde a due coppie di valori di quei parametri, per esempio (λ, λ') e (μ, μ'), sarà

$$\lambda\xi + \lambda'\xi' = \varrho\,(\mu\xi + \mu'\xi'),$$

ossia

$$(\lambda - \varrho\mu)\,\xi + (\lambda' - \varrho\mu')\,\xi' = 0\,;$$

e quindi, per l'indipendenza lineare di ξ, ξ',

$$\lambda = \varrho\mu\,, \qquad \lambda' = \varrho\mu'\,.$$

Se un piano duale contiene due punti duali linearmente indipendenti, conterrà pure gli ∞^2 punti della loro retta duale. Così una retta duale giace in ∞^2 piani duali; e si può definire come l'insieme dei punti comuni a due piani duali linearmente indipendenti. Ecc. ecc.

20. Che cos'è, dal punto di vista geometrico, la retta duale?

Due punti duali, dati in modo generico, saranno due projettività $(p), (q)$, di birapporto k, fra i punti di due rette ordinarie p, q. *Siano queste rette sghembe.* Quelle due projettività saran subordinate su esse da una ben determinata collineazione biassiale Ω, di birapporto k, avente per *assi* o *direttrici* le rette u_1, u_2 (coincidenti, se il campo è parabolico) che uniscono rispettivamente i primi ed i secondi punti uniti di $(p), (q)$ (nuclei dei dati punti duali). Ogni retta unita di Ω diversa dagli assi (come p, q), o, come dirò pure, ogni retta *generatrice* di Ω, è sostegno di una projettività di punti, e di una projettività di piani, di birapporto k, contenute in Ω. Tutte le ∞^2 omografie di punti, e quelle di piani, che così si ottengono, sono mutuamente prospettive, quando hanno i sostegni sghembi: poichè piani

---

([12]) Osserviamo fin da ora che, ponendo nelle (33) e_1 in luogo di ε, risulta che il 1^0 nucleo di quel punto duale sta sulla retta dei primi nuclei di ξ, ξ', ed ha su questa retta come coordinate omogenee i valori che si deducono da λ, λ' con quella sostituzione di e_1 ad ε. Analogamente per il 2^0 nucleo.

omologhi in Ω segano una retta generatrice secondo punti omologhi. Così i due punti duali dati (p), (q) stanno sugli ∞^2 piani duali rappresentati dalle omografie dei fasci di piani attorno alle rette generatrici di Ω (13). E questi piani duali hanno in comune ∞^2 punti duali. La retta duale, coi suoi punti duali e piani duali, ci è ben rappresentata dalla collineazione biassiale Ω (14).

21. *Siano invece incidenti le due rette* p, q. Otterremo una specie particolare di retta duale.

Supponiamo da prima che il punto comune a p, q non coincida con alcuno dei suoi omologhi nelle projettività (p), (q) (non sia nucleo per nessuno dei due punti duali). La retta che unisce questi omologhi taglierà la retta che congiunge i primi punti uniti di quelle projettività in un punto O, da cui uscirà, nel piano ω delle p, q, un fascio di raggi con una omografia avente per sezioni quelle due date (p), (q) (15). La retta duale si compone ora, come luogo di punti duali, di quelli rappresentati dalle projettività puntuali, segate sulle ∞^2 rette del piano ω da quell'omografia del fascio di raggi; e come insieme di piani duali, di quelli che hanno per sostegni le ∞^2 rette della stella O e per imagini le projettività projettanti da queste rette quella stessa omografia tra raggi. Questa omografia, possiamo ora dire, è l'imagine geometrica della retta duale; e non più una collineazione biassiale, come si aveva nel caso più generale. *La retta duale è ora caratterizzata dal giacere in un piano ordinario* ω, *od anche dal contenere un punto ordinario* O.

Non si ottiene nulla di diverso, se supponiamo che il punto comune a p, q sia ad esempio il 1^0 [punto] unito della projettività (p), e

(13) E saranno quelli i soli piani duali contenenti i due dati punti duali. Infatti un piano passante per questi avrà il 1^0 nucleo passante per i loro primi nuclei, cioè per la retta u_1, sicchè la retta sostegno del piano duale incontrerà u_1. Due piani omologhi qualunque (generici) nella projettività imagine del piano duale segheranno p, q, u_1 in due terne di punti corrispondentisi in Ω, e quindi saranno omologhi per questa collineazione, e la loro retta d'intersezione (sostegno del piano duale) sarà retta direttrice di Ω.

(14) Nel caso delle ordinarie rette imaginarie (di 2^a specie), e nell'altro delle projettività paraboliche, si ritrovan le collineazioni biassiali già introdotte dallo Staudt e dal Predella.

Analiticamente si giunge pure immediatamente alla collineazione Ω, se, indicati i due punti duali dati con $x + y\varepsilon$, $x' + y'\varepsilon$, si assumono come nuovi punti fondamentali delle coordinate i punti x, y, x', y'.

(15) Si tenga sempre presente che si tratta di omografie aventi tutte lo stesso birapporto k.

quindi non il 1^0 [punto] unito della (q), poichè i due punti duali si son presi linearmente indipendenti (n. 15). Allora, applicando il n. 18, si trova che il punto O, centro del fascio di raggi dianzi considerato, sarà il 2^0 punto unito della (q), e che l'omografia di questo fascio si avrà projettando (p) da O; a meno che il punto pq sia precisamente quel 2^0 [punto] unito O della (q), nel qual caso l'omografia del fascio O sarà definita dall'avere come 1^0 raggio unito q e come 2^0 p.

Se infine le rette p, q *coincidessero*, i punti duali della retta duale, quale s'è definita al n. 19, sarebbero gli ∞^2 punti duali di una stessa retta ordinaria. Diremo che in tal caso *la retta duale si riduce ad una retta ordinaria.*

Rappresentazione del campo binario duale sui punti di una quadrica.

22. Un modo ovvio per rappresentare gli ∞^2 punti duali di una retta duale coi punti ordinari di una quadrica consisterebbe nel ridursi, ad esempio con una projezione, al caso di una retta duale generale come quella del n. 20. I punti duali di una tal retta stanno rispettivamente sulle ∞^2 rette di una congruenza lineare (le generatrici della collineazione biassiale Ω); e basta riferire questa congruenza, in modo noto, ai punti di una quadrica ([16]).

Modificando lievemente questo concetto, prendiamo le due variabili duali omogenee λ, λ', che al n. 19 abbiamo assunto quali coordinate omogenee dei punti duali sulla retta duale (33). Posto

$$\lambda = z_1 + z_2\varepsilon, \quad \lambda' = z_3 + z_4\varepsilon,$$

il punto duale si potrà allora rappresentare col punto ordinario $(z_1 z_2 z_3 z_4)$: al quale però si dovrà (n. 19) riguardare come equivalente il punto $(z_1' z_2' z_3' z_4')$ se esiste un numero duale (non nullifico) $a+b\varepsilon$ tale che

$$\left\{\begin{aligned} z_1' + z_2'\varepsilon &= (a+b\varepsilon)(z_1+z_2\varepsilon) \\ z_3' + z_4'\varepsilon &= (a+b\varepsilon)(z_3+z_4\varepsilon) \end{aligned}\right. \tag{34}$$

ossia

$$\left\{\begin{aligned} z_1' &= az_1 + hbz_2 \\ z_2' &= bz_1 + (a+gb)\,z_2 \\ z_3' &= az_3 + hbz_4 \\ z_4' &= bz_3 + (a+gb)\,z_4 \,. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

([16]) Cfr. il lavoro citato in ([3]).

