Corrado Segre

Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi

Rend. Circolo Mat. Palermo, Vol. **30** (1910), p. 87–121

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 71–114

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_71>

XXVII.

PRELIMINARI DI UNA TEORIA DELLE VARIETÀ LUOGHI DI SPAZI

«Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo»,
tomo XXX, 1910, 2º semestre, pp. 87-121.

Le ricerche qui esposte considerano, entro uno spazio qualunque S_n [1], una varietà infinita di spazi S_k $(k \geq 0)$; la quale non ha da essere necessariamente algebrica, e nemmeno analitica, ma solo deve soddisfare alle prime condizioni di continuità e di esistenza di derivate, come risulterà tosto. Per una tale varietà si studiano le prime questioni relative a spazi tangenti, all'incidenza di spazi infinitamente vicini, etc.: in particolare si esaminano alcuni diversi modi che si posson tenere per estendere alle varietà l'ordinario concetto di rigata sviluppabile.

Sono, come si vede, *questioni projettive appartenenti alla geometria differenziale degl'iperspazi.* Quantunque esse si presentino spontaneamente, non credo che siano state finora trattate, almeno con qualche ampiezza.

Dovendo spesso mettere sotto forma analitica il fatto che alcuni punti stanno in spazi assegnati, o son legati fra loro linearmente, adotterò la seguente abbreviazione. Se i simboli $A, B, \ldots$ rappresentano punti, un'equazione lineare omogenea, a coefficienti numerici, tra quei simboli, per esempio

$$(*) \qquad \alpha A + \beta B + \ldots = 0\,,$$

---

[1] S'intende che «*spazio*» significa per noi: varietà *lineare*. Indicheremo sempre con n la dimensione dello spazio ambiente. Uno spazio di dimensione k s'indicherà indifferentemente con S_k, oppure con $[k]$.

significherà che l'equazione stessa è verificata dalle coordinate omologhe (sempre adopreremo coordinate *omogenee*) di quei punti. Se cioè sono a_i, b_i, ... le coordinate ($i = 0, 1, \ldots, n$), sarà

$$\alpha\, a_i + \beta\, b_i + \ldots = 0$$

per ogni valor di i [2].

§ 1.

Varietà ∞^1 di spazi.

1. Consideriamo anzitutto una *semplice infinità* di spazi S_k, con $k < n - 1$. Siano gli spazi determinati dai $k + 1$ punti $A_0 A_1 \ldots A_k$, funzioni di un parametro variabile t.

La varietà V_{k+1}, o brevemente V, di dimensione $k + 1$, costituita da quegli spazi, sarà il luogo del punto

$$X = \Sigma\, u_\lambda\, A_\lambda \tag{1}$$

(estesa la somma, qui e nel seguito, a $\lambda = 0, 1, \ldots, k$), al variare di t e delle u_λ, che sono le $k + 1$ coordinate omogenee di X sopra lo spazio generatore G corrispondente ad un dato t.

Si otterrà una linea (direttrice) su quella varietà prendendo nella (1) le u_λ funzioni di t. Indicandone con u'_λ le derivate prime, la retta tangente in un punto X a quella linea sarà la congiungente del punto stesso col suo *derivato* rispetto a t [3], cioè

$$X' = \Sigma\, u'_\lambda\, A_\lambda + \Sigma\, u_\lambda\, A'_\lambda\,. \tag{2}$$

Fissato X, cioè fissati i valori di t e delle u_λ, al variare della linea passante per X (e quindi dei corrispondenti valori delle u'_λ) il punto X' descriverà lo spazio dei $k + 1$ punti A_λ e del punto

$$Y = \Sigma\, u_\lambda\, A'_\lambda\,. \tag{3}$$

Lo spazio luogo delle rette tangenti in X alla varietà V, vale a dire *lo spazio tangente* (in senso ristretto) a V in X, è dunque quello S_{k+1}

---

(2) È come dire che i simboli $A, B, \ldots$ si possono interpretare come i primi membri delle equazioni-inviluppo dei punti stessi, cioè $\Sigma_i\, a_i\, \xi_i$, $\Sigma_i\, b_i\, \xi_i$, ... Allora l'uguaglianza (*) si può interpretare come un'identità rispetto alle ξ.

(3) S'intende che *derivato* di un punto X od $A, \ldots$, funzione di un parametro, significherà il punto che ha per coordinate le 1e derivate delle coordinate di X od A (derivate che generalmente si supporrà non diventino nulle tutte insieme).

che in generale unisce lo S_k generatore G al punto Y definito dalla (3).

Facciamo ora variare X su G, cioè facciamo variare le u_λ, restando fisso t. Allora Y descriverà lo spazio dei punti A'_λ; e quindi lo S_{k+1} tangente in X genererà lo spazio che congiunge i punti A e A'. Questo spazio si dirà *tangente a* V *lungo lo spazio generatore* G. Esso avrà la dimensione $2k+1$, se i $2k+2$ punti A e A' son linearmente indipendenti, il che esige che sia $2k+1 \leq n$. In ogni caso la sua dimensione sarà $2k-l+1$, indicando con l il numero dei sistemi linearmente indipendenti di valori delle quantità u_λ, w_λ tali che

$$\Sigma\, w_\lambda A_\lambda + \Sigma\, u_\lambda A'_\lambda = 0. \tag{4}$$

2. Lo S_k generatore $(t+dt)$ infinitamente vicino a quello $G(t)$ dei punti $A_\lambda(t)$ è lo spazio dei punti $A_\lambda(t+dt)$, cioè $A_\lambda + A'_\lambda \cdot dt$. Lo spazio che congiunge i due spazi generatori infinitamente vicini coincide dunque collo spazio tangente a V lungo G, che dianzi si ottenne precisamente come congiungente i punti A_λ e A'_λ. Se poi il punto X di G dato da (1) si può riguardare come contenuto anche nello spazio generatore successivo $(t+dt)$, vorrà dire che esiston delle quantità ϱ e w_λ tali che

$$\Sigma\, u_\lambda A_\lambda = \varrho\, \Sigma\, (u_\lambda + w_\lambda\, dt)\,(A_\lambda + A'_\lambda\, dt).$$

Di qui si trae: $\varrho = 1$, e poi di nuovo la (4).

Diremo che sono *punti singolari* o *fochi* dello spazio generatore G quei punti X che possono considerarsi come situati anche sullo spazio generatore successivo: il che equivarrà a dire che corrispondono a valori delle u_λ, a cui si posson associare tali w_λ da verificare la (4). Quest'eguaglianza dice che il punto Y dato da (3) sta su G. Per conseguenza, in un tal punto X non riesce più determinato lo S_{k+1} tangente a V (che era lo S_{k+1} di G e di Y).

Se su G esiston punti singolari, essi formano uno spazio, che diremo *spazio singolare* di G. Se sono $l\,(\geq 0)$ i punti singolari linearmente indipendenti, l avrà lo stesso significato di poc'anzi (n⁰ 1); lo spazio tangente a V lungo G sarà un $[2k-l+1]$, che per $l>0$ si potrà dire *spazio tangente singolare.*

3. Il fatto che gli S_{k+1} tangenti a V nei punti di G dati dalla (1) sono gli spazi che uniscono quello spazio generatore ai punti Y dati da (3), si può esprimere così: *quegli spazi tangenti corrispondono omograficamente ai loro punti di contatto.* Vengono in fatti riferiti

linearmente, sì gli uni che gli altri, ai parametri u_λ che compajono nelle (1) e (3).

Però quest'omografia (estensione di quella, conosciuta col nome di CHASLES, relativa alle rigate di S_3) può essere *degenere* o *singolare*.

Col linguaggio infinitesimale si può dire così. L'omografia è tra i punti dello S_k G e gli S_{k+1} che li projettano dallo S_k successivo. Essa degenera quando i due S_k hanno punti comuni: questi sono allora i *punti singolari* dell'omografia. Se essi formano un S_{l-1}, tutti i punti di G situati in un S_l passante per quello hanno lo stesso S_{k+1} corrispondente (tangente in essi a V); e l'omografia degenere si riduce ad un'omografia non degenere tra la forma composta dagli ∞^{k-l} S_l così definiti entro G e la forma degli S_{k+1} passanti per G e giacenti nello $[2k - l + 1]$, che è spazio tangente singolare.

Lo stesso si ritrova subito in quest'altro modo. La degenerazione dell'omografia tra lo spazio G descritto dal punto X(1) e la forma degli S_{k+1} che da G projettano i punti Y(3) equivale al fatto che vi sono S_{k+1} corrispondenti a due diversi punti X, cioè a diversi sistemi — poniamo $u_\lambda^{(1)}$, $u_\lambda^{(2)}$, — delle u_λ. Saranno dunque in un S_{k+1} i $k+1$ punti A e i due $\Sigma u_\lambda^{(1)} A'_\lambda$, $\Sigma u_\lambda^{(2)} A'_\lambda$. Ciò porta ad un'equazione della forma (4), ove le u_λ, coefficienti dei punti A'_λ, saranno combinazioni lineari delle $u_\lambda^{(1)}, u_\lambda^{(2)}$. Ora appunto le u_λ della (4) sono su G i parametri dei *punti singolari* nel senso del n^0 2: punti nei quali non è determinato lo S_{k+1} tangente.

4. Vogliamo ora considerare *una ∞^1 di* S_k, *tale che ognuno dei suoi spazi generatori ammetta punti singolari*. Ciò avviene sempre, se $2k \geq n$.

Conservando le notazioni dei n^i preced., porremo $l = k_1 + 1$; e supporremo che ogni S_k della data ∞^1 abbia un $[k_1]$ singolare, *variabile* al variar di quello: sicchè entro V si avrà una varietà $V^{(1)}$ di dimensione $k_1 + 1$ luogo di questi ∞^1 $[k_1]$.

Considerando ognuno di questi spazi singolari come l'intersezione di un S_k col successivo, gli S_k appaiono come contenenti ciascuno due $[k_1]$ successivi; e quindi ogni S_k contiene lo spazio tangente a $V^{(1)}$ lungo un $[k_1]$ generatore (quello che è singolare per lo S_k). *La ∞^1 di* S_k *V si compone di spazi tangenti alla $V^{(1)}$ lungo i suoi $[k_1]$ generatori* (4).

(4) Estendiamo qui il significato della locuzione: *spazio tangente lungo un $[k_1]$*.

Verifichiamo subito analiticamente. Presa sulla $V^{(1)}$ una linea, definita dall'essere le u certe funzioni di t, la sua tangente nel punto X dato da (1) è la retta che lo unisce al punto X' dato da (2). Ma siccome, per essere X sullo spazio singolare del suo S_k, ha luogo la (4), ne deriva, combinando (2) e (4), che X' sta nello spazio G dei punti A: onde G contiene la tangente in X alla linea considerata.

Aggiungiamo che, viceversa, se una linea è toccata nei suoi vari punti X dagli ∞^1 S_k generatori di V, sarà sempre X' (calcolato su essa) situato sullo spazio G dei punti A; onde la (2) conduce alla (4): i punti X della linea sono singolari per gli ∞^1 S_k. Dunque *una varietà* V *composta di* ∞^1 S_k *tangenti ad un'altra varietà* $\mathrm{V}^{(1)}$ *luogo di* ∞^1 *spazi* $[\mathrm{k}_1]$, *rispettivamente lungo questi spazi, ha su ogni suo* S_k *generatore uno spazio singolare che contiene il* $[\mathrm{k}_1]$ *corrispondente.*

5. Dopo ciò è facile costruire nel modo più generale le varietà luoghi di ∞^1 S_k dotati di spazi singolari, cioè in certo senso *analoghe alle sviluppabili ordinarie* (5).

Prescindiamo dal caso ovvio dei *coni*, escludiamo cioè che gli ∞^1 spazi $[k]$ passino tutti per uno stesso punto o spazio.

Per la varietà V luogo di $\infty^1\,[k]$ gli spazi singolari di questi spazi generatori sian di dimensione k_1. Poi ammettiamo che per la varietà $V^{(1)}$ luogo di questi $\infty^1\,[k_1]$ ogni spazio generatore abbia pure uno spazio singolare, la cui dimensione diremo k_2. Così otteniamo una varietà $V^{(2)}$ di $\infty^1\,[k_2]$, per la quale supponiamo ancora l'esistenza di ∞^1 spazi singolari $[k_3]$. E così via. Siccome i numeri $k, k_1, k_2, \ldots$ van diminuendo, si finirà con un certo k_ν pel quale avverrà che i $[k_\nu]$ generici della $V^{(\nu)}$ non hanno più punti singolari. Ciò avverrà per $k_\nu = 0$, vale a dire per essere $V^{(\nu)}$ una curva; oppure anche con $k_\nu > 0$. Si potrà dire che ciascuno degli spazi $[k]$, $[k_1], [k_2], \ldots, [k_\nu]$ è l'intersezione di due consecutivi del sistema precedente, o che contiene due spazi consecutivi del sistema seguente (6): cosicchè su ogni $[k]$ generatore di V abbiamo un $[k_1]$, un $[k_2], \ldots,$ un $[k_\nu]$, intersezioni rispettivamente di $2, 3, \ldots, \nu + 1$ successivi

(5) Quest'analogia non s'intende dunque, qui e nel seguito, nel senso metrico dell'*applicabilità* (od *isometria*) della varietà su uno spazio, ossia riducibilità dell'elemento lineare ad una somma di quadrati.