Queste formole dànno una collineazione biassiale (ad assi distinti o coincidenti), determinata, come la Ω del n. 20, dalle due omografie di birapporto k che essa subordina sulla retta $z_3 = z_4 = 0$ e sulla retta $z_1 = z_2 = 0$. In conseguenza al variar di a e b il punto z' scorre su una retta passante per z ed appartenente ad una congruenza lineare fissa. Possiamo assumere le rette di questa congruenza come imagini dei nostri punti duali.

23. Calcoliamo le coordinate $p_{ij} = z_i z'_j - z_j z'_i$ della retta che unisce z, z', applicando le formole (35). Divise per b (che è $\neq 0$ se quei punti son distinti), risultano:

$$
(36) \qquad \begin{cases} p_{12} = p_1, \quad p_{34} = p_2, \quad p_{14} = p_3, \quad p_{24} = p_4 \\ p_{13} = -hp_4, \quad p_{23} = -p_3 - gp_4, \end{cases}
$$

ove si pone

$$
(37) \qquad \begin{cases} p_1 = z_1^2 + gz_1z_2 - hz_2^2 \\ p_2 = z_3^2 + gz_3z_4 - hz_4^2 \\ p_3 = z_1z_3 + gz_1z_4 - hz_2z_4 \\ p_4 = z_2z_3 - z_1z_4 . \end{cases}
$$

Sostituendo le (36) nella nota relazione quadratica tra le 6 coordinate p_{ij}, si ha:

$$
(38) \qquad p_1p_2 - p_3^2 - gp_3p_4 + hp_4^2 = 0,
$$

equazione che si può anche verificare colla sola sostituzione delle (37), grazie a cui si riduce ad una identità nelle z.

Interpretando ora $p_1 \dots p_4$ come coordinate di *punto*, anzi che di retta, sostituiremo alla congruenza lineare di rette una quadrica F, rappresentata da quell'equazione (38), o dalle espressioni parametriche (37). Sui punti (ordinari) di questa quadrica saran rappresentati biunivocamente i punti duali della retta duale.

Formando, sull'equazione (38) (moltiplicata per 2), il discriminante di F, si trova Δ, quale è dato dalla (6):

$$
\Delta = g^2 + 4h .
$$

Sarà dunque F *un cono* se il campo duale è parabolico. Se g, h son reali, sarà F a punti reali ellittici se $\Delta < 0$, cioè se il campo duale è ellittico (n. 2); a punti iperbolici, se $\Delta > 0$, ossia se il campo è iperbolico.

24. Quali punti duali corrispondono ai punti di F posti su una stessa generatrice?

Mettiamo in evidenza le generatrici rettilinee di F scrivendo la (38) così:

$$p_1 p_2 = (p_3 + e_1 p_4)(p_3 + e_2 p_4) .$$

Una 1ª *schiera* di generatrici sarà rappresentata dalle due equazioni

$$(39) \qquad \begin{cases} p_1 = s(p_3 + e_2 p_4) \\ s p_2 = p_3 + e_1 p_4 , \end{cases}$$

ove s è un parametro, coordinata projettiva della generatrice entro quella schiera. Sostituiamo, ad esempio nella prima di queste equazioni, le espressioni (37) delle p, dopo d'avervi introdotto e_1, e_2 invece di g, h, per mezzo delle (4). Diventa:

$$(z_1 + e_1 z_2)(z_1 + e_2 z_2) = s(z_1 + e_2 z_2)(z_3 + e_1 z_4) ,$$

ossia (con una divisione che è permessa, finchè $\lambda = z_1 + z_2 \varepsilon$, $\lambda' = z_3 + z_4 \varepsilon$ non sono nullifici e quindi $z_1 + e_2 z_2 \neq 0$, $z_3 + e_1 z_4 \neq 0$)

$$(40) \qquad \frac{z_1 + e_1 z_2}{z_3 + e_1 z_4} = s .$$

Ora, per la nota (12), il 1º membro di questa relazione è il rapporto delle 2 coordinate omogenee che ha il 1º nucleo del punto duale (λ, λ'), sulla retta ordinaria che esso percorre. Dunque: *La rappresentazione della retta duale sulla quadrica* F *fa corrispondere projettivamente le generatrici della 1ª schiera di questa ai primi nuclei dei punti duali della retta duale: i punti di una stessa generatrice essendo imagini di quei punti duali che hanno lo stesso 1º nucleo* (17). Analogamente per la 2ª schiera.

Così, se il campo non è parabolico, l'attuale rappresentazione risulta equivalente alla ben nota rappresentazione delle coppie di punti (1º e 2º nucleo del punto duale) presi da due rette distinte, o coppie *ordinate* di punti di una stessa retta, sopra i punti di una quadrica: rappresentazione che si ottiene riferendo le due schiere di generatrici di questa rispettivamente a quelle due rette punteggiate (18).

---

(17) A ciò si giunge anche subito, senza calcoli, servendosi della congruenza lineare, com'è detto in principio del n. 22.

(18) Se la retta, di cui consideriamo gli ∞^2 punti duali, è una retta ordinaria, possiam sostituire quei punti colle ∞^2 omografie di birapporto k della retta. Appunto per tali omografie si trovano come imagini i punti di una quadrica, a p. 309 del *Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace avec application à l'étude des rotations sphériques*, par C. Stéphanos (Math. Ann., XXII, 1883, pp. 299-367).

25. Possiamo rappresentare i punti duali della retta duale con una sola variabile (coordinata non omogenea) duale $u + v\varepsilon$, cioè il rapporto delle due coordinate omogenee duali λ, λ':

$$u + v\varepsilon = \frac{z_1 + z_2\varepsilon}{z_3 + z_4\varepsilon}. \tag{41}$$

Moltiplicando ambi i membri di questa uguaglianza per $z_3 + z_4\varepsilon$, e poi confrontando i due membri e risolvendo rispetto a u, v, si trova

$$u = \frac{z_1 z_3 + g z_1 z_4 - h z_2 z_4}{z_3^2 + g z_3 z_4 - h z_4^2}$$

$$v = \frac{z_2 z_3 - z_1 z_4}{z_3^2 + g z_3 z_4 - h z_4^2},$$

ossia, in base alle (37),

$$u = \frac{p_3}{p_2}, \qquad v = \frac{p_4}{p_2}. \tag{42}$$

Dunque [19]: la variabile duale distesa sui punti $(p_1 p_2 p_3 p_4)$ della quadrica F è semplicemente

$$\frac{p_3 + \varepsilon p_4}{p_2}.$$

Projettando F sul piano $p_1 = 0$ dal punto fondamentale opposto, che sta su F (ed ha per piano tangente $p_2 = 0$), si viene a distendere la variabile duale su quel piano. Determinando i punti del piano colle tre coordinate omogenee $p_2 p_3 p_4$, od anzi coi due rapporti $u = p_3/p_2$, $v = p_4/p_2$ (coordinate non omogenee), il punto (u, v) viene ad essere precisamente l'imagine del numero duale $u + v\varepsilon$: *appunto come nella ordinaria rappresentazione sul piano dei numeri complessi* a + b i.