(6) Bene inteso, se vi è un sistema precedente, od uno seguente.

spazi generatori di V; ed ogni $[k]$ di V contiene $\nu + 1$ successivi spazi $[k_\nu]$ di $V^{(\nu)}$.

Per costruire la V corrispondente ai caratteri $k, k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ (pei quali troveremo delle condizioni restrittive), si parta da una varietà $V^{(\nu)}$ luogo di $\infty^1 [k_\nu]$, tale che i suoi spazi generatori non ammettano in generale punti singolari (cioè che uno generico di essi non incontri il successivo). Gli spazi tangenti a $V^{(\nu)}$ lungo quei $[k_\nu]$ saranno di dimensione $2k_\nu + 1$. Si tirino per essi, in modo generico, ∞^1 spazi $[k_{\nu-1}]$, sicchè

$$2k_\nu + 1 \leq k_{\nu-1}.$$

Questi nuovi spazi formeranno una varietà che ammetterà in generale i $[k_\nu]$ come spazi singolari, e che quindi lungo i $[k_{\nu-1}]$ generatori avrà spazi tangenti di dimensione $2k_{\nu-1} - k_\nu$. Tiriamo per questi spazi tangenti, in modo generico, ∞^1 spazi $[k_{\nu-2}]$, ove

$$2k_{\nu-1} - k_\nu \leq k_{\nu-2}.$$

Avremo una nuova varietà, per la quale saranno in generale spazi singolari i $[k_{\nu-1}]$; sicchè gli spazi tangenti ad essa lungo i $[k_{\nu-2}]$ generatori avranno la dimensione $2k_{\nu-2} - k_{\nu-1}$. Di nuovo si tirino per questi spazi tangenti, rispettivamente, $\infty^1 [k_{\nu-3}]$, essendo

$$2k_{\nu-2} - k_{\nu-1} \leq k_{\nu-3}.$$

E colla varietà così formata si continui, fino ad arrivare alla ∞^1 di spazi $[k_1]$, con spazi singolari $[k_2]$ e spazi tangenti lungo questi $[2k_1 - k_2]$. Per questi ultimi si tireranno in modo generico gli $\infty^1 [k]$, ove

$$2k_1 - k_2 \leq k,$$

e si otterrà la varietà V, che avrà in generale per spazi singolari dei suoi $[k]$ i $[k_1]$, purchè

$$2k - k_1 \leq n \text{ (7)}.$$

Un caso molto semplice è quello di una *sviluppabile ordinaria*, chiamando così la varietà degli ∞^1 S_k osculatori di una curva immersa in S_n. Allora i numeri $k_1, k_2, \ldots$ valgono rispettivamente $k-1, k-2, \ldots, 1, 0$.

---

(7) Le condizioni trovate pei caratteri $k, k_1, \ldots, k_\nu$ si possono anche scrivere così:

$$n - k \geq k - k_1 \geq k_1 - k_2 \geq \ldots \geq k_{\nu-2} - k_{\nu-1} \geq k_{\nu-1} - k_\nu \geq k_\nu + 1.$$

§ 2.

Varietà ∞^α di spazi.

6. Passiamo a studiare in generale una varietà comunque infinita, poniamo ∞^α, di spazi. Sian questi gli S_k determinati, come al n^0 1, con $k+1$ punti $A_0 A_1 \dots A_k$, le cui coordinate siano ora funzioni di α parametri $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\alpha$. *Indicherò d'ora innanzi coll'apposizione degl'indici superiori* $1, 2, \dots, \alpha$ *le derivazioni fatte rispetto a quei parametri.*

Fissiamo un S_k (regolare) G della data ∞^α, cioè fissiamo i valori delle τ. Consideriamo entro quel sistema di S_k tutte le ∞^1 passanti (regolarmente) per G, ed applichiamo ad esse le cose esposte nel § 1.

Otteniamo una tale ∞^1 di S_k assumendo le τ funzioni di una variabile t, sì che per un valor particolare di t diano i particolari parametri di G. Posto allora $d\tau_\mu/dt = v_\mu$, sarà

$$\frac{dA_\lambda}{dt} = \sum_\mu v_\mu A_\lambda^\mu ,$$

dove, come sempre in seguito, μ prende i valori $1, \dots, \alpha$. Lo spazio S_{k+1} tangente nel punto di G dato da

$$X = \sum_\lambda u_\lambda A_\lambda \tag{1}$$

alla V_{k+1} costituita dalla ∞^1 di S_k sarà (n^0 1) lo spazio che unisce G al punto

$$Y = \sum_\lambda u_\lambda \frac{dA_\lambda}{dt} ,$$

ossia, sostituendo,

$$Y = \sum_{\lambda\mu} u_\lambda v_\mu A_\lambda^\mu \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 0, 1, \dots, k\\ \mu = 1, 2, \dots, \alpha\end{pmatrix}. \tag{5}$$

In questa formola i parametri τ da cui dipendono i punti A_λ^μ s'intendono presi coi valori particolari che hanno per lo spazio fisso G: sicchè quei punti sono fissi. Invece le u_λ son le coordinate, interne a G, del punto X, che possiam far variare su questo spazio; e le v_μ, derivate delle τ_μ rispetto a t, calcolate per quel valore particolare di t che corrisponde a G, posson variare in tutti i modi, mutando la ∞^1 di S_k da noi scelta entro la ∞^α.

Così gli S_{k+1} che congiungono G ai punti Y ottenuti dalla (5) con le v fisse e le u variabili saranno gli spazi tangenti nei varî punti X di G ad un insieme di varietà V_{k+1} (*raccordate* lungo G) luoghi di ∞^1 S_k contenuti nella data ∞^α. Il luogo di quegli S_{k+1}, ossia lo spazio che projetta da G lo spazio (generalmente un S_k) descritto da Y al variar delle sole u, sarà (n⁰ 1) *lo spazio tangente lungo* G ad ognuna di quelle V_{k+1}.

Fissando invece le u e mutando le v nella (5), troviamo che gli S_{k+1} tangenti in un punto fisso X di G a tutte le V_{k+1} composte di ∞^1 S_k della ∞^α, passanti per G, riempiono lo spazio projettante da G lo spazio (generalmente $S_{\alpha-1}$) che viene allora descritto da Y col variare delle v. Quando $k+\alpha<n$, gli ∞^α S_k riempiono in generale una $V_{k+\alpha}$, che è rappresentata per noi come luogo del punto X dato dalla (1) in funzione dei parametri τ e u (potendosi una delle u assumere costante). Lo spazio ora nominato composto di S_{k+1} tangenti in X a tutte le V_{k+1} sarà in generale lo $S_{k+\alpha}$ *tangente in* X *alla* $V_{k+\alpha}$. Effettivamente questo $S_{k+\alpha}$ tangente si ottiene (n⁰ 16) congiungendo X coi suoi derivati rispetto ai parametri τ e u. Risulta quindi lo spazio dei punti A_λ e dei punti $\Sigma_\lambda u_\lambda A_\lambda^\mu$ pei diversi valori di μ: ossia precisamente lo spazio di G e dello $S_{\alpha-1}$ determinato da questi ultimi punti, cioè rappresentato da (5) con le u fisse e le v variabili.

7. La formola (5) è fondamentale per tutte le questioni relative agl'intorni di 1⁰ ordine di un S_k G entro una data ∞^α di S_k. Il punto Y che essa rappresenta descrive, al variar delle u e delle v, una varietà che indicherò con (Y), sulla quale dobbiamo trattenerci.

Supponiamo da prima che gli $\alpha(k+1)$ punti A_λ^μ, che figurano nella (5), siano linearmente indipendenti, cioè determinino uno spazio $[\alpha k+\alpha-1]$. Allora, entro questo spazio, i punti Y, riferiti a quelli come punti fondamentali, avranno le coordinate

$$y_{\lambda\mu}=u_\lambda\, v_\mu \qquad \begin{pmatrix}\lambda=0\,,\ 1,\dots,k\\ \mu=1\,,\ 2,\dots,\alpha\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Formeranno dunque una di quelle varietà che io ho studiato nella Nota *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* (questi Rendiconti, tomo V (1891), pp. 192-204) (8) (*).

Come ivi fu esposto, e come d'altronde si vede subito, la varietà (Y) rappresentata dalle (6) ha la dimensione $k+\alpha-1$, ed

(8) Il sig. SCORZA ha stabilito ora un nuovo fatto notevole relativo ad esse, nella Nota *Sulle varietà di* SEGRE (Atti Acc. Torino, XLV, 1909-1910, pp. 119-131).

(*) Queste « Opere », I, pp. 173-184.

è luogo di $\infty^{\alpha-1}$ spazi S_k (tutte le $v=\text{cost.}$) ed anche di ∞^k spazi $S_{\alpha-1}$ (le $u=\text{cost.}$), sì che per ogni suo punto passa *uno* spazio di ciascun sistema; gli spazi di uno stesso sistema essendo sempre punteggiati collinearmente da quelli dell'altro. *L'ordine* della varietà è $\binom{k+\alpha-1}{k}$.

Conviene che ne determiniamo anche la *classe* [9].

A questo scopo, osserviamo che in un punto qualunque della varietà (Y) di dimensione $k+\alpha-1$ lo spazio tangente $[k+\alpha-1]$ è quello che unisce i due spazi generatori S_k e $S_{\alpha-1}$, passanti pel punto stesso: spazi che hanno solo quel punto in comune, e perciò determinano appunto un $[k+\alpha-1]$. Un iperpiano ξ di equazione

$$\sum_{\lambda\mu} \xi_{\lambda\mu}\, y_{\lambda\mu} = 0$$

è dunque tangente alla varietà quando, e solo quando, esso contiene uno spazio generatore di ciascun sistema: ossia quando esiste un sistema di valori $\overline{u}_\lambda$ ed uno di valori $\overline{v}_\mu$ tali che sia, identicamente rispetto alle variabili v,

$$\sum_{\lambda\mu} \xi_{\lambda\mu}\, \overline{u}_\lambda\, v_\mu = 0\,,$$

ed identicamente rispetto alle variabili u

$$\sum_{\lambda\mu} \xi_{\lambda\mu}\, u_\lambda\, \overline{v}_\mu = 0.$$

Ciò significa che:

$$\sum_{\lambda} \xi_{\lambda\mu}\, \overline{u}_\lambda = 0 \qquad \text{per ogni } \mu\,, \tag{7}$$

$$\sum_{\mu} \xi_{\lambda\mu}\, \overline{v}_\mu = 0 \qquad \text{per ogni } \lambda\,. \tag{7'}$$

Si consideri la matrice

$$|\xi_{\lambda\mu}| \qquad \begin{pmatrix}\lambda=0,\,1,\dots,k\\ \mu=1,\,2,\dots,\alpha\end{pmatrix}.$$

Se essa è quadrata, l'annullarsi del determinante da essa rappresentato sarà la condizione necessaria e sufficiente affinchè si possan verificare le (7), come anche per le (7'). Se invece essa è propriamente rettangolare, uno dei due sistemi (7), (7') conterrà più incognite $\overline{u}_\lambda$ o $\overline{v}_\mu$ che equazioni, e potrà *sempre* soddisfarsi; mentre

---

(9) Per ogni varietà algebrica V_m data come luogo di punti intendiamo qui colla parola *classe* il *grado* della varietà che è costituita dai suoi iperpiani tangenti (cioè iperpiani passanti per gli S_m tangenti: v. n°16).

l'altro esigerà per verificarsi che si annullino tutti i determinanti del massimo ordine, che si possono estrarre da quella matrice, cioè tutti i determinanti dell'ordine dato da quello dei due numeri α e $k+1$ che non supera l'altro. Secondo l'uso, possiamo in tutti i casi rappresentare questo sistema di condizioni così:

$$\| \xi_{\lambda\mu} \| = 0. \tag{8}$$

Sarà questa la rappresentazione analitica della varietà (Y) come inviluppo d'iperpiani. Risulta un sistema di equazioni nelle ξ equivalente a $k-\alpha+2$, oppure ad $\alpha-k$ equazioni, secondo che l'uno o l'altro numero è >0. E l'ordine del sistema (8), che significa poi la *classe* della (Y), sarà, per una nota proposizione sugli ordini dei sistemi d'equazioni così fatti, espresso da $\binom{k+1}{\alpha-1}$, oppure $\binom{\alpha}{k}$, a seconda di quei due casi, cioè secondo che $\alpha \leq k+1$, oppure $\alpha \geq k+1$.

8. Se i punti A_λ^μ che compaiono nella formola fondamentale (5) non sono linearmente indipendenti, come s'era supposto in principio del n[0] 7, sostituendo in quella formola (5) le espressioni dei punti stessi come combinazioni lineari di punti linearmente indipendenti del loro spazio, rimane che entro questo le coordinate di Y, riferito a questi ultimi punti come fondamentali, sono espresse da forme bilineari delle u e v, cioè forme lineari delle $y_{\lambda\mu}$ definite da (6). Ne segue che la varietà (Y) nel caso attuale si potrà riguardare come una *projezione* della varietà *normale* di cui s'è parlato nel n[0] preced. Essa avrà dunque ancora *in generale* la stessa dimensione $k+\alpha-1$, se questo numero è $<n$, ed anche *in generale* l'ordine e la classe che abbiamo assegnato per quella. In casi speciali occorreranno modificazioni ([10]).

9. Ritornando, dopo questa parentesi (n[i] 7 e 8) sulla varietà (Y), alle cose del n[0] 6, noi dobbiamo projettare da G, che è un S_k,

---

([10]) Ci accadrà spesso nel seguito di assegnare dei teoremi solo pel caso *generale*, senza studiare le modificazioni che essi esigono in casi eccezionali. Apparirà però sempre dal metodo di dimostrazione il significato che ogni volta avrà la locuzione «*in generale*». Quanto all'esame delle *eccezioni*, esso sarebbe certo un complemento essenziale, che potrebbe anche portare a risultati importanti; ma convien lasciarlo come compito per l'avvenire, non volendo dare a questo scritto un'estensione eccessiva.

ciascun punto Y di quella varietà, di dimensione $k+\alpha-1$. Il cono che così otteniamo avrà in generale per dimensione $2k+\alpha$, purchè sia

$$(9) \qquad 2k+\alpha \leq n.$$

Nell'ipotesi (9) G non incontrerà in generale la (Y), e quindi l'ordine e la classe del cono saranno gli stessi che per questa varietà. Se però ha luogo il caso estremo $2k+\alpha=n$, il cono abbraccerà coi suoi punti tutto lo spazio S_n; e come *ordine* suo bisognerà allora intendere il numero dei suoi spazi generatori, siano $[k+\alpha]$ o $[2k+1]$, che passano per un punto generico dello S_n. Quanto alla classe, essa si riferirà sempre alla varietà degl'iperpiani passanti per quegli spazi generatori. Con quella convenzione, otteniamo quanto segue:

In generale, sotto la condizione (9), *data una* $V_{k+\alpha}$ *luogo di* ∞^α S_k, *gli* ∞^k *spazi* $[k+\alpha]$ *che le son tangenti nei punti di un* S_k *generatore fissato* G, *e gli* $\infty^{\alpha-1}$ *spazi* $[2k+1]$ *tangenti lungo* G *alle varietà di* ∞^1 S_k *contenute nella data* ∞^α *e passanti per* G, *ossia gli* $\infty^{\alpha-1}$ $[2k+1]$ *ognun dei quali unisce* G *ad un* S_k *infinitamente vicino della data* ∞^α, *riempiono semplicemente una medesima* $V_{2k+\alpha}$ *(cono di vertice* G*), il cui ordine è* $\binom{k+\alpha-1}{k}$, *e la classe è* $\binom{k+1}{\alpha-1}$ *oppure* $\binom{\alpha}{k}$ *secondo che* $\alpha \leq k+1$, *oppure* $\alpha \geq k+1$. *Si può definire questa varietà* $V_{2k+\alpha}$ *come il cono che da* G *projetta i punti infinitamente vicini (di 1° ordine) a* G *situati nella data* $V_{k+\alpha}$. *Essa è in generale immersa in uno spazio di dimensione* $\alpha k+\alpha+k$, *se questo numero è* $\leq n$.

10. Trasportiamo per dualità (in S_n) questi risultati, considerando ancora una ∞^α di spazi S_k. Dovremo scrivere nelle formole precedenti al posto di k la dimensione che quegli spazi hanno come inviluppi d'iperpiani, cioè $n-k-1$. Con ciò la condizione (9) viene a sostituirsi colla

$$(10) \qquad 2k-\alpha \geq n-2,$$

da cui discende (supposto $\alpha>1$, ed escluso il caso di $k=n-1$ e $\alpha=n$)

$$\alpha \leq k, \qquad 2k \geq n.$$

Lo spazio $[\alpha k+\alpha+k]$ si muta in $[\alpha k+k-\alpha n]$. I $[2k+1]$ *congiungenti* G cogli S_k infinitamente vicini dànno per dualità i $[2k-n]$ *intersezioni* di G cogli S_k infinitamente vicini.

Quanto ai $[k+\alpha]$ del n^0 preced., si deve ora considerare, invece di una $V_{k+\alpha}$ luogo di ∞^α S_k, il sistema degli $\infty^{n-k+\alpha-1}$ iperpiani che passano per gli attuali ∞^α S_k; e a questo sistema (inviluppo) d'iperpiani si applicherà il concetto duale a quello di *spazio tangente* di una varietà luogo di punti, cioè il concetto di *spazio caratteristico*, sul quale ritorneremo al n^0 16. Per una ∞^h d'iperpiani gli spazi caratteristici han la dimensione $n-h-1$; dunque pel nostro particolare sistema saranno dei $[k-\alpha]$, giacenti sugli S_k della ∞^α.

Possiamo così dedurre dal n^0 9 le seguenti proposizioni: *In generale, sotto la condizione* (10), *se si fissa entro una* ∞^α *di* S_k *uno*, G, *di questi, resta determinata su* G *una* $\infty^{n-k+\alpha-2}$ *di spazi* S_{k-1}, *di classe* $\binom{n-k+\alpha-2}{\alpha-1}$, *i cui spazi si posson definire come quelli che contengono uno spazio di uno qualunque dei due seguenti sistemi: il sistema degli* $\infty^{\alpha-1}$ $[2\mathrm{k}-\mathrm{n}]$ *d'intersezione di* G *cogli* S_k *infinitamente vicini, e il sistema degli* ∞^{n-k-1} *spazi* $[\mathrm{k}-\alpha]$ *caratteristici degl'iperpiani passanti per* G. *Tutti questi spazi passano per uno di dimensione* $\alpha\mathrm{k}+\mathrm{k}-\alpha\mathrm{n}$, *se questo numero è* ≥ 0. *Lasciando da parte i casi in cui il sistema dei* $[2\mathrm{k}-\mathrm{n}]$ *o quello dei* $[\mathrm{k}-\alpha]$ *riempiono coi loro punti tutto* G, *si ha che quando* $\mathrm{k}+\alpha \leq \mathrm{n}$ *gli* $\infty^{\alpha-1}$ $[2\mathrm{k}-\mathrm{n}]$ *formano una varietà d'ordine* $\binom{\mathrm{n}-\mathrm{k}}{\alpha-1}$; *e quando* $\mathrm{k}+\alpha \geq \mathrm{n}$ *gli* ∞^{n-k-1} $[\mathrm{k}-\alpha]$ *han per luogo una varietà d'ordine* $\binom{\alpha}{\mathrm{n}-\mathrm{k}-1}$.

Notevole è il caso di $k+\alpha=n$, in cui i due sistemi risultano della stessa dimensione, e il loro luogo è una stessa V_{k-1} (rappresentata su G da un'equazione-determinante, ad elementi lineari nelle coordinate di punto), d'ordine α. È il caso di una infinità di S_k che riempia coi suoi punti tutto S_n, semplicemente o un insieme discreto di volte. Corrisponde per dualità al caso $\alpha=k+1$ del n^0 9.

11. Prima di passare ad alcune applicazioni particolari dei precedenti teoremi, conviene che ritroviamo per altra via e con maggior generalità una parte di quelli del n^0 10. Cercheremo cioè direttamente il luogo di quei punti X dello spazio G che sono singolari per qualcuna delle ∞^1 di S_k passanti per G e contenute nella nostra ∞^k: vale a dire il luogo dei punti X in cui G è tagliato da qualche S_k infinitamente vicino della ∞^α.

Al n^0 2 s'è visto che un tal punto

$$X=\Sigma\, u_\lambda A_\lambda$$

è caratterizzato da ciò che il corrispondente punto Y (per la ∞^1 di

S_k) sta su G; sicchè esiston le w_λ e ϱ tali che

$$\Sigma\, w_\lambda\, A_\lambda + \varrho\, Y = 0\,,$$

vale a dire, colle notazioni del n⁰ 6,

$$\sum_\lambda w_\lambda\, A_\lambda + \sum_{\lambda\mu} u_\lambda\, v_\mu\, A_\lambda^\mu = 0\,. \tag{11}$$

Quando $k + \alpha < n$, sicchè si può considerare una $V_{k+\alpha}$ luogo degli ∞^α S_k, un punto X così fatto si potrà anche caratterizzare dicendo che in esso non è più determinato lo spazio $[k + \alpha]$ tangente alla $V_{k+\alpha}$, perchè i $k + \alpha + 1$ punti che individuerebbero questo spazio, cioè (v. la fine del n⁰ 6) i punti A_λ e $\Sigma_\lambda\, u_\lambda\, A_\lambda^\mu$, sono dalla (11) legati linearmente.

La (11) esprime che per l'esistenza di punti singolari su G deve questo spazio incontrare la varietà (Y) definita dalla (5).

Cerchiamo, in base alla (11), i legami fra le u_λ, coordinate di X entro allo S_k G. Perciò sostituiamo in quell'equazione simbolica, al posto dei punti che vi compaiono, successivamente le loro $n+1$ coordinate omogenee: otterremo $n + 1$ ordinarie equazioni. *In generale* potremo ricavare da $k + 1$ di esse le $k + 1$ quantità w: risulteranno espresse da forme bilineari nelle u e nelle v. Sostituendole nelle restanti $n - k$ equazioni, queste diverranno $n - k$ equazioni lineari omogenee tanto nelle $u_0\, u_1 \ldots u_k$ quanto nelle $v_1\, v_2 \ldots v_\alpha$. Allora, se $\alpha > n - k$, si potrà sempre, qualunque siano i valori delle u, determinare le v in modo da soddisfare le $n - k$ equazioni: *ogni punto* X di G è singolare. Se invece $\alpha \leq n - k$, si potrà fra le equazioni stesse eliminare le α incognite v: ciò porta ad annullare i determinanti d'ordine α di una matrice con α ed $n - k$ linee e colonne, ad elementi forme lineari nelle u. Si rappresenta così, colle u come coordinate di X interne a G, una varietà di punti singolari X di dimensione $2k + \alpha - n - 1$ (supposta > 0) e di ordine $\binom{h - k}{\alpha - 1}$. Questa rappresentazione è analoga a quella che la (8) veniva a dare per il problema duale.

Dunque: *Su uno spazio* G *di una* ∞^α *di spazi* S_k *vi sono in generale punti singolari, cioè punti d'incontro con* S_k *infinitamente vicini, solo quando*

$$2k + \alpha > n\,; \tag{12}$$

ed essi formano allora una varietà di dimensione $2\mathrm{k} + \alpha - \mathrm{n} - 1$ *e d'ordine* $\binom{\mathrm{n} - \mathrm{k}}{\alpha - 1}$: *a meno che sia* $\mathrm{k} + \alpha > \mathrm{n}$, *nel qual caso abbracciano tutto* G.

Confrontando coll'enunciato del n^0 10, si vede che adesso la condizione (12) prende il posto della (10), che era più restrittiva. Così non ci limitiamo più ora, come al n^0 10, al caso che G sia incontrato da *ogni* S_k, e quindi abbia punti singolari in corrispondenza ad *ogni* ∞^1 di S_k della data ∞^α. Se $2k < n$, G non incontra in generale un altro S_k: le condizioni perchè s'incontrino sono $n - 2k$. Ma tra gli $\infty^{\alpha-1}$ S_k della data ∞^α infinitamente vicini a G ve ne sono in generale, nell'ipotesi (12), $\infty^{\alpha-1-(n-2k)}$ incidenti a G: e da queste incidenze derivano i punti singolari dell'ultimo enunciato.

Tralasciamo di scrivere la proposizione duale, colla quale si estende una parte del n^0 9.

§ 3.

Alcuni casi particolari.

12. ***Varietà di ∞^α rette in S_n ($n > 3$).*** — Dal n^0 9 abbiamo: *Se $\alpha \leq n - 2$, il luogo degli S_3 che da una retta fissa G della ∞^α projettano le $\infty^{\alpha-1}$ rette infinitamente vicine è un cono di dimensione $\alpha + 2$, d'ordine α e classe α, appartenente a uno spazio di dimensione $\leq 2\alpha + 1$. Esso è anche il luogo degli ∞^1 $S_{\alpha+1}$ tangenti nei vari punti di G alla $V_{\alpha+1}$ luogo delle ∞^α rette.*

Qui si noti che il cono di cui si tratta può ottenersi projettando dalla retta G una varietà V_α, che nel suo spazio normale $[2\alpha - 1]$ ha le coordinate dei suoi punti esprimibili così:

$$u_1 v_\mu, \quad u_2 v_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Ora questa V_α è luogo di ∞^1 $S_{\alpha-1}$ di quello spazio $[2\alpha - 1]$, che si posson definire come congiungenti α punti omologhi di α rette punteggiate projettivamente, od anche come le intersezioni degl'iperpiani (di dimensione $2\alpha - 2$) omologhi di α fasci projettivi (ottenuti projettando dallo spazio di $\alpha - 1$ tra quelle rette i punti della residua). È dunque una V_α *duale di se stessa.* Ciò è in relazione col fatto che abbiam trovato coincidenti fra loro l'ordine e la classe ($= \alpha$).