26. Se la retta, di cui consideriamo i punti duali, è ordinaria, otterremo due punti *coniugati* (n. 14) prendendo per coordinate non omogenee $u + v\varepsilon$, $u' + v'\varepsilon$ due valori coniugati, cioè (n. 6) tali che

$$u' = u + gv, \qquad v' = -v.$$

Ne segue, per le (42), indicando con p, p' i punti di F imagini di

---

(19) A questa espressione di $u + v\varepsilon$ mediante le p_i si giungerebbe anche, nel caso non parabolico, osservando che dalle (41), (40), e dalla 2ª delle (39) segue $u + e_1 v = (p_3 + e_1 p_4)/p_2$; e analogamente, mutando e_1 in e_2.

quei punti duali:

$$\frac{p_3'}{p_2'} = \frac{p_3}{p_2} + g\,\frac{p_4}{p_2}, \qquad \frac{p_4'}{p_2'} = -\frac{p_4}{p_2},$$

sicchè si potrà prendere:

$$p_1' = p_1, \quad p_2' = p_2, \quad p_3' = p_3 + gp_4, \quad p_4' = -p_4.$$

Si riconosce subito che questa corrispondenza tra i punti p, p' della quadrica (38) non è altro che l'omologia armonica, avente per piano d'omologia $p_4 = 0$ e per centro il suo polo rispetto ad F, cioè il punto $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $2p_3 + gp_4 = 0$.

I punti ordinari (coniugati di se stessi) han per imagini i punti di F che stanno sul piano $p_4 = 0$, vale a dire i punti di una conica (irriducibile) ([20]).

27. Se $g = h = 0$, cioè pei numeri duali parabolici, coll'unità ε tale che

$$\varepsilon^2 = 0,$$

la quadrica F definita dalla (38) si riduce al cono

(43) $$p_1 p_2 - p_3^2 = 0.$$

Quest'equazione, insieme colle (42), dà:

(44) $$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 = u^2 : 1 : u : v,$$

che sono precisamente le formole ottenute da J. GRÜNWALD (a p. 83 del lavoro citato nella nota ([2])), per rappresentare la variabile duale $u + v\varepsilon$, con $\varepsilon^2 = 0$, sul cono quadrico.

Se invece il campo binario duale è dato dalle due coordinate omogenee $z_1 + z_2\varepsilon$, $z_3 + z_4\varepsilon$, sempre con quella particolare unità, dalle (37) abbiamo, in luogo delle (44):

(45) $$p_1 = z_1^2, \quad p_2 = z_3^2, \quad p_3 = z_1 z_3, \quad p_4 = z_2 z_3 - z_1 z_4.$$

Si osservi che ai punti della retta duale aventi uno stesso nucleo (fissata cioè u, ossia $z_1 : z_3$) corrispondono i punti del cono situati in una stessa generatrice ($p_1 : p_2 : p_3$). Il vertice del cono ($p_1 = p_2 = p_3 = 0$) è un *punto eccezionale* per la nostra rappresentazione, non ha più per omologo un punto duale determinato: poichè un tal punto duale dovrebbe avere ∞ nuclei, e d'altronde avrebbe le due coordinate omogenee ridotte ai due nullifici $z_2\varepsilon$, $z_4\varepsilon$, il che è escluso nella definizione dei punti duali.

([20]) Anche la 4^a delle (37), se si pone $z_2 = 0$, $z_4 = 0$, per i punti ordinari, dà $p_4 = 0$.

Cenno sulla rappresentazione analoga pel campo ternario duale, ecc.

28. Il metodo con cui siam giunti alla rappresentazione del campo binario duale coi punti di una quadrica si estende facilmente a un numero qualunque di variabili duali. Però, se il campo di questi numeri duali *non è parabolico*, le varietà rappresentative che così si ottengono sono già note. Basta in fatti, in tale ipotesi, pensare i numeri duali espressi colle unità η_1, η_2 (n. 5), e quindi i punti duali come coppie (ordinate) di punti ordinari, per capire che si tratta allora semplicemente di rappresentare come singoli punti di una varietà le coppie di punti di due piani, o spazi. Si otterranno precisamente le varietà a cui già io ebbi ricorso per gli ordinari punti complessi del piano o spazio (21). Così, ad esempio, i punti duali di un piano duale vengono rappresentati dai punti di una V_4^6 di S_8, luogo di due schiere ∞^2 di piani, ecc. ecc.

29. Vediamo invece come *nel caso parabolico* la rappresentazione del campo ternario duale si faccia con una varietà, già introdotta a questo scopo dal sig. STUDY (22); la quale può riguardarsi come una degenerazione della V_4^6 ora ricordata, allo stesso modo come il cono quadrico al n. 27 era una degenerazione, pel caso parabolico, della quadrica F dei nⁱ precedenti.

Potremo anche qui ridurci all'unità ε tale che

$$\varepsilon^2 = 0\,,$$

e inoltre (per semplicità di enunciati) al caso che il piano dei punti duali sia un piano ordinario.

Procedendo come ai nⁱ 22, 23, rappresentiamo il punto duale $z + t\varepsilon$, di coordinate omogenee duali (nel piano)

$$z_1 + t_1\varepsilon\,, \quad z_2 + t_2\varepsilon\,, \quad z_3 + t_3\varepsilon\,,$$

col punto dello spazio S_5 che ha per coordinate omogenee $z_1 z_2 z_3\, t_1 t_2 t_3$; e quindi (stando al concetto di punto duale) anche col punto $(z'_1\, z'_2\, z'_3\;\, t'_1\, t'_2\, t'_3)$, se si ha

$$z'_i + t'_i\varepsilon = (a + b\varepsilon)\,(z_i + t_i\varepsilon)\,,$$

(21) *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, Rend. Palermo, 5, 1891, pp. 192-204 [V. queste «Opere», I, p. 173] — V. anche p. 421 della Memoria (3) [V. questo volume, p. 347].