Dal n^0 11 otteniamo ancora: *In generale, soltanto se $\alpha > n - 2$ vi son sulla retta G dei punti singolari o fochi. Sono tali tutti i punti di G se $\alpha > n - 1$; solo $n - 1$ punti di G se $\alpha = n - 1$* ([11]).

Più tardi (§ 6) incontreremo varietà rigate *eccezionali*, nelle quali ogni retta ammette un certo numero di fochi, pur essendo $\alpha \leq n - 2$.

([11]) Cfr. *Un'osservazione sui sistemi di rette degli spazi superiori* (questi Rendiconti, II, 1888, pp. 148-149).

13. ***Varietà di*** ∞^2 S_k. — Sostituiamo $\alpha = 2$ nei n^i 9 e 11, ed abbiamo: *In generale, se* $2k \leq n - 2$, *gli* ∞^k S_{k+2} *tangenti alla* V_{k+2} *luogo degli* ∞^2 S_k *nei punti di uno,* G, *di questi, e gli* ∞^1 $[2k+1]$ *che congiungono* G *agli* S_k *infinitamente vicini, han per luogo una stessa* V_{2k+2} *d'ordine e classe* $k+1$.

(Questa V_{2k+2} è un cono che projetta da G una V_{k+1} di un $[2k+1]$, la quale è della stessa natura della V_α di $[2\alpha - 1]$ nominata al n^0 preced., mutato α in $k+1$).

Su G *vi sono in generale punti singolari solo se* $2k > n - 2$; *ed essi formano allora una varietà di dimensione* $2k - n + 1$ *e d'ordine* $n - k$.

Dal n^0 10 risulta che se $2k > n$ anche la classe di quest' ultima varietà vale $n - k$. Se $2k = n$ si hanno sullo S_k G ∞^1 fochi, il cui luogo è una curva razionale normale d'ordine k. Infine se $2k = n - 1$ si hanno su G $k+1$ fochi.

14. ***Varietà di*** ∞^{n-2k+1} S_k ***in*** S_n. — È questo, di $\alpha = n - - 2k + 1$, il caso in cui, secondo il n^0 11, i punti singolari su G sono in numero finito (> 0). E precisamente essi sono $\binom{n-k}{k}$.

Possiamo allora applicare in generale alla varietà infinita di S_k un ragionamento simile a quello ben noto, che si fa per le ordinarie congruenze di rette in base ai due fochi. Partiamo cioè da un S_k del dato sistema. Consideriamo quello infinitamente vicino che gli è incidente in uno dei suoi $\binom{n-k}{k}$ fochi. Poi un S_k successivo al secondo e incidente ad esso nel foco che è infinitamente vicino a quello. E poi ancora un S_k infinitamente vicino ed incidente a quel terzo... Otterremo così una ∞^1 di S_k del dato sistema, tale che due successivi sono sempre incidenti: onde gli spazi stessi risultan tangenti alla curva luogo dei fochi considerati.

I fochi, o punti singolari, degli ∞^{n-2k+1} S_k formano $\binom{n-k}{k}$ varietà V_{n-2k+1} (o *falde* di una stessa varietà) sulle quali stanno le curve luoghi di fochi, ottenute come ora s'è detto. Dunque:

Sia data in S_n, *per* $n \geq 2k$, *una* ∞^{n-2k+1} *di spazi* S_k (*che riempirà in generale una* V_{n-k+1}). *Questi spazi avranno contatto con* $\binom{n-k}{k}$ *varietà* V_{n-2k+1} (*conterranno cioè rette tangenti di ognuna di queste*).

Queste varietà V_{n-2k+1} si potran chiamare *focali* pel sistema degli S_k, o *cuspidali* per la V_{n-k+1}. E s'intende che fra esse possono avvenire delle coincidenze e degenerazioni in varietà di minor dimensione, allo stesso modo come per le ordinarie congruenze di rette.

15. ***Varietà di*** ∞^α S_k ***entro*** S_{2k+1}. — Si tratti cioè di spazi *autoreciproci :* $n = 2k + 1$.

Abbiam parlato al n⁰ 3 dell'omografia che lega i punti di uno S_k, G, e gli S_{k+1} tangenti in essi ad una V_{k+1}, luogo di una ∞^1 di S_k passante per G. Nel caso di $n = 2k + 1$ saranno in generale *tutti* gli S_{k+1} passanti per G quelli che compaiono in tal modo. Avremo un'omografia tra G punteggiato e la forma fondamentale ∞^k degli S_{k+1} passanti per G. Quest'ultima, se si vuole, si può segarla con un S_k fisso sghembo con G, e sia H. Si ha allora un'omografia tra G ed H.

Quando veniamo alla ∞^α di S_k, e alle sue varie ∞^1 passanti per G, gli S_{k+1} tangenti nei punti

$$X = \sum_\lambda u_\lambda A_\lambda$$

son quelli che congiungono G al punto

$$Y = \sum_{\lambda\mu} u_\lambda v_\mu A_\lambda^\mu ,$$

ove le v son determinate dalla ∞^1 che si sceglie entro la ∞^α (n⁰ 6). Projettando Y da G su H abbiamo un punto, le cui $k + 1$ coordinate $z_0 z_1 \ldots z_k$ interne ad H saranno forme lineari delle coordinate di Y, e quindi, come queste, forme bilineari delle u e delle v. Così, per ogni scelta delle v, avremo le z uguali a forme lineari delle $k + 1$ coordinate u di X, i coefficienti di queste forme essendo a loro volta forme lineari degli α parametri v. Abbiamo dunque un *sistema lineare di omografie,* generalmente $\infty^{\alpha-1}$. La teoria di questi sistemi lineari d'omografie tra due S_k si applicherà allo studio della ∞^α di S_k entro S_{2k+1}, come per le varietà di rette dello S_3 è stato fatto dal sig. KOENIGS nella sua Tesi (¹²). Ad esempio, ogni omografia degenere del sistema lineare condurrà (n⁰ 3) all'esistenza di un punto singolare o foco su G e di uno spazio S_{2k} tangente singolare passante per G.

Consideriamo il caso di $\alpha = 2$. Avremo un *fascio* di omografie, il quale conterrà in generale $k + 1$ omografie degeneri. Per ognuna di queste vi sarà su G un punto singolare, e a questo corrisponderà in tutte le altre omografie del fascio uno stesso S_{k+1} per G: sicchè *tutte le varietà (generiche) luoghi di* ∞^1 S_k *contenuti nella data* ∞^2 *e passanti per* G *si toccano in ciascuno di quei* $\mathrm{k} + 1$ *fochi di* G. Ciò si può pur derivare dal n⁰ 14, ove si faccia $n = 2k + 1$. Si trova in fatti che gli ∞^2 S_k contengono in generale rette tangenti a $k + 1$ superficie fisse, luoghi dei loro fochi. Ora si prenda una ∞^1 *generica*

(¹²) *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé* (Ann. École norm. sup., (2) XI, 1882, pp. 219-338).

di quegli S_k, passante per G. Darà su una qualunque di quelle superficie una ∞^1 di punti costituente una linea che *non sarà* in generale tangente agli ∞^1 S_k. In conseguenza la tangente a questa linea in quel suo punto P che è singolare per G determina con questo spazio un S_{k+1} (tangente in P alla varietà degli ∞^1 S_k), il quale viene a contenere due diverse tangenti in P alla superficie focale (una giacente in G, e l'altra fuori), e quindi contiene il piano tangente in P a questa superficie. Così lo S_{k+1} tangente in P a una qualunque varietà generica di ∞^1 S_k, come quella considerata, è sempre lo stesso spazio, cioè lo S_{k+1} che unisce G col piano tangente in P alla superficie focale.

Abbiasi $\alpha = k$, cioè una V_{2k} *luogo di* ∞^k S_k *entro* S_{2k+1}. Possiamo allora considerare, entro lo spazio ausiliare H, k spazi S_k sovrapposti omografici con G (dai quali resta determinato il sistema lineare di ∞^{k-1} omografie). L'iperpiano S_{2k} tangente alla V_{2k} in un punto X di G è quello che projetta da G lo S_{k-1} congiungente i k punti omologhi di X in quei k spazi sovrapposti. *Un iperpiano generico* ξ *per* G *è tangente alla* V_{2k} *in un determinato punto* X *di* G, perchè su ogni S_{k-1} di H stanno in generale k punti corrispondenti di quei k spazi omografici. Anzi, si vede subito in modo noto che quegli S_{k-1} di H, e quindi anche, projettandoli da G, *gl' iperpiani* ξ *per* G *corrispondono ai punti* X *di contatto di quegl'iperpiani*, cioè ai punti X omologhi su G dei k punti prima nominati, *in una corrispondenza biunivoca di ordine* k: non in una projettività, come avviene per $k = 1$, vale a dire per le rigate di S_3. E quei punti X di G a cui non corrisponde un iperpiano tangente ξ determinato, cioè i cui k punti omologhi dei k spazi sovrapposti in H stanno in un S_{k-2}, risulta tosto che formano una V_{k-2} d'ordine $\binom{k+1}{2}$: d'accordo col n⁰ 11, ove si ponga $\alpha = k, n = 2k + 1$, poichè tali punti X sono precisamente i punti singolari di G.

§ 4.

Sulle varietà luoghi di punti, e inviluppi d'iperpiani [13].

16. Sia data in S_n una varietà V_k luogo del punto x di coordinate omogenee x_i funzioni dei parametri $\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_k$.

---

[13] Alcune fra le questioni trattate in questo § sono analoghe a talune, relative alle superficie, che si trovano nella mia Nota: *Su una classe di superficie degl'iperspazi, legata colle equazioni lineari alle derivate parziali di* 2⁰ *ordine* (Atti Acc. Torino, XLII, 1906-1907, pp. 559-591) [Questo volume, p. 20].

Si vede subito che le rette tangenti in un punto x alle linee che sulla V_k passano regolarmente per x formano lo spazio determinato da questo punto e dai punti x^μ $(\mu = 1, \ldots, k)$, dove (come al n° 6) l'apice superiore μ indicherà sempre *derivazione rispetto a* τ_μ (e non elevazione a potenza!). Quello spazio si chiama, come sappiamo, *lo spazio tangente in* x alla V_k. Esso è in generale un S_k, vale a dire quei $k+1$ punti sono in generale linearmente indipendenti, se la varietà è propriamente una V_k, ossia se i k parametri τ sono essenziali ([14]).

Gli spazi giacenti in quello S_k e passanti per x, e così pure gli spazi che contengono lo S_k, si dicono *tangenti* alla V_k in x. In particolare gl'iperpiani ξ tangenti in x saranno quelli le cui coordinate ξ_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ verificano le $k+1$ equazioni

$$(\xi\, x) = 0, \qquad (\xi\, x^\mu) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, k), \tag{13}$$

ove, come anche nel seguito, il simbolo (ξx) sta in luogo di $\sum_0^n {}_i\, \xi_i x_i$, etc.

Abbiasi ora invece in S_n un sistema ∞^h d'iperpiani; le loro coordinate ξ_i siano funzioni date dei parametri $\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_h$. Procedendo in modo duale a quello dianzi accennato, ricercando cioè, per le varie ∞^1 contenute nella data ∞^h e passanti per un iperpiano fisso ξ di questa (duale delle linee tracciate sulla V_k di prima e passanti pel punto x), lo spazio S_{n-2} singolare o di contatto di ξ, cioè intersezione di ξ coll'iperpiano successivo, si ha che tutti questi S_{n-2} passano per uno stesso spazio $[n-h-1]$, che è l'insieme dei punti x che verificano le equazioni

$$(\xi\, x) = 0, \qquad (\xi^\nu\, x) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, h). \tag{14}$$

Diremo per brevità che questo $[n-h-1]$, concetto duale a quello di S_k tangente della V_k, è lo *spazio caratteristico* ξ per la data ∞^h.

In generale gli $[n-h-1]$ caratteristici saranno ∞^h, come gli iperpiani da cui provengono, ed il loro luogo sarà una V_{n-1}. Ma può bene avvenire (come si vede già in S_3 per una ∞^2 di piani) che quegli spazi $[n-h-1]$ siano in minor numero. In tutti i casi però *ogni iperpiano della data* ∞^h *sarà sempre tangente alla varietà*

([14]) In fatti, se i $k+1$ punti x e x^μ fossero sempre legati linearmente, cioè se si annullasse identicamente la matrice delle loro coordinate, ne deriverebbe, riducendosi alle coordinate non omogenee coll'assumere per es. $x_0 = 1$, che sarebbe nulla la matrice funzionale di $x_1 \ldots x_n$ rispetto alle k variabili τ, e che in conseguenza quelle x si potrebbero esprimere in funzione di sole $k-1$ fra esse (cfr. ad es. JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 2e édition, I, 1893, p. 86).