(22) *Geometrie der Dynamen*, p. 367 e seg.ⁱ

ossia:

$$(46) \qquad z_i' = az_i, \qquad t_i' = bz_i + at_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Calcoliamo le 15 coordinate della retta di S_5 che unisce quei due punti $(z_i\, t_i)$, $(z_i'\, t_i')$, e quindi anche il 1^0 di essi con $(z_i' - az_i, t_i' - at_i)$ cioè, per le (46), con $(0\ 0\ 0\ z_1\ z_2\ z_3)$. Risultan 3 coordinate nulle, e poi:

$$p_{14} = z_1^2, \qquad p_{25} = z_2^2, \qquad p_{36} = z_3^2$$

$$p_{26} = p_{35} = z_2 z_3, \qquad p_{34} = p_{16} = z_3 z_1, \qquad p_{15} = p_{24} = z_1 z_2$$

$$p_{56} = t_2 z_3 - t_3 z_2, \qquad p_{64} = t_3 z_1 - t_1 z_3, \qquad p_{45} = t_1 z_2 - t_2 z_1 .$$

Indicando con $u_1\, u_2\, u_3$ le coordinate della retta ordinaria del dato piano, sulla quale sta il punto duale $z + t\varepsilon$, sicchè $u_1 = t_2 z_3 - t_3 z_2$, ecc., ed assumendo quelle quantità p_{ij} come coordinate omogenee di punti; otterremo per imagini dei punti duali $z + t\varepsilon$ i punti ordinari dello spazio S_8, aventi le coordinate $p_1 \dots p_9$ espresse nel seguente modo:

$$(47) \qquad p_1 = u_1, \qquad p_2 = u_2, \qquad p_3 = u_3$$

$$(48) \qquad p_4, p_5, \dots, p_9 = z_1^2, z_2^2, z_3^2, z_2 z_3, z_3 z_1, z_1 z_2$$

colla condizione

$$(49) \qquad z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3 = 0 .$$

30. Le formole (47), (48) rappresentano, coi parametri u_i, z_i, legati dalla (49), una varietà V_4 dello S_8, che è appunto quella citata dello STUDY. Si riconosce subito che il suo ordine è 6 ([23]). Vediamone anche la generazione geometrica, data da quello scienziato.

In S_8, sul piano fondamentale 123 (cioè piano i cui punti han nulle tutte le coordinate diverse da $p_1\, p_2\, p_3$), diciamo z la retta che ha per coordinate $z_1\, z_2\, z_3$, vale a dire per equazione la (49), in cui le u_i significhino, secondo le (47), coordinate di punto mobile. Poi, nello spazio S_5 fondamentale opposto $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, consideriamo i punti dati dalle (48) al variar di z. Essi costituiscono una superficie del 4^0 ordine F^4 di VERONESE, rappresentata nel modo noto

---

([23]) Basta in fatti cercare il numero delle soluzioni di 4 equazioni lineari omogenee tra le p_l, ove queste quantità siano espresse come sopra. Ora, se da 3 di quelle 4 equazioni si ricavano p_1, p_2, p_3 come forme lineari di $p_4 \dots p_9$, e si sostituiscono nella rimanente, non che nella (49) al posto di u_1, u_2, u_3; indi in luogo di $p_4 \dots p_9$ si mettono le espressioni (48); si ottengono due equazioni omogenee fra $z_1\, z_2\, z_3$, l'una di 2^o e l'altra di 3^o grado, e perciò 6 soluzioni.

Collo stesso procedimento si verifica che i punti della V_4 provenienti da $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ sono *doppi* per quella varietà.

sui punti z del piano dato, oppure, per una reciprocità fra questo e il piano 123, sulle rette z del piano 123. Le formole (47), (48) che definiscono, insieme colla (49), la nostra V_4^6, provano che ogni punto di essa sta sulla retta che congiunge un punto z di questa F^4 ad un punto u della retta z del piano 123; e quindi sta pure sul piano che unisce il punto z della F^4 a questa retta z. Dunque: *In* S_8 *sono dati un piano* S_2 *ed una* F^4 *di* VERONESE *(in un* S_5 *non incidente a quel piano). Si riferiscano in modo noto i punti di questa alle rette (non ai punti) di* S_2 *(cioè con corrispondenza biunivoca, tale che ad ogni sezione iperpiana della superficie corrispondano in* S_2 *le rette di un inviluppo di 2ª classe). Congiungendo ogni punto della* F^4 *colla retta omologa di* S_2 *si otterranno* ∞^2 *piani costituenti la* V_4^6 *di* STUDY.

31. Dal significato geometrico che hanno, nel piano dato, il punto z e la retta u, pel punto duale $z + t\varepsilon$, si trae subito quanto segue.

I punti della V situati su una stessa retta appoggiata allo S_2 ed alla F^4 son le imagini dei punti duali che hanno uno stesso nucleo ed una stessa retta sostegno. Invece i punti duali che han comune il solo nucleo han per imagini i punti di un piano generatore della V. Quelli che stanno su una stessa retta ordinaria son rappresentati sui punti di un cono quadrico, col vertice sullo S_2 (e projettante la conica di F^4, corrispondente a questo punto di S_2).

I punti della F^4, avendo nulle $p_1 p_2 p_3$, ossia $t_2 z_3 - t_3 z_2, \dots$, corrispondono a punti duali $z + t\varepsilon$, tali che i punti ordinari z e t coincidono: dunque a punti duali che si riducono a punti ordinari.

Invece i punti dello S_2 (*punti doppi* della V, come s'è detto ([23])) avendo nulle $z_1 z_2 z_3$, corrisponderebbero a terne $z_i + t_i\varepsilon$ ridotte a tre nullifici: non sono dunque imagini di punti duali del dato piano (cfr. la fine del n. 27).

32. Similmente, per rappresentare gli ∞^6 punti duali dello spazio ordinario, *nel caso parabolico*, si avrà la varietà a 6 dimensioni dello S_{15}, i cui punti han le 16 coordinate omogenee rappresentate parametricamente dalle 10 espressioni $z_i z_j\,(i, j = 1, \dots, 4)$ e dalle sei p_{ij} che son coordinate di una retta dello spazio, passante pel punto z. Ecc.

Protofili ed altre varietà analoghe. Legami lineari fra punti duali.

33. Come nell'ordinario campo di punti complessi si considerano quelle infinità di punti che io ho chiamato (v. nota ([3])) *fili* (∞^1), *tele*

(∞^2), ... ; così si può pur fare nel campo dei punti duali. Basterà assumere le coppie di componenti delle coordinate duali (non omogenee) funzioni (analitiche, o, se si vuole, algebriche, ecc.) di 1, 2, ... parametri ordinari. O, in altre parole, si assumeranno come imagini, sulle varietà rappresentative introdotte nei §§ precedenti (la quadrica F, la $V_4^6, \ldots$), i punti di una linea, o di una superficie, ecc.

Anzitutto, sulle rette duali, si potran considerare i *protofili (di 1ª o 2ª schiera)*, aventi per imagini sulla quadrica F (n. 23 e seg[i]) le generatrici rettilinee (rispettivamente della 1ª o 2ª schiera). Il n. 24 dice che: *Un protofilo della* 1ª *schiera (o* 2ª*) si compone di* ∞^1 *punti duali aventi in comune il* 1° *nucleo (od il* 2°*).*

Se stiamo ai protofili contenuti in una retta ordinaria, la proprietà ora enunciata basta a definirli sulla retta. Ogni tal protofilo contiene sempre un punto ordinario.

Prendasi invece un protofilo della 1ª schiera su una retta duale non ordinaria. Pensando alla rappresentazione dei punti duali con projettività rettilinee, e alla retta duale come collineazione biassiale (n. 20), oppure, nel caso del n. 21, come projettività in un fascio di rette; si vede che i punti del protofilo equivalgono alle ∞^1 *projettività che un'omologia piana (di birapporto* k*) definisce sulle rette passanti pel centro d'omologia*: questo centro è il 1^0 nucleo, comune a tutti i punti duali del protofilo. Se il campo non è parabolico, il 2^0 nucleo descrive l'asse d'omologia, e questo non passa pel centro. Se invece il campo è parabolico, l'asse d'omologia passa pel centro d'omologia.

34. Riconosciuto così il significato geometrico dei protofili, ne deriva subito che *gli* ∞^1 *punti di un protofilo son comuni ad infinite* (∞^2) *rette duali* (24).

In fatti, se il protofilo non sta su una retta ordinaria, esso definisce, come ora s'è detto, un'omologia piana, di centro A, asse a, in un piano ω. Quest'omologia è contenuta in ∞^2 collineazioni biassiali Ω. Esse hanno a per un asse. Se A non è su a, si può scegliere come secondo asse una retta generica per A. Se A sta su a (caso parabolico), si determina invece Ω, fissando i due piani per a che contengono le rette unite di Ω uscenti da due dati punti di a, diversi da A. D'altronde il protofilo dato sta anche sulle ∞^1 rette duali, della specie particolare del n. 21, che son rappresentate dalle ∞^1

(24) Cfr., pel caso parabolico, PREDELLA, Nota I, n. 15.

projettività che la data omologia piana subordina entro ai fasci di rette di ω aventi i centri su a.

Se invece il protofilo sta su una retta ordinaria r, e sia per es. un protofilo della 1ª schiera, si riconosce, in base al n. 18, che tutti i suoi punti duali giaceranno in ogni retta duale rappresentata da una projettività (di birapporto k) di un fascio di raggi avente il centro nel 1º nucleo comune a tutti quei punti, e per 2º raggio unito la r. Risultano anche allora ∞^2 rette duali contenenti quel protofilo.

35. Colla locuzione «*protofilo*» l'osservazione del n. 15 si può enunciare così: *Due punti duali legati linearmente sono due punti di uno stesso protofilo.* E dai n[i] 20, 21, 34 si ha che: *Se due rette duali distinte han comune più di un punto duale, i punti duali comuni costituiranno un protofilo.*

Si può vedere ciò anche nel seguente modo. Consideriamo, anche in questo campo, come 6 coordinate della retta duale che unisce due punti duali ξ, ξ', i determinanti

$$\varrho_{ij} = \xi_i \xi'_j - \xi_j \xi'_i .$$

La retta non è determinata se queste espressioni si riducono a nullifici di una stessa schiera: vale a dire se, mettendovi al posto di ε il numero e_1, od e_2, esse si annullano. Ciò significa che, col cambiamento di ε ad es. in e_1, le ξ_i e le ξ'_i diventano due quaterne di numeri proporzionali. Ma con quella sostituzione si ottengono (n[i] 8 e 11) le coordinate dei primi nuclei di ξ, ξ'. Dunque l'indeterminazione della retta duale di ξ e ξ' significa che coincidono per es. i primi nuclei di questi punti duali, cioé che ξ e ξ' stanno in uno stesso protofilo.

36. Domandiamo, analogamente al n. 15, il significato di un legame lineare fra $n\,(=3, 4)$ punti duali $\xi, \xi', \xi'', \ldots$, cioè

$$\alpha\xi_i + \alpha'\xi'_i + \alpha''\xi''_i + \ldots = 0 \tag{50}$$

$(i = 1, \ldots, 4)$, coi coefficienti $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ non tutti nulli. Supponiamo anzi, per semplicità, che non vi sia già un tal legame lineare fra $n-1$ di quei punti.

Se uno almeno dei coefficienti, per es. α, non è un nullifico, dividendo per esso le (50) si avrà che ξ è una combinazione lineare di $\xi', \xi'', \ldots$; cioè uno dei dati punti duali sta sulla retta duale, o piano duale, che congiunge i rimanenti.

Escludiamo questo caso. Allora i coefficienti $\alpha, \alpha', \ldots$ saran tutti nullifici. Dico che saranno nullifici di una stessa schiera. Se no, riunendo nella (50) in un solo i termini per cui i coefficienti son nullifici della 1ª schiera, e in un altro quelli per cui sono della 2ª schiera (col mettere in evidenza ad es. nei primi il fattore η_1, negli altri η_2), si verrebbe a scrivere un legame lineare tra *due* punti duali, con due coefficienti (η_1, η_2) che non sarebbero nullifici della stessa schiera: e quindi, pel n. 15, quei due punti coinciderebbero. Ora si vede subito che questo fatto equivarrebbe a ciò che già abbiamo escluso: che uno dei punti duali dati stia sulla retta duale, o piano duale determinato dagli altri.

Sian dunque α, α', ... nullifici, ad esempio, della 1ª schiera, e quindi uguali ad $a\,\eta_1$, $a'\,\eta_1$, ..., ove a, a', ... son quantità ordinarie. La (50), con questa sostituzione, viene a dire che le quantità duali

$$a\xi_i + a'\xi_i' + a''\xi_i'' + \ldots$$

son nullifici della 2ª schiera; ossia s'annullano, ponendo in esse e_2 al posto di ε Così, analogamente al n. 15, concludiamo: *Un legame lineare* (50) *fra tre o quattro punti duali (senza che sian legati linearmente una parte di essi) significa: che sono legati linearmente (cioè rispettivamente: allineati, o complanari) i primi nuclei di quei punti duali; ovvero i secondi nuclei.*

37. Quando un piano duale si assoggetta a passare per due, o tre punti duali dati, ognuna delle equazioni lineari omogenee, che si vengono a scrivere per le coordinate duali del piano stesso, si spezza in due equazioni ordinarie fra le quantità ordinarie, componenti di quelle coordinate. Ma le 4 o 6 equazioni ordinarie così ottenute equivalgono ad un minor numero, se i 2 o 3 punti duali son legati linearmente.

È così che per due punti duali aventi a comune il 1^0 (o 2^0) nucleo, cioè situati in uno stesso protofilo, non passano solo ∞^2 piani duali, ma bensì ∞^3. Sono, nel caso che i due punti duali non stiano in una stessa retta ordinaria, i piani duali, che hanno per sostegno una qualunque retta appoggiata all'asse a dell'omologia piana del n. 34, e che projettano da una tal retta l'un punto duale e quindi anche l'altro. Questi ∞^3 piani duali passano per tutto il protofilo che contiene questi due punti; i piani ordinari che sono i loro secondi nuclei passano per la retta fissa a.

38. Diamo invece tre punti duali legati linearmente, cioè (n. 36) tali che, ad esempio, i loro primi nuclei siano allineati su una retta ordinaria a, senz'altra particolarità. Essi non individueranno più un piano duale.

Siano p, q, r le rette ordinarie (appoggiate ad a) sostegni dei tre punti duali, ossia delle projettività (p), (q), (r) che li rappresentano. In queste projettività ai punti d'incontro di p, q, r con una retta, ad esse incidente, diversa da a, corrisponderanno 3 punti complanari con un punto O di a. Nella stella O le omografie di fasci di raggi, ottenute proiettando le (p), (q), (r), si potran riguardare come definite dall'avere per birapporto k, come 1^0 elemento unito a, e per raggi omologhi le tracce sui 3 fasci di due determinati piani della stella. In conseguenza esse saran contenute in una stessa omologia della stella, avente per asse la a, e un piano d'omologia ω che conterrà i secondi elementi uniti delle dette omografie, ossia i secondi nuclei dei tre punti duali dati (e passerà quindi per a, se siamo in un campo parabolico). Da ogni retta ordinaria m del fascio $O\omega$ si projetteranno le 3 projettività (p), (q), (r) mediante una stessa omografia del fascio di piani m; vale a dire i tre punti duali dati staranno in uno stesso piano duale di asse m.