(diciamola V_k) *luogo di quegli spazi, in tutti i punti del proprio* [n — h — 1] *caratteristico.*

Per dimostrare ciò, basterà provare che una curva tracciata sulla V_k è tangente in ogni suo punto x ad ogni iperpiano ξ corrispondente (avente cioè uno spazio caratteristico passante per x). La curva sia rappresentata dall'essere le coordinate x_i dei suoi punti funzioni date di un parametro t. Prendiamo una ∞^1 d'iperpiani ξ del dato sistema ∞^h, i quali abbiano $[n - h - 1]$ caratteristici contenenti rispettivamente quei punti x. Corrisponderanno a valori delle $\tau_1 \dots \tau_h$ che possiamo pure assumere funzioni di t; onde le ξ_i risulteranno a lor volta funzioni di t. I due sistemi di funzioni x_i e ξ_i di t verificheranno identicamente le (14). Dalla 1ª di queste, derivando rispetto a t, si ha:

$$\left(\sum_\nu \xi^\nu \frac{d\tau_\nu}{dt}, x\right) + \left(\xi, \frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

ossia

$$\sum_\nu \frac{d\tau_\nu}{dt} (\xi^\nu, x) + \left(\xi, \frac{dx}{dt}\right) = 0;$$

e dalle altre (14) segue che questa relazione si riduce a

$$\left(\xi, \frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

che esprime appunto il contatto dell'iperpiano ξ colla curva luogo di x.

Poichè per ipotesi gli ∞^h iperpiani hanno spazi caratteristici $[n - h - 1]$ contenenti nel loro insieme ∞^k punti, dovrà accadere che un punto generico x della V_k provenga in tal modo da ∞^{n-k-1} iperpiani. Ma gl'iperpiani tangenti in x alla V_k sono appunto ∞^{n-k-1}. Dunque il sistema dato di ∞^h iperpiani abbraccia *tutti* gl'iperpiani tangenti alla V_k.

Una infinità d'iperpiani definisce sempre una varietà luogo di punti (che può dirsi suo *inviluppo*), *per la quale essa costituisce l'insieme degli iperpiani tangenti.* Questa varietà luogo è generata dagli spazi caratteristici (che posson ridursi a singoli punti) dell'infinità d'iperpiani.

Per invertire questo risultato basta applicare la legge di dualità, scambiando cioè *spazio caratteristico* con *spazio tangente,* e quindi i punti di spazi caratteristici cogl'iperpiani tangenti, ecc. *Data una varietà luogo* $\mathrm{V_k}$, *il sistema di tutti i suoi iperpiani tangenti produce su ognuno di essi uno spazio caratteristico, il quale giace sulla* $\mathrm{V_k}$ *ed è l'insieme dei punti nei quali l'iperpiano è tangente a questa varietà.* Nel caso più comune gl'iperpiani tangenti alla

V_k sono ∞^{n-1}, i loro spazi caratteristici sono i singoli punti di contatto. In ogni caso se gl'iperpiani tangenti sono ∞^h, la V_k sarà luogo degli spazi $[n-h-1]$ caratteristici di quel sistema ∞^h. Sarà dunque $h+k>n-1$.

Se avviene che per un punto generico della V_k passi uno solo di quegli $[n-h-1]$ (onde essi saranno $\infty^{h+k-n+1}$), tutti gl'iperpiani tangenti alla V_k in un punto generico di un $[n-h-1]$ avranno questo come spazio caratteristico corrispondente, toccheranno cioè la V_k lungo questo spazio: onde anche il loro comune S_k sarà tangente alla V_k in tutti i punti dello $[n-h-1]$. Ogni S_k tangente alla V_k la tocca in tal caso lungo un $[n-h-1]$ (15).

17. Riprendiamo la V_k definita come al principio del n° preced. Sia G lo S_k tangente nel punto x. Un punto della varietà infinitamente vicino ad x corrisponda ai valori $\tau_\mu + d\tau_\mu$ dei parametri; lo si potrà rappresentare così:

$$x + dx = x + \sum_\mu x^\mu d\tau_\mu + \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} x^{\lambda\mu}\, d\tau_\lambda\, d\tau_\mu + \dots .$$

Se l'iperpiano ξ è tangente alla V_k in x, sicchè verifica le (13), la condizione perchè esso contenga anche quel punto $x+dx$, cioè

$$(\xi\,, x+dx) = 0,$$

si riduce a

$$\sum_{\lambda\mu} (\xi\,, x^{\lambda\mu})\, d\tau_\lambda\, d\tau_\mu = 0\,. \tag{15}$$

Da quest'equazione nelle $d\tau$ risulta definito, entro la stella di centro x giacente nello spazio tangente G, un cono quadrico, le cui generatrici rettilinee segnano ∞^{k-2} tra le ∞^{k-1} direzioni che sulla V_k passano pel punto x. Sarà il cono delle tangenti alla intersezione della varietà coll'iperpiano ξ, nel punto doppio x di questa intersezione. Mutando ξ in modo da toccare sempre la V_k in x, cioè da soddisfare le (13), varia quel cono quadrico nella stella e descrive, come appare dalla (15), un *sistema lineare di coni quadrici*, il quale sarà in generale ∞^{n-k-1}, come il sistema degl'iperpiani ξ.

(15) Per le particolari varietà (Y) del n° 7, rappresentabili colle equazioni (6), avviene che, se il numero dei parametri u differisce da quello dei parametri v di un certo numero $l>0$, gl'iperpiani tangenti non sono ∞^{n-1} (n essendo la dimensione dello spazio normale, cioè dello spazio ambiente pel n° 7), ma solo ∞^{n-l-1}: come risultava dalle equazioni (8). Ogni iperpiano tangente ad una tal varietà la tocca dunque lungo un S_l. Ma questi S_l caratteristici *non* sono tali, in generale, che per un punto generico della varietà ne passi uno solo; sicchè non si applica a questo caso l'ultima osservazione fatta.

Possiam considerare in particolare *un iperpiano tangente* ξ *tale che il corrispondente cono quadrico abbia una generatrice doppia* (sia cioè un cono di 2ª specie, abbia per *vertice* una retta anzi che un sol punto). Se questa retta corrisponde alle coordinate $d\tau$ entro la stella, dalla (15) si trae che

$$\sum_{\lambda} (\xi, x^{\lambda\mu})\, d\tau_\lambda = 0, \qquad \text{per } \mu = 1, \ldots, k, \tag{16}$$

onde l'equazione determinante

$$|\, (\xi, x^{\lambda\mu}) \,| = 0\,. \tag{17}$$

È questa un'equazione di grado k nelle ξ_i, la quale messa insieme colle (13) caratterizza quei particolari ∞^{n-k-2} iperpiani tangenti ξ che volevamo. Essi inviluppano dunque un *cono di classe* k *uscente da* G.

Dalle k equazioni (16) si trae che se $2k < n$ *ogni* direzione $d\tau$, o tangente, della V_k in x corrisponde a qualche iperpiano ξ della natura anzidetta. Quando invece $2k \geq n$, fra le k equazioni stesse, bilineari nelle $d\tau$ ed in $n - k$ ξ_i indipendenti (di cui le rimanenti $k + 1$ risultan funzioni, grazie alle (13)), si potranno eliminare queste ultime. Si otterrà l'annullamento di una matrice di k colonne e $n - k$ linee, ad elementi lineari nelle $d\tau$, cioè un sistema equivalente a $2k - n + 1$ equazioni, di grado $\binom{k}{n-k-1}$. *Le suddette direzioni, o generatrici doppie di coni quadrici del suddetto sistema lineare, sono tutte le direzioni uscenti dal punto* x *sulla* V_k, *se* $2k < n$; *in caso contrario sono solo* ∞^{n-k-2} *e formano in* G *un cono di vertice* x *d'ordine* $\binom{k}{n-k-1}$.

18. Le equazioni (16) dicono che l'iperpiano ξ contiene i k punti

$$\sum_{\lambda} u_\lambda\, x^{\lambda\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, k), \tag{18}$$

ove le u_λ sian proporzionali alle $d\tau_\lambda$: quindi anche contiene lo S_{k-1} (o spazio inferiore) che li unisce e che risulta luogo dei punti

$$Z = \sum_{\lambda\mu} u_\lambda\, v_\mu\, x^{\lambda\mu} \qquad (\lambda, \mu = 1, \ldots, k), \tag{19}$$

ove $v_1 \ldots v_k$ son parametri variabili.

Se nella (19) lasciam variare insieme le u e le v, il punto Z descrive una varietà (Z) analoga a quella, che ci si è presentata al n⁰ 6, dei punti Y definiti dalla (5). Ora però vi è *simmetria* nelle due serie di parametri u e v: non solo sono in egual numero, ma inoltre è $x^{\lambda\mu} = x^{\mu\lambda}$, mentre al n^0 6 i punti A_λ^μ, A_μ^λ erano in generale diversi. Ne deriva che se un punto Z si ottiene dando alle u certi valori a, ed alle v certi valori b, lo stesso punto si otterrà dando alle u i valori b, ad alle v i valori a: sicchè uno stesso punto corrisponde ai due sistemi (a, b) e (b, a).

Fissando i valori delle u, e lasciando variare le v, il punto Z descrive in generale un S_{k-1}, che si otterrebbe nello stesso modo scambiando le u colle v. Così sulla varietà (Z) vi è *un* sistema di S_{k-1}, tale che per ogni punto di essa ne passan due. Essi coincidono solo per i punti

$$P = \sum_{\lambda\mu} u_\lambda u_\mu x^{\lambda\mu} \qquad (\lambda, \mu = 1, \dots, k). \tag{20}$$

Questi ultimi formano in generale una V_{k-1}, (P), il cui S_{k-1} tangente nel punto P, corrispondente a certi valori delle u, non è altro che lo S_{k-1} dei punti derivati, cioè dei k punti (18). Dunque la varietà (Z) è costituita dagli S_{k-1} tangenti alla (P). Questi spazi tangenti s'incontrano a due a due in un punto. Due di essi son punteggiati collinearmente dagli altri. Ecc.

Confrontando (20) con (15) si vede che: un iperpiano ξ tangente in x alla data V_k produce su questa una sezione passante per x nella direzione $d\tau_1 : \dots = u_1 : \dots$, quando l'iperpiano stesso contiene il punto P corrispondente a quelle u, cioè contiene lo S_{k+1} che projetta quel punto da G. È facile vedere che questo S_{k+1} è luogo dei piani osculatori in x alle linee della V_k che passano per x secondo quella direzione ([16]). Esso projetta da G i punti della V_k infinitamente vicini (di 2^0 ordine) ad x, che sono in quella direzione. Abbiamo un legame tra la stella delle tangenti in x alla V_k e gli S_{k+1} generatori del cono di dimensione $2k+1$ (GP) che da G projetta la varietà (P), e che può anche riguardarsi come projettante da G l'insieme dei punti della V_k infinitamente vicini (di 2^0 ordine) ad x.

([16]) In fatti, se una tal linea proviene dall'essere le τ_λ funzioni di t, delle quali indichiamo con u_λ, τ_λ'' le prime e seconde derivate, il piano osculatore in x sarà quello dei punti x, dx/dt, d^2x/dt^2, ossia dei punti

$$x, \qquad \sum_\lambda u_\lambda x^\lambda, \qquad \sum_\lambda \tau_\lambda'' x^\lambda + \sum_{\lambda\mu} u_\lambda u_\mu x^{\lambda\mu}.$$

Sta dunque nello spazio determinato dai punti x, x^λ e P.

Si confrontino, anche pel seguito, le considerazioni sintetiche della Nota del sig. Del Pezzo, *Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni* (Rend. Acc. Napoli, XXV, 1886, pp. 176-180).

Questo cono (GP), come luogo degli S_{k+1} generatori, o la stessa (P), son rappresentati sulla stella suddetta in modo che alle sezioni fatte dagl'iperpiani per G corrispondono in questa i coni quadrici del sistema lineare nominato al n^0 17. In particolare gl'iperpiani per G tangenti a quel cono, cioè tangenti alla (P), corrispondono a quei coni quadrici del sistema lineare i quali hanno generatrici doppie. Sono gl'iperpiani ξ passanti per G, che verificano la (17). È quella l'equazione, come inviluppo d'iperpiani, della varietà (P) definita come luogo dalla (20).

19. Le cose si presentano nel modo più semplice quando i punti $x^{\lambda\mu}$ sono linearmente indipendenti.

Prendendoli come punti fondamentali delle coordinate, nello spazio di dimensione $k(k+1)/2-1$ da essi determinato, la varietà (P) risulta composta di quei punti le cui coordinate sono espresse parametricamente da tutti i prodotti $u_\lambda\, u_\mu$ (λ, μ combinazione binaria di $1 \ldots k$). È dunque la V_{k-1} rappresentata su un S_{k-1} (ove le u son le coordinate omogenee di punto) in modo che le sezioni cogl'iperpiani ξ han per imagini nello S_{k-1} il sistema di tutte le forme quadratiche

$$\Sigma\, \xi_{\lambda\mu}\, u_\lambda\, u_\mu = 0.$$

L'*ordine* della (P) è 2^{k-1}. (In particolare per $k=3$ si ha la nota superficie di VERONESE). Le sezioni cogli iperpiani tangenti son rappresentate sullo S_{k-1} dai *coni* quadrici. Gl'iperpiani tangenti son quelli che verificano l'equazione-determinante

$$|\, \xi_{\lambda\mu}\, | = 0\,,$$

a cui si riduce ora la (17). La *classe* della (P) è k.