Mutando m nel fascio $O\omega$ abbiamo ∞^1 piani duali passanti per quei tre punti duali. È chiaro, pel modo come sono rappresentati, che essi formano l'ente geometrico che, per una ordinaria reciprocità o legge di dualità, corrisponde agli ∞^1 punti duali di un protofilo. E come di questi s'era detto (vedi fine del numero preced.) che stanno in ∞^3 piani duali; così quegli ∞^1 piani duali hanno in comune a due a due, non solo ∞^2 punti duali, cioè una retta duale, ma bensì una ∞^3 di punti duali determinata dai tre dati: sì che su ogni retta ordinaria appoggiata ad a sta uno di quei punti.

Per combinazione lineare (con coefficienti duali) di due punti duali aventi in comune il 1^0 (o 2^0) nucleo, non si ottengono tutti i punti duali di una retta duale, ma solo quelli di un protofilo. Similmente, per combinazione lineare di tre punti duali aventi i primi (o secondi) nuclei allineati, si ottengono non già gli ∞^4 punti duali di un piano duale, ma solo ∞^3 punti duali, disposti in generale nel modo anzidetto, e comuni ad ∞^1 piani duali.

39. Altri casi più particolari di eccezioni, indeterminazioni, ecc., nella Geometria lineare, si posson presentare. Citiamo solo il caso che sian dati tre punti duali, legati linearmente fra loro a due a due, pel fatto di aver comune il 1^0 nucleo O, senza ulteriori particolarità. Allora le tre omografie rettilinee (p), (q), (r) che li rappresentano stanno in una determinata omologia spaziale di centro O. Le ∞^2 projettività che questa subordina sulle rette ordinarie passanti per O, dànno i punti duali che son combinazioni lineari dei tre dati; essi

risultano ora ∞^2, anzi che ∞^4 come nel caso generale, e ∞^3 come nel caso del numero precedente. Le ∞^2 rette ordinarie del piano d'omologia son sostegni dei piani duali passanti pei tre punti duali dati (e quindi per tutta quella ∞^2): i quali piani sono ora ∞^2, anzi che uno solo come s'avrebbe se quei tre punti fossero generici, od ∞^1 come avveniva nel caso del n. 38.

Se il campo duale è parabolico, l'ente così ottenuto, di ∞^2 punti duali e ∞^2 piani duali, può riguardarsi come una *degenerazione della retta duale*, nel senso in cui l'omologia solida *speciale*, ossia *parabolica*, può considerarsi come degenerazione della collineazione biassiale ad assi coincidenti. Non così, se il campo non è parabolico.

Projettività e antiprojettività nel campo duale.

40. Si ponga, fra le coordinate omogenee di due punti duali variabili ξ, ξ', una sostituzione lineare a coefficienti duali

$$\xi_i' = \sum_j \alpha_{ij}\, \xi_j\,. \tag{51}$$

Si avrà una *collineazione duale* tra due spazi. Questa corrispondenza godrà di proprietà analoghe a quelle delle ordinarie collineazioni. Così essa muterà *in generale* le rette duali ed i piani duali in rette duali e piani duali; i gruppi armonici in gruppi armonici; ecc.

Ma le collineazioni duali non trasformeranno in generale, come le collineazioni ordinarie, i punti ordinari in punti ordinari, ecc. Esse dipendono da un numero di parametri ordinari doppio di quello delle collineazioni ordinarie. Si riducono a queste ultime (ampliate coll'applicarle anche agli elementi duali), quando i coefficienti α_{ij} della sostituzione si riducono a numeri ordinari.

Una proprietà, che si prova per le collineazioni duali come l'analoga per quelle ordinarie, è quella di lasciare invariato il *birapporto duale*. Se cioè su una retta duale s'introduce una coordinata duale non omogenea, intendiamo per *birapporto di* 4 *punti duali della retta* quello delle loro 4 coordinate $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, vale a dire

$$(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}\,.$$

Quando il campo duale non è parabolico, ponendo (n. 5) $\alpha = a_1\,\eta_1 + a_2\,\eta_2$, ecc., quel birapporto duale risulta uguale a

$$(a_1\, b_1\, c_1\, d_1)\, \eta_1 + (a_2\, b_2\, c_2\, d_2)\, \eta_2\,;$$

ossia è dato da due birapporti ordinari, quello dei primi nuclei e quello dei secondi nuclei, dei 4 punti duali. Se invece il campo è parabolico, si trova che, oltre al birapporto dei 4 nuclei vi è da considerare un altro numero ordinario, la cui definizione è meno immediata ([25]).

41. Come nella ordinaria geometria complessa ([26]), così nel campo attuale si potranno anche introdurre le *anticollineazioni duali*. Esse si definiscono, ponendo che le coordinate del punto duale ξ' siano date forme lineari dei numeri duali *coniugati* (n. 6) alle coordinate del punto duale ξ: cioè ponendo una collineazione duale tra i punti ξ' ed i coniugati (n. 14) dei punti ξ (o viceversa).

Per queste corrispondenze varranno in parte le proprietà accennate (n. 40) delle collineazioni duali. Ma, ad esempio, non saranno più invarianti per esse i birapporti duali: essi si mutano nei numeri duali coniugati.

Analogamente si definiranno le *reciprocità duali* e le *antireciprocità duali*. Le riuniamo alle corrispondenze precedenti, coi due nomi di *projettività duali* e *antiprojettività duali*.

42. Sostituendo nelle equazioni che, come le (51), dànno quelle varie corrispondenze, al posto di ε la quantità ordinaria e_1 od e_2, si vede che, per esempio, una collineazione duale determina una collineazione ordinaria tra i primi nuclei dei punti duali omologhi, ed una collineazione ordinaria tra i secondi nuclei. Invece un'anticollineazione duale, di cui siano ξ, ξ' i punti duali omologhi, pone (v. la fine del n. 14) una collineazione ordinaria tra i primi nuclei dei ξ ed i secondi nuclei dei ξ', ed una pure tra i secondi nuclei dei ξ ed i primi nuclei dei ξ'.

Se il campo duale non è parabolico, ciò definisce completamente le collineazioni duali, come anche le anticollineazioni duali.

43. Rappresentiamo il campo dei punti duali di una retta, ordinaria o duale, su una quadrica F, come ai n^i. 23 e 24. Una projettività duale di quella retta porrà una projettività ordinaria tra le generatrici della 1^a schiera di F, ed una tra le generatrici della 2^a schiera. Se dunque non siamo nel caso parabolico, le ∞^6 projettività

([25]) Cfr. STUDY, *Geometrie der Dynamen*, p. 241 e seg.; GRÜNWALD (citato in ([2])), p. 99 e seg.; PREDELLA, Nota I, n.^{i} 38 e seg., Nota II, n.^{i} 87, 88.

([26]) V. oltre la Mem.^{a} cit.^{a} in ([3]) le 4 Note su *Un nuovo campo di ricerche geometriche*, negli Atti Acc. Torino, XXV e XXVI, 1890 [V. questo volume, p. 237].

duali della retta saran rappresentate dalle ∞^6 collineazioni *di* 1ª *specie* di F in sè. Le ∞^6 collineazioni *di* 2ª *specie*, cioè quelle che scambiano tra loro le due schiere di generatrici, saranno invece le imagini delle antiprojettività duali della retta.

Nel campo dei numeri parabolici non si può più dire così. Ed in fatti, quando la quadrica è un cono, le collineazioni che la trasformano in sè salgono a ∞^7, mentre ancora rimangono ∞^6 le projettività e antiprojettività duali della retta.

Cerchiamo, appunto nel caso parabolico, la rappresentazione analitica delle ∞^6 trasformazioni del cono quadrico F, corrispondenti a queste projettività e antiprojettività duali. Indichiamo, come al n. 22, con

$$z_1 + z_2 \varepsilon, \qquad z_3 + z_4 \varepsilon$$

le due coordinate omogenee duali dei punti duali della retta, ove ora supporremo

$$\varepsilon^2 = 0 .$$

La sostituzione lineare, o projettività, duale sarà:

$$\left\{\begin{aligned} z_1' + z_2' \varepsilon &= (a_1 + b_1 \varepsilon)(z_1 + z_2 \varepsilon) + (a_2 + b_2 \varepsilon)(z_3 + z_4 \varepsilon) \\ z_3' + z_4' \varepsilon &= (a_3 + b_3 \varepsilon)(z_1 + z_2 \varepsilon) + (a_4 + b_4 \varepsilon)(z_3 + z_4 \varepsilon) \end{aligned}\right. \tag{52}$$

donde si trae

$$\left\{\begin{aligned} z_1' &= a_1 z_1 + a_2 z_3 \\ z_3' &= a_3 z_1 + a_4 z_3 \\ z_2' &= b_1 z_1 + a_1 z_2 + b_2 z_3 + a_2 z_4 \\ z_4' &= b_3 z_1 + a_3 z_2 + b_4 z_3 + a_4 z_4. \end{aligned}\right. \tag{53}$$

(Le prime due formole di questa quaterna dànno la trasformazione projettiva ordinaria che subiscono i nuclei $(z_1 z_3)$ dei punti duali). Formando ora, per mezzo delle formole (45), le coordinate dei punti p, p' del cono F, che sono imagini dei due punti duali fra loro omologhi sulla retta data, e sostituendo nelle espressioni delle p_i' le (53), si ha:

$$\left\{\begin{aligned} p_1' &= a_1^2 p_1 + a_2^2 p_2 + 2 a_1 a_2 p_3 \\ p_2' &= a_3^2 p_1 + a_4^2 p_2 + 2 a_3 a_4 p_3 \\ p_3' &= a_1 a_3 p_1 + a_2 a_4 p_2 + (a_1 a_4 + a_2 a_3) p_3 \\ p_4' &= (13) p_1 + (24) p_2 + [(14) + (23)] p_3 + A p_4 , \end{aligned}\right. \tag{54}$$

ove si è posto

(55) $(ij) = b_i a_j - b_j a_i, \qquad A = a_1 a_4 - a_2 a_3$ [27].

Le (54) rappresentano una collineazione che muta F in sè. Essa dipende dalle 2 quaterne di parametri a e b. Ma dividendo i secondi membri per a_4^2, si mettono in evidenza come 6 parametri essenziali i 3 rapporti delle a, ed i 3 primi coefficienti della quarta equazione.

Queste ∞^6 collineazioni del cono son le imagini delle projettività duali della retta. Quanto alle antiprojettività, si ricordi (n^i 26, 27) che due punti duali coniugati (di una retta ordinaria) hanno per imagini due punti p di F differenti solo pel segno della p_4 (ossia corrispondenti in una determinata omologia armonica che ha per centro il vertice del cono). Basta dunque, per avere le collineazioni imagini delle antiprojettività duali della retta, che nelle (54) si cambi la A, che compare nella quarta, in $-A$.

44. È facile caratterizzare geometricamente il gruppo G_6 di collineazioni, che abbiamo rappresentato colle equazioni (54).

Trasformiamo con una reciprocità, o legge di dualità nello spazio: sì che il cono F si muti nel cerchio imaginario all'infinito. Il gruppo di tutte le ∞^7 omografie che trasformano questo cerchio in sè è il gruppo delle similitudini. Entro esso, com'è noto [28], esiste un solo sottogruppo G_6 che non tenga fisso un punto del cerchio: è il G_6 dei movimenti. Sarà dunque questo l'omologo del G_6 projettivo di prima. *Le projettività duali della retta si rispecchiano nei movimenti dello spazio, quando si assumano come imagini dei punti duali della retta* (*in luogo dei punti di* F) *i piani tangenti al cerchio assoluto* [29].

Ora i moti dello spazio si possono ottenere come prodotti di rotazioni intorno a rette, ed ogni tal rotazione si può scomporre nel prodotto di due simmetrie rispetto a piani per l'asse: sicchè ogni moto è il prodotto di un numero pari di simmetrie rispetto a piani. Considerando queste simmetrie come omologie armoniche, e ritornando poi, con passaggio inverso, al primitivo cono quadrico F, con-

---

[27] Nella Mem.a cit.a del GRÜNWALD, che studia a fondo la rappresentazione del campo binario duale parabolico sul cono quadrico, si trovano le formole (54), a p. 90.

[28] V. LIE (und ENGEL), *Theorie der Transformationsgruppen*, III. Band, 1893, pp. 214 e 218.

[29] Cfr. GRÜNWALD, p. 109.

cludiamo: *Il gruppo* G_6 *delle collineazioni del cono quadrico* F, *che sono imagini delle projettività duali della retta, si compone di quelle collineazioni che son prodotti di un numero pari di omologie armoniche trasformanti* F *in sè, vale a dire projezioni del cono su se stesso da punti esterni.*

Ed ora subito possiamo dire (cfr. la fine del numero precedente): *Le antiprojettività duali della retta hanno per imagini quelle collineazioni del cono quadrico che si possono ottenere come prodotti di un numero impari di projezioni* [30]. — Nello spazio euclideo di poc'anzi si avrebbe così un numero dispari di simmetrie rispetto a piani: e quindi, come imagini delle antiprojettività duali della retta, le *uguaglianze inverse* o *movimenti di 2ª specie.*

Infine osserviamo che, se la data retta è ordinaria, le ∞^3 projettività e antiprojettività ordinarie saranno rappresentate da quelle fra le collineazioni considerate, che tengon fisso il piano $p_4 = 0$ (cfr. la fine del n. 26).

Avvertenze finali.

45. A questo punto credo bene di troncare la trattazione che già è riuscita fin troppo lunga. Aggiungerò solo poche osservazioni.