Si posson poi anche considerare quegl'iperpiani che son tangenti a questa varietà in più punti. Essi corrispondono a forme quadriche dello S_{k-1} aventi più punti doppi, e quindi infiniti costituenti una retta, o un piano, ... Sono dunque iperpiani che toccano la (P) in ∞^1 punti (di una conica), o in ∞^2 punti (di una superficie di VERONESE), ecc.; e si rappresentano scrivendo che la matrice delle coordinate $\xi_{\lambda\mu}$ ha nulli tutti i determinanti d'ordine $k-1$, o tutti quelli d'ordine $k-2$, ecc. Le classi di queste varietà d'iperpiani sono espresse da note formole di H. SCHUBERT [17].

---

[17] Vedi per esempio: *Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume zweiten Grades in* n *Dimensionen* (Math. Ann., XLV, 1894, pp. 153-206),

Per la V_k del n° 17 si avranno così, per projezione da quello spazio G, gl'iperpiani che la toccano nel punto dato x, per modo che l'intersezione V_{k-1} abbia in x un punto doppio il cui cono quadrico tangente sia dotato non solo di una retta doppia, ma di un piano, o un $S_3, \ldots$ doppio. Delle varietà composte da tali iperpiani si conoscono dimensione e classe.

Se i punti $x^{\lambda\mu}$ son legati linearmente, i caratteri assegnati per la varietà (P), o pel cono (GP) che la projetta da G, rimarranno inalterati *in generale*, purchè la dimensione dello spazio cui appartiene (P) rimanga $> k-1$, e sia anche $n > 2k$.

20. Al cono (GP) dei n[i] preced. si giunge ancora nel seguente modo.

Gli spazi S_k tangenti alla V_k luogo di x generano una varietà W, che è descritta dal punto

$$X = x + \sum_\lambda u_\lambda x^\lambda, \tag{21}$$

al variare dei $2k$ parametri u e τ. Lo spazio tangente a W in X è determinato da questo punto e dai suoi derivati rispetto a quei parametri, ossia dai punti X, x^λ $(\lambda = 1, \ldots, k)$, e

$$x^\mu + \sum_\lambda u_\lambda x^{\lambda\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, k).$$

È dunque lo spazio dei punti $x, x^1, \ldots, x^k$ e dei k punti (18): ossia lo spazio tangente al cono (GP) lungo quello S_{k+1} che corrisponde alla direzione $d\tau_1 : \ldots = u_1 : \ldots$ nella stella delle tangenti in x alla V_k. Esso rimane fisso se X varia su una retta passante per x.

---

p. 186. Risultano i seguenti valori per quelle classi:

$$\binom{k+1}{3}, \ \frac{1}{10}\binom{k}{3}\binom{k+2}{3}, \text{ ecc.}$$

Il primo di questi numeri esprimerà la classe della varietà (Z), luogo degli S_{k-1} tangenti alla (P), coi punti aventi per coordinate le espressioni $u_\lambda v_\mu + u_\mu v_\lambda$. In fatti un iperpiano tangente alla (Z) in un punto contiene i due S_{k-1} generatori passanti per esso, ed è quindi tangente a (P) in ∞^1 punti. (Questi costituiscono una conica; e l'iperpiano riesce tangente alla (Z) negli ∞^2 punti del piano di quella conica).

Quanto all'ordine di (Z), sarà dato dal numero delle soluzioni di $2k-2$ equazioni lineari fra le dette espressioni $u_\lambda v_\mu + u_\mu v_\lambda$. Verrebbero $\binom{2k-2}{k-1}$ soluzioni (u, v). Ma siccome con ciascuna vi sarà pure la simmetrica, così (n° 18) bisognerà prendere la metà: cioè l'ordine della (Z) è $\binom{2k-3}{k-2}$.

Considerando il sistema degl'infiniti S_k tangenti alla V_k dal punto di vista del § 2, cioè della teoria generale dei sistemi infiniti di S_k, abbiamo una particolarità essenziale: che cioè ognuno di quegli S_k, G, ammette come punto singolare o foco il suo punto di contatto x colla V_k, od ogni suo punto di contatto, se ne avesse più ([18]). In fatti, presa una ∞^1 qualunque di quegli S_k, essi saranno tangenti ad una curva luogo di punti x: sicchè si può applicare il n^0 4.

Se la V_k *è toccata da ogni suo* S_k *tangente in più di un punto, sarà toccata da un* S_k *tangente generico in tutti i punti di uno spazio.* Invero, projettando in un S_{k+1}, si avrà in questo una V_k coi suoi *iperpiani* (S_k) tangenti; e si potrà applicare l'ultima proposizione in corsivo del n^0 16.

Se è un S_{l-1} $(l \geq 1)$ lo spazio lungo cui la V_k è toccata da un suo S_k tangente generico G, si potrà (n^0 2) riguardare lo S_{l-1} come intersezione di G con ogni S_k tangente infinitamente vicino. Gli S_k tangenti alla V_k saranno ∞^{k-l+1} e la varietà W da essi generata avrà la dimensione $2k - l + 1$, nell'ipotesi che questo numero sia $\leq n$, e che per un punto generico di W non passi un'infinità di quegli S_k. Lo spazio $[2k - l + 1]$ tangente a W in un punto X di G rimarrà fisso, quando X si muova su un S_l passante per lo S_{l-1} di contatto di G colla V_k. Ciò risulta dalla prima parte di questo n^0; ed anche dal n^0 3, applicato alle diverse ∞^1 di S_k tangenti alla V_k, condotte tutte per G.

Seguendo ancora l'indirizzo della teoria generale dei sistemi infiniti di S_k, si applichino i n^i 1 e 2, nei quali i punti $A_0, A_1, \ldots, A_k$ si assumano rispettivamente in $x, x^1, \ldots, x^k$; e le τ (come al n^0 6) si assumano funzioni di un parametro t. Allora lo spazio congiungènte G ad uno S_k infinitamente vicino, che era lo spazio di G e dei punti A'_λ, diventerà qui lo spazio di G e dei k punti

$$\sum_\lambda d\tau_\lambda \cdot x^{\lambda\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, k).$$

Ne deriva che, dal punto di vista attuale, ogni iperpiano ξ passante per G il quale verifichi le k equazioni (16) può riguardarsi come contenente lo S_k tangente alla V_k nel punto infinitamente vicino ad x nella direzione $d\tau$; e viceversa. Si ha così una nuova proprietà per gl'iperpiani tangenti al cono (GP).

([18]) In conseguenza non si potrebbero, ad esempio, applicare all'attuale sistema di spazi i risultati del n^0 9 per ottenere i caratteri del cono (GP) (n^0 19).

21. Lo spazio a cui appartiene il cono (GP), cioè lo spazio del punto x e dei suoi derivati primi e secondi $x^{\lambda}, x^{\lambda\mu}$, gode della proprietà che gl'iperpiani per esso sono quelli che segano la V_k secondo varietà V_{k-1} aventi in x punto triplo (almeno) ([19]). Se quei punti sono linearmente indipendenti, quello spazio ha la dimensione $k(k+3)/2$. L'abbassarsi di questa, per ogni posizione di x sulla V_k, significherà che *le* $\mathrm{n}+1$ *funzioni* x_i *delle* k *variabili indipendenti* $\tau_1 \dots \tau_k$ *sono soluzioni di uno stesso sistema di equazioni lineari omogenee a derivate parziali di 2° ordine.*

In questo modo si presenta tutta una serie di varietà V_k particolari, in corrispondenza con tali sistemi di equazioni differenziali. Per $k=2$ sono quelle superficie alle quali è dedicata, in massima parte, la Nota citata in ([13]), la quale finisce appunto con un accenno alle V_k per k qualunque ([20]).

Qui non vogliamo trattenerci su quell'argomento. Solo, in relazione con quanto si diceva nel precedente n° 20, osserviamo che se un S_k generico tangente alla V_k la tocca in un sol punto, o più in generale in un S_{l-1} $(l \geq 1)$ e non in uno spazio superiore, sicchè la varietà W del n° 20 avrà la dimensione $2k - l + 1$, nell'ipotesi che questo numero sia $\leq n$, dovrà avere questa stessa dimensione lo spazio tangente in X a W, il quale sta nello spazio di x e dei punti x^{λ} e $x^{\lambda\mu}$. Ne deriva che quest'ultimo spazio avrà la dimensione $\geq 2k - l + 1$; e però le equazioni lineari omogenee indipendenti che legano quei punti saranno al più $k(k+3)/2 - (2k - l + 1)$, ossia $k(k-1)/2 + l - 1$. Dunque (*): *Se il sistema di equazioni di*

([19]) Ciò risulta analiticamente come al n° 8 della Memoria citata in ([13]); o geometricamente dal fatto che lo spazio suddetto contiene i piani osculatori in x alle linee della V_k: vedi ([16]) e la Nota del sig. Del Pezzo ivi citata.

([20]) Colgo quest'occasione per aggiungere due citazioni di lavori anteriori al mio, nei quali son già considerate le suddette superficie:

C. Guichard, *Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques* (Ann. École norm. sup. (Paris), (3) XIV, 1897, pp. 467-516; XV, 1898, pp. 179-227; XX, 1903, pp. 181-288). Quelli che il sig. Guichard studia col nome di *réseaux* sono precisamente i sistemi doppi di *caratteristiche* delle mie superficie.

E. E. Levi, *Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio* (Tesi di laurea del 1905) (Ann. Scuola norm. sup. Pisa, 10, 1908, pp. 1-99). Nell'ultimo Cap. di questa Tesi (dedicata principalmente alle questioni *metriche*) s'incontrano le mie superficie, col nome di *superficie a punti planari.*

(*) Nell'enunciato deve essere introdotta una restrizione; v. più avanti la Nota XXVIII a p. 115 di questo volume (N. d. R.).

2^0 ordine a derivate parziali, avente le x_i per soluzioni, si compone di più che $k(k-1)/2$ equazioni linearmente indipendenti, la V_k starà in uno spazio di dimensione minore di $2k$, oppure sarà tale che ogni suo S_k tangente la toccherà in infiniti punti. Più precisamente, se il numero delle dette equazioni è $k(k-1)/2+m$, lo spazio cui appartiene la V_k avrà dimensione $<2k$, oppure ogni S_k tangente alla V_k la toccherà lungo un S_m o spazio superiore ([21]).

Risulta pure che, limitandoci per semplicità al caso che la varietà W abbia la dimensione $2k$, se le equazioni linearmente indipendenti del sistema differenziale di 2^0 ordine sono precisamente $k(k-1)/2$, il cono $(G\ P)$ si riduce a un S_{2k}, e la V_k dà coi suoi S_k tangenti una varietà W tale che in tutti i punti di uno stesso di quegli S_k, G, vi è uno S_{2k} tangente fisso. Nel caso generale del n^0 20 ogni S_{2k} tangente a W in un punto di G la toccava solo lungo una retta passante per x. Possono esservi tali sistemi differenziali di 2^0 ordine per le funzioni x_i che ogni S_{2k} tangente a W venga a toccarla lungo un piano, un S_3, ecc.

22. Il trasporto per dualità dei n^i 17-20 riconduce alla ∞^h d'iperpiani $\xi(\tau_1 \dots \tau_h)$ del n^0 16, coi suoi *spazi caratteristici*.

Si tratterà ora, ad esempio, per uno $[n-h-1]$ caratteristico Γ (duale dello spazio tangente G della V_k), corrispondente a certi valori delle τ, di considerare quei suoi punti x, e quegl'iperpiani, o spazi caratteristici, corrispondenti a valori infinitamente vicini $\tau + d\tau$, tali che valgano le equazioni, duali delle (16),

$$\sum_\lambda (\xi^{\lambda\mu},\ x)\, d\tau_\lambda = 0 \qquad (\mu = 1, \dots, h), \tag{22}$$

da cui segue

$$|(\xi^{\lambda\mu},\ x)| = 0\,. \tag{23}$$

Senza stare a tradurre nel linguaggio duale tutte le cose dei citati n^i, rileviamo solo che la fine del n^0 20 prova che alle equazioni (22) si può dare il seguente significato: il punto x di Γ sta sullo spazio caratteristico infinitamente vicino $\tau + d\tau$. In conseguenza abbiamo che: *il luogo dei punti in cui lo spazio caratteristico Γ della data ∞^h d'iperpiani è incontrato da spazi caratteristici infinitamente vicini, ossia il luogo dei fochi di Γ, entro al sistema di tutti gli spazi*

([21]) Per $k=2$, $m=1$ si ritrova la proposizione dimostrata in altro modo al n. 12 della Nota citata in ([13]).

caratteristici, è una varietà di dimensione n — h — 2 *e di ordine* h, *rappresentata su* Γ *dall'equazione* (23).

In generale gli $[n-h-1]$ caratteristici hanno per luogo, come già si disse, una V_{n-1}. Su questa le ∞^h V_{n-h-2} d'ordine h formeranno una V_{n-2} *singolare.*

È notevole il caso di $h = n - 2$. Allora ciascuno degli ∞^{n-2} iperpiani ha una retta caratteristica (retta di contatto colla V_{n-1} inviluppo): e su questa saranno $n-2$ i punti singolari o fochi. Passando poi da una retta ad una successiva incidente in un foco, e così continuando, come già s'è fatto al n⁰ 14 in un caso analogo, concludiamo: *Se una* V_{n-1} *è tale che i suoi* S_{n-1} *tangenti la tocchino lungo rette, queste* ∞^{n-2} *rette saranno tangenti ad* n — 2 *varietà* V_{n-2} (*o falde di una stessa* V_{n-2}). — Queste V_{n-2} son l'analogo dello *spigolo di regresso* di una superficie sviluppabile. — Anche ora s'intende che al posto di qualcuna di quelle V_{n-2} può comparire una varietà di minor dimensione, *incontrata* (senza tangenza) da tutte le ∞^{n-2} rette.

Quella proposizione, così come s'è enunciata, vale anche se la V_{n-1} *è immersa in uno spazio superiore ad* S_n. Ciò si vede subito, projettando la varietà su un S_n.

23. Com'è ben noto, il parlare d'*incidenza fra spazi infinitamente vicini* è solo un modo abbreviato per esprimere talune relazioni di *contatto*, ovvero il fatto che è infinitesima d'ordine superiore una qualche determinata grandezza (distanza, angolo, ecc.). Quindi, secondo l'ordine assegnato a quel contatto, o l'ordine infinitesimale di questa grandezza, si posson ottenere risultati diversi intorno a quell'*incidenza.* Si deve allora risalire ai significati precisi di quel modo di parlare, se non si voglion trovare contraddizioni.

Così riprendiamo ora direttamente la questione di trovare *un punto* x *comune a due spazi caratteristici infinitamente vicini, della* ∞^h *d'iperpiani* $\xi(\tau_1 \ldots \tau_h)$ *del* n⁰ 16.

Il punto x stia dunque sullo spazio caratteristico Γ dell'iperpiano $\xi(\tau)$, cioè sugli $h+1$ iperpiani

$$\xi(\tau), \quad \xi^\lambda(\tau) \qquad\qquad (\lambda = 1, \ldots, h),$$

ed anche su quello dell'iperpiano $\xi(\tau + d\tau)$, ossia sugli altri $h+1$ iperpiani

$$(24)\; \xi(\tau + d\tau) = \xi + \sum_\lambda \xi^\lambda \, d\tau_\lambda + \frac{1}{2}\sum_{\lambda\mu} \xi^{\lambda\mu} \, d\tau_\lambda d\tau_\mu + \frac{1}{6}\sum_{\lambda\mu\nu} \xi^{\lambda\mu\nu} \, d\tau_\lambda d\tau_\mu d\tau_\nu + \ldots$$

$$(25) \qquad \xi^\lambda(\tau + d\tau) = \xi^\lambda + \sum_\mu \xi^{\lambda\mu} \, d\tau_\mu + \ldots.$$

Essendo le $d\tau$ infinitesime, gl'iperpiani distinti su cui così vien costretto a stare x si riducono ai $2h+2$ seguenti: ξ ed i ξ^λ; poi, per le (25), gl'iperpiani $\sum_\mu \xi^{\lambda\mu}\, d\tau_\mu$, e infine per la (24) l'iperpiano

$$\sum_{\lambda\mu\nu} \xi^{\lambda\mu\nu}\, d\tau_\lambda\, d\tau_\mu\, d\tau_\nu\,.$$

Abbiamo cioè per x il sistema d'equazioni

$$(\xi x)=0\,,\quad (\xi^\lambda x)=0 \qquad (\lambda=1,\ldots,h) \tag{14}$$

$$\sum_\mu (\xi^{\lambda\mu} x)\, d\tau_\mu = 0 \qquad (\lambda=1,\ldots,h) \tag{22}$$

$$\sum_{\lambda\mu\nu} (\xi^{\lambda\mu\nu} x)\, d\tau_\lambda\, d\tau_\mu\, d\tau_\nu = 0. \tag{26}$$

Sono, *non solo le equazioni* (14) e (22), le quali ci davano al n^0 preced. i *fochi* di Γ entro al sistema di tutti gli spazi caratteristici: ma *in più* la nuova equazione (26). Prima, da un punto di vista (corrispondente al riguardare come incidenti due tangenti successive di una curva sghemba) consideravamo le (14) e (22) come sufficienti per l'incidenza in x dei due spazi caratteristici infinitamente vicini. Ora invece, da un altro punto di vista, occorre anche la (26).

Sulla V_{n-h-2} d'ordine h, luogo dei fochi di Γ (n^0 22), abbiamo ora, come luogo di x, una V_{n-h-3}, che si rappresenta eliminando le $d\tau$ fra le equazioni precedenti, e risulta così d'ordine $h(3h-1)/2$. Le $d\tau$ si posson prendere ad arbitrio per verificare quel sistema (con punti x convenienti), se $2h+2 \leq n$. In caso contrario, l'eliminazione delle coordinate x_i ci riduce all'uguaglianza a zero di una matrice avente $h+1$ colonne ed $n-h$ linee, cogli elementi forme lineari delle $d\tau$, tranne che in una colonna, dove sono forme cubiche. È un sistema equivalente a $2h-n+2$ equazioni fra le $d\tau$, di ordine

$$\binom{h}{n-h-2} + 3\binom{h}{n-h-1}.$$

24. Per la V_k data come luogo di punti le considerazioni duali delle precedenti portano a riguardare come tangente in due suoi punti successivi (τ) e $(\tau+d\tau)$, un iperpiano ξ quando verifichi, non solo le equazioni (13) e (16) (che ci bastavano alla fine del n^0 20), ma anche la duale della (26):

$$\sum_{\lambda\mu\nu} (\xi x^{\lambda\mu\nu})\, d\tau_\lambda\, d\tau_\mu\, d\tau_\nu = 0\,. \tag{27}$$

Un iperpiano siffatto segherà la V_k secondo una V_{k-1} avente in x un *binodo*, intendendo con ciò per brevità un punto doppio limite di due punti doppi infinitamente vicini (un *tacnodo* per una curva, un *punto biplanare della specie* B_4 per una superficie, ecc.). In termini finiti possiam dire che un *binodo* della V_{k-1} sarà per noi un punto doppio x, nel quale il cono quadrico tangente è dotato di una generatrice doppia (*spigolo* del binodo) avente in x incontro quadripunto colla V_{k-1}.

Che in fatti la V_{k-1} sezione della V_k con un iperpiano ξ soddisfacente le (13) e (16) abbia il cono tangente in x dotato di generatrice doppia nella tangente $d\tau$ della V_k, sappiamo già dal n⁰ 17. Quanto all'incontro quadripunto ora nominato, prendiamo sulla V_k una curva passante per x nella direzione $d\tau$, e cerchiamone lo S_3 osculatore, come nella nota [16] s'era fatto pel piano osculatore (calcolando cioè in più il punto d^3x/dt^3). Si verifica subito che quello S_3 starà nell'iperpiano ξ, se questo, oltre alle (13) e (16), soddisfa l'equazione (27). È come dire che in x cadono 4 intersezioni di ξ con quella curva. Ciò si applichi alla curva sezione della V_k con un $[n-k+1]$ tirato ad arbitrio per la tangente $d\tau$. Potremo dire che in x cadono 4 intersezioni di ξ, della V_k e del $[n-k+1]$, cioè 4 intersezioni della V_{k-1} con questo spazio. La V_{k-1} ha in x incontro quadripunto con ogni $[n-k+1]$ passante per la retta $d\tau$. E ciò appunto si esprime più brevemente dicendo che essa ha in x incontro quadripunto con la retta stessa.

Per lo S_k G *tangente in* x *alla* V_k *passa, se* $\mathrm{k} \leq \mathrm{n}-3$, *entro la* ∞^{n-k-2} *d'iperpiani di classe* k *considerata al* n⁰ 17, *una* ∞^{n-k-3} *d'iperpiani, composta di quelli che segano la* V_k *secondo una* V_{k-1} *avente in* x *un binodo. La classe di questo sistema è* $\mathrm{k}(3\mathrm{k}-1)/2$. *Gli spigoli dei binodi costituiscono, entro* G, *tutta la stella di centro* x *se* $2\mathrm{k} \leq \mathrm{n}-2$; *se no, un cono di vertice* x, *di dimensione* $\mathrm{n}-\mathrm{k}-2$ *e d'ordine*

$$\binom{k}{n-k-2}+3\binom{k}{n-k-1}.$$

Così per $k=2$, cioè per una *superficie*, si tratterà degl'iperpiani che la segano secondo curve dotate di *tacnodo*. Dato il punto x della superficie, tali iperpiani formano, se $n \geq 5$, *una* ∞^{n-5} *di classe* 5 [22]. Per $n=5$ si hanno così 5 tangenti notevoli in ogni punto della

---

[22] Dalle cose esposte si trae subito il legame colla V_6 del 5⁰ ordine (cono di vertice G), cui si giunge alla fine del n⁰ 6 della Nota citata in [13]. Gli ∞^{n-5} iperpiani di cui sopra si parla son quelli tangenti (cioè passanti per gli S_5 generatori) della detta V_6.

superficie e 5 iperpiani tangenti notevoli corrispondenti a quelle rette [23].

Per $k = 3$, ossia per una V_3, si ha in ogni punto x, se $n \geq 6$, una ∞^{n-6} di classe 12 d'iperpiani che dànno per sezioni superficie con binodo (punto biplanare della specie B_4) in x. Se $n = 7$ gli spigoli di quei binodi formano, nello S_3 tangente alla V_3, un cono di 6^0 ordine.

§ 5.

Sulle estensioni del concetto di varietà sviluppabile.

25. Alla estensione del detto concetto, che ci fu fornita (n^i 4 e 5) da particolari varietà semplicemente infinite di spazi, se n'è aggiunta poi (n^0 16) un'altra: *le varietà* V_k *aventi meno che* ∞^k S_k *tangenti*, sicchè ognuno di questi le tocca in infiniti punti, i quali vengono necessariamente (n^0 20) a costituire uno spazio. (Esempio la varietà W dei n^i 20 e 21).

Possiamo riprendere l'indirizzo del n^0 4 ed estenderlo a varietà più volte infinite di spazi, domandando *una* ∞^α $(\alpha > 1)$ *di* S_k *tale che due* S_k *infinitamente vicini siano sempre incidenti, per* $n > 2k$ (vale a dire: che ogni ∞^1 di S_k contenuta in quella ∞^α si componga di spazi tangenti ad una stessa linea, o passanti per uno stesso punto).

Se $k = 1$, cioè se si tratta di *rette*, la questione è subito risolta: *le* ∞^α *rette passeranno tutte per un punto, oppure staranno in un piano*. Consideriamo in fatti una ∞^2 di rette entro la ∞^α: la nostra ipotesi significa che tutte le rigate della ∞^2 sono sviluppabili. Projettando in S_3 avremo una congruenza di rette, la quale, per una nota proposizione [24], sarà necessariamente una stella oppure un

---

[23] Così per una *congruenza di rette* dello spazio ordinario si hanno i complessi lineari che la segano secondo rigate dotate di generatrice tacnodale.

[24] La si può dedurre, ad esempio, dal fatto ovvio che, se una curva è tale che tutte le sue tangenti s'appoggino ad una retta fissa r, la curva è piana. (Si assuma la r come retta all'infinito del piano xy; l'ipotesi fatta, per la curva i cui punti han per coordinate $x\ y\ z$ delle date funzioni di un parametro, significherà che $dz = 0$, onde $z = \text{cost.}$). Prese due rette qualunque a, b della congruenza, e tirata una retta r incidente ad esse, la rigata delle rette della congruenza uscenti dai punti di r sarà, per ipotesi, sviluppabile, cioè un cono oppure l'insieme delle tangenti di una curva giacente in un piano per r. In conseguenza a e b saranno sempre incidenti.

piano rigato. Dunque due rette qualunque della ∞^{a} si projettano sempre in S_3 secondo due rette incidenti, e però sono incidenti esse stesse: donde l'enunciato.

Se $k > 1$, il problema si risolve ancora facilmente, come ora vedremo, nel caso in cui lo spazio d'incidenza (o spazio singolare: n^0 2) di un S_k della ∞^{a} coi suoi infinitamente vicini non vari al mutar di questi; ed invece esige maggiore studio nel caso opposto, come risulterà dalla trattazione che ne faremo poi (§ 7) per $k = 2$ [25].