Anzitutto, chi confronti le cose precedenti con quelle di altri miei lavori citati, vedrà subito come in questa *Geometria duale* si potrebbero continuare le ricerche parallele a quelle dell'ordinaria Geometria complessa: ad esempio, trattando le projettività e antiprojettività duali che riescono *involutorie*; i luoghi dei punti duali uniti; gli enti analoghi alle *catene*, alle *iperconiche* ed *iperquadriche*, ecc., e le intersezioni di questi enti; come pure le questioni generali sulle varietà di punti duali (cfr. il principio del n. 33), e l'ampliamento che si può fare delle ordinarie curve, superficie, ecc., coll'aggiungere ai loro punti ordinari altri punti duali [31].

Se il campo di numeri duali non è parabolico, si otterrà una sorta di *geometria delle coppie di punti ordinari* (cfr. n. 11 e altrove). Molte cose, ma non tutte, coincideranno allora, in sostanza,

---

(30) Le ultime due proposizioni valgono pure nel caso non parabolico, poichè, com'è ben noto, ogni trasformazione collineare in sè di una quadrica, *che non sia un cono*, è un prodotto di projezioni (in numero pari o dispari, secondo che la collineazione è di 1ª o di 2ª specie).

(31) Esempio di ciò si ha, per le coniche ordinarie, in PREDELLA, Nota I, n.i 46, 47; e poi per curve qualunque nella Nota II, n.i 80 e seg.i.

colla citata geometria complessa ordinaria, ove s'introducano anche quelli che ho chiamato *punti bicomplessi* (che si posson rappresentare come coppie ordinate di punti complessi).

Non così se il campo è parabolico. Allora s'incontreranno differenze più profonde. Non sempre vengon facilmente le proprietà relative al caso parabolico come limite di quelle del caso generale delle coppie di punti. Quindi si capisce che la geometria duale parabolica, come l'algebra dei corrispondenti numeri duali, abbia un'importanza a sè. La rappresentazione geometrica dei punti duali, che in quel caso fa il PREDELLA colle projettività rettilinee paraboliche, acquista perciò un interesse speciale ([32]).

46. D'altra parte è pur d'uopo rilevare come alcune delle ricerche di cui si parla nel presente lavoro si trovino già avviate o svolte, sotto un'apparenza un po' diversa, in quelli del sig. STUDY e di alcuni suoi discepoli ([33]).

Si prendano, in un campo duale ternario, le tre coordinate omogenee

$$\xi_1 = x_1 + y_1 \varepsilon, \qquad \xi_2 = x_2 + y_2 \varepsilon, \qquad \xi_3 = x_3 + y_3 \varepsilon.$$

Esse si posson moltiplicare per un fattore duale $a + b\varepsilon$, e così si trasformano in $x'_i + y'_i \varepsilon$, ove le x', y' son date dalle (18) del n. 7. Ciò posto, s'interpretino le 6 quantità $x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3$ come coordinate omogenee di un complesso lineare di rette, nello spazio ordinario. Il concetto di *punto duale* di un dato piano riuscirà rappresentato da quel complesso lineare, anzi da tutto *un fascio di complessi lineari* (rappresentati dalle $x'_i\, y'_i$, col parametro variabile $a:b$).

([32]) Prima di finire, sarà bene avvertire che il sig. PREDELLA è giunto alle sue projettività paraboliche, cercando le imagini geometriche dei numeri non-Archimedei. Quando si trattano i numeri duali parabolici $a + b\varepsilon$ (ove a e b sian reali) con $\varepsilon^2 = 0$, vien naturale di chiamare ε un *infinitesimo* (attuale), rispetto all'unità ordinaria, in quanto che le sue potenze superiori alla 1ª sono $= 0$. Così quei numeri $a + b\varepsilon$ appaiono come *non-Archimedei*.

([33]) V. specialmente, oltre la *Geometrie der Dynamen*, e lo scritto del GRÜNWALD citato in ([2]), le seguenti tre Dissertazioni:

J. COOLIDGE, *Die dual-projektive Geometrie im elliptischen und sphärischen Raume*, Greifswald, 1904.

E. DAVIS, *Die geometrische Addition der Stäbe in der hyperbolischen Geometrie*, Greifswald, 1904.

H. BECK, *Die Strahlenketten im hyperbolischen Raume*, Hannover, 1905.

Si può anche consultare con vantaggio l'esposizione che il sig. G. FANO fa delle ricerche dello STUDY a pp. 325-339 della *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, III 1, Heft 2, 1907.

In particolare si avrà come imagine la *coppia di rette* che sono gli assi dei due complessi speciali del fascio: rette che risultano fra loro *polari rispetto ad una quadrica fissa* (da assumersi come *assoluto*: ellittico, iperbolico, parabolico, secondo la specie dei numeri duali).

È appunto in questo modo che, prima lo STUDY, e poi gli altri Autori citati furon condotti a rappresentare il campo delle coordinate omogenee duali, per mezzo della Geometria delle rette e dei complessi lineari: sicchè i *punti duali* (di un piano), che io ho trattato qui direttamente, o per mezzo della rappresentazione con omografie rettilinee (di dato birapporto), sono sostituiti in quei lavori da *raggi* dello spazio ordinario, o da fasci convenienti di complessi lineari, ecc. ([34]). Per questi enti geometrici vengono considerate le *collineazioni e anticollineazioni duali*, come pure le *catene* a cui alludevo nel n. prec., taluni *fili* (n. 33), ecc. ecc. — Chi volesse proseguire nell'indirizzo da me tracciato, dovrebbe cominciare col tradurre in proposizioni sui *punti duali* quelle che in STUDY e negli altri compaiono come proposizioni sui *raggi*, ecc.

In questa traduzione si dovrà tener conto della differenza, dipendente dai gruppi di trasformazioni che sono a fondamento: poichè, mentre io ho considerato le cose dal lato *projettivo*, quegli Autori trattano varie sorta di geometrie *metriche* (euclidee e non-euclidee).

Il raffronto indicato porterà anche, seguendo gli esempi notevoli dati dallo STUDY, e continuati poi dalla sua scuola, a ricercare il modo di *render chiuso*, nel caso parabolico, l'aggregato dei nostri punti duali coll'aggiungergli altri enti convenienti. Il fatto che, nel detto caso, quell'aggregato non è chiuso è legato all'altro: che nella definizione (n. 7) dei punti duali si son dovuti escludere quei gruppi di valori delle coordinate omogenee, che son nullifici di una stessa schiera ([35]).

([34]) Nel caso dei numeri duali parabolici, del quale principalmente si occupa lo STUDY (appunto in causa dell'importanza sua speciale), si ottiene nell'ordinario spazio euclideo un fascio di complessi lineari coassiali. — Nell'Appendice alla *Geometrie der Dynamen* (v. p. 557 e seg.i) si prendono poi *quattro* variabili duali omogenee come coordinate di un «*Soma*», ossia una delle ∞^6 posizioni di un corpo rigido: sicchè questo ente fornisce una rappresentazione geometrica, diversa dalla nostra, dei punti duali *dello spazio*.

([35]) Si terrà presente che appunto da ciò provenivano gli elementi *eccezionali*, nelle rappresentazioni geometriche dei campi di punti duali parabolici, rilevati alla fine dei n.i 27 e 31.