26. Domandiamo dunque in generale *una* ∞^{a} *di* S_k, *tale che ogni* S_k *abbia un* S_l *singolare fisso, per tutte le* ∞^{1} *contenute nella* ∞^{a} *e passanti per esso*: cioè tale che ogni S_k sia incontrato secondo uno stesso spazio S_l da tutti gli S_k infinitamente vicini.

Dico che la varietà V_m luogo di tutti gli S_l così ottenuti (varietà che non abbraccia, come risulterà, tutto S_n) ha per spazi tangenti (nel senso di passare per i suoi S_m tangenti) tutti gli S_k della ∞^{a}.

In fatti sia G un S_k del sistema; e per un suo punto singolare P si tiri su quella V_m una linea arbitraria L che incontri ∞^{1} degli S_l nominati. Considerando i punti della L in quanto son singolari ognuno per un S_k della ∞^{a}, avremo una ∞^{1} di S_k, la quale pel n^0 4 si comporrà di spazi tangenti ad L. Così G è tangente in P ad ogni linea come L di V_m e però conterrà lo S_m tangente in P alla V_m.

Ne segue che $m \leq k$.

Viceversa abbiasi una ∞^{a} di S_k, ognun dei quali passi per un S_m tangente di una data V_m. Anzi, ammettiamo anche la possibilità che ognuno di quegli S_k contenga gli S_m tangenti alla V_m in tutti i punti di un $S_l\,(l \geq 0)$ generatore di questa varietà. Allora, presi entro la ∞^{a} una qualunque ∞^{1} di S_k, essi riesciranno tangenti lungo i rispettivi ∞^{1} S_l alla varietà luogo di questi; e quindi (n^0 4) ogni S_k ammetterà come punti singolari tutti i punti del suo S_l.

---

(25) Citiamo intanto questo esempio semplicissimo. Si fissi, entro un S_ν dello S_n, un'infinità qualsiasi di spazi S_i, con $2i \geq \nu$. Per questi si tirino, entro S_n, infiniti S_k. Allora due qualunque di questi S_k, in particolare due S_k infinitamente vicini, avranno certo in comune un $[2i - \nu]$.

27. Un altro modo di generalizzare la nozione di superficie sviluppabile dello spazio ordinario conduce alla seguente proposizione:

In S_n *una* V_{n-1} *tale che ogni suo punto sia parabolico, cioè tale che il cono quadrico delle tangenti principali abbia sempre una generatrice doppia, contiene ogni tale retta ed ha lungo essa un iperpiano tangente fisso.*

Applicando il n⁰ 17, in cui si ponga $k = n - 1$, l'ipotesi fatta sulla V_{n-1} significa che, se per ogni punto $x(\tau_1 \ldots \tau_{n-1})$ si determina l'iperpiano ξ (tangente) colle n equazioni

$$(13) \qquad (\xi\, x) = 0, \qquad (\xi\, x^\mu) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n-1),$$

esisteranno poi sempre dei valori delle $d\tau$ tali da verificare le (16). Son le $d\tau$ corrispondenti alla suddetta generatrice doppia.

Consideriamo sulla V_{n-1} una ∞^{n-2} di linee che vadano appunto nelle direzioni così definite; e trasformiamo i parametri τ in modo che quelle linee diventino le *linee coordinate* τ_1 (cioè linee su cui sono costanti tutti i parametri τ tranne τ_1). Allora il verificarsi delle (16) con tutte le $d\tau_\lambda$ nulle, all'infuori di $d\tau_1$, ci dà

$$(28) \qquad (\xi\,,\, x^{1\mu}) = 0 \qquad (\mu = 1\,, \ldots, n-1)\,;$$

equazioni che dovranno aver luogo ogni volta che le ξ_i soddisfano alle (13) [26].

Ciò posto, si muova x su una di quelle linee, variando cioè la sola τ_1. Io dico che l'iperpiano ξ determinato dalle (13) non muta, cioè che non varieranno i rapporti $\xi_i : \xi_j$; ossia dico che

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1}(\xi_i : \xi_j) = 0\,,$$

$$\xi_i\, \xi_j^1 - \xi_j\, \xi_i^1 = 0\,,$$

vale a dire che le ξ_i^1 son proporzionali alle ξ_i, per $i = 0, 1, \ldots, n$. In fatti derivando le (13) rispetto a τ_1, ed applicando le stesse (13) e le (28), abbiamo:

$$(\xi^1\, x) = 0, \qquad (\xi^1\, x^\mu) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n-1),$$

sicchè le ξ_i^1 verificano le (13), messe al posto delle ξ_i: son dunque proporzionali a queste.

---

[26] Sicchè le funzioni x_i di $\tau_1 \ldots \tau_{n-1}$ sono soluzioni di uno stesso sistema di $n-1$ equazioni alle derivate parziali di questo tipo: $\partial^2 x / \partial\tau_1\, \partial\tau_\mu =$ forma lineare di x e delle sue prime derivate rispetto alle τ (coi coefficienti funzioni delle τ).

Così gl'iperpiani tangenti alla V_{n-1} la toccano lungo le dette linee. Quindi, pel n^0 16 (ultima proposizione in corsivo), quelle linee saranno rette; e il teorema che volevamo è stabilito.

Si supponga, più in particolare, che *il cono quadrico delle tangenti principali alla* V_{n-1} *in un suo punto generico abbia un* S_l *doppio.* Applicando allora quel che abbiamo dimostrato a singole rette uscenti dal punto e giacenti nello S_l, si conclude che *la* V_{n-1} *conterrà tutti gli* S_l *nominati, ed avrà lungo ognuno di essi un iperpiano tangente fisso.*

§ 6.

Varietà rigate, con uno spazio tangente fisso lungo ogni generatrice.

28. Abbiasi anzitutto una varietà $V_{\alpha+1}$ luogo di ∞^α rette ($\alpha < n-1$), tale che lungo ognuna di queste rette vi sia *un piano tangente fisso*, e non uno spazio superiore: tale cioè che gli $S_{\alpha+1}$ tangenti alla varietà nei vari punti di una generatrice si taglino sempre secondo un piano.

Determiniamo le ∞^α rette mediante coppie di punti A, B funzioni degli α parametri $\tau_1 \ldots \tau_\alpha$. La varietà luogo di A sia una V_α: la indicheremo con (A). Lo S_α che la tocca in un punto A ed il piano tangente lungo la retta AB alla $V_{\alpha+1}$ stanno nello $S_{\alpha+1}$ che tocca quest'ultima varietà in A; e per conseguenza si taglieranno in generale secondo una retta passante per A. Così in ogni punto A della (A) si ha una tangente a questa, giacente nel piano tangente lungo AB alla $V_{\alpha+1}$. Queste tangenti della (A) invilupperanno una $\infty^{\alpha-1}$ di linee tracciate su quest'ultima varietà. Assumiamo i parametri τ in modo che queste linee sian precisamente le linee τ_1 della (A) (sulle quali varia solo τ_1). Allora il piano tangente fisso alla $V_{\alpha+1}$ lungo la generatrice AB dovrà essere quello dei punti A, B, A^1.

La $V_{\alpha+1}$ è il luogo del punto

$$X = A + uB,$$

al variare dei parametri u e $\tau_1 \ldots \tau_\alpha$. Lo $S_{\alpha+1}$ tangente ad essa in quel punto è lo spazio di X e dei suoi derivati rispetto a quei parametri, cioè di

$$X, \quad B, \quad A^1 + uB^1, \ldots, A^\alpha + uB^\alpha;$$

ossia lo $S_{\alpha+1}$ dei punti

$$A, \quad B, \quad A^1 + uB^1, \ldots, A^\alpha + uB^\alpha. \tag{29}$$

Per l'ipotesi, questo spazio dovrà passare, qualunque sia u, oltre che per A e B, anche per A^1. Ma esso contiene $A^1 + uB^1$. Dunque conterrà pure B^1. Se i 4 punti A, B, A^1, B^1 fossero linearmente indipendenti, il loro S_3 starebbe negli $S_{\alpha+1}$ tangenti alla $V_{\alpha+1}$ nei vari punti X della retta AB; mentre noi abbiam supposto che questi $S_{\alpha+1}$ si taglino solo secondo un piano. Bisognerà dunque che A, B, A^1, B^1 stiano in un piano.

Ciò posto, consideriamo, entro la nostra ∞^α di rette, le $\infty^{\alpha-1}$ rigate, caratterizzate dall'essere in ognuna tutti i parametri costanti, tranne τ_1. Il fatto che quei 4 punti stanno in un piano significa che per una tal rigata, descritta dalla retta AB al variare di τ_1, il piano tangente in A coincide col piano tangente in B; cioè che vi è un piano tangente fisso per tutti i punti di una generatrice. La rigata è dunque *sviluppabile*, cioè un cono, oppure l'insieme delle tangenti di una curva.

Viceversa, se si può spezzare una ∞^α di rette in $\infty^{\alpha-1}$ rigate sviluppabili, sì che per ogni retta ne passi una, il piano che è tangente in tutti i punti della retta alla sviluppabile starà negli $S_{\alpha+1}$ tangenti in quei punti alla $V_{\alpha+1}$ luogo delle ∞^α rette.

Possiamo dunque, introducendo la varietà luogo dei vertici, o degli spigoli di regresso, delle $\infty^{\alpha-1}$ sviluppabili, formulare il seguente risultato:

Le $V_{\alpha+1}$ *rigate* ($\alpha < n - 1$) *tali che lungo ogni generatrice vi sia un piano tangente fisso* [27] *sono solo quelle che ammettono una varietà direttrice* (cioè varietà incontrata da tutte le generatrici) *di dimensione* $\alpha - 1$, *o minore, e quelle composte di tangenti di una* V_α.

Si può dire che queste particolari ∞^α di rette son caratterizzate da questo fatto: che ognuna è incontrata da una infinitamente vicina, cioè ognuna ammette un foco o punto singolare; il che non avverrebbe in generale, nell'ipotesi attuale $\alpha < n - 1$ (v. n⁰ 12).

29. Passiamo ora a studiare quelle $V_{\alpha+1}$ rigate, che ammettono lungo ognuna delle ∞^α rette generatrici, non soltanto un piano, ma un S_c tangente fisso (ove $2 \leq c \leq \alpha + 1$), cioè un S_c come intersezione degli $S_{\alpha+1}$ tangenti nei punti di una generatrice. Si tratterà evidentemente di varietà tanto più singolari quanto maggiore è il numero c.

---

[27] Senza escludere, in questo enunciato (come risulterà dal seguito), che sia fisso uno spazio tangente di dimensione superiore.

Dimostriamo che anche in questo caso la corrispondenza che le ∞^α rette determinano tra i punti di due V_α direttrici, per esempio di quelle (A) e (B) che son descritte dai punti A e B, è tale che alle linee dell'una tangenti nei singoli punti A ai rispettivi spazi S_c corrispondono sull'altra varietà le linee tangenti nei punti B agli stessi spazi.

A questo scopo osserviamo anzitutto, analogamente al principio del n^0 28, che lo S_α tangente in A alla (A) sta collo S_c relativo ad AB in uno stesso $S_{\alpha+1}$, e però ha comune con esso un S_{c-1}. In conseguenza potremo di nuovo scegliere il sistema dei parametri $\tau_1 \dots \tau_\alpha$ sì che sulla (A) le linee coordinate τ_1 sian tangenti in ogni loro punto A allo spazio S_c della corrispondente retta AB (ossia tangenti allo S_{c-1} nominato): sicchè lo S_c conterrà i punti A, B, A^1. Per ipotesi lo $S_{\alpha+1}$ tangente alla $V_{\alpha+1}$ nel punto X del n^0 preced., cioè lo $S_{\alpha+1}$ dei punti (29), passa per lo S_c, e quindi contiene anche A^1: combinando con $A^1 + uB^1$, si vede che conterrà pure B^1. Questo punto non dipende da u, sicchè sarà comune a tutti gli $S_{\alpha+1}$ tangenti alla $V_{\alpha+1}$ nei punti della retta AB; e quindi starà nello S_c di loro intersezione. Ciò prova appunto che anche sulla varietà (B) le linee τ_1 sono tangenti agli S_c.

Com'è noto, la corrispondenza puntuale che ci è data fra le varietà (A) e (B) dà origine ad una collineazione fra le stelle delle tangenti in A e B alle linee omologhe passanti per questi punti. In particolare saranno, per quel che ora s'è dimostrato, in collineazione le stelle minori contenute in quelle due e nello S_c: cioè due stelle di centri A e B, giacenti in due S_{c-1} dello S_c. Questi due S_{c-1} si segano in un S_{c-2}, entro cui le due stelle determinano un'omografia, che avrà in generale $c-1$ punti uniti. Ne deriva che per la retta AB passano in generale, entro lo S_c, $c-1$ piani, ognun dei quali segna sugli spazi tangenti in A e B alle varietà (A) e (B) due tangenti omologhe.

Ora per ciascuno di questi $c-1$ piani passanti per AB si può ripetere ciò che al n^0 preced. s'era fatto per un piano tangente lungo AB alla $V_{\alpha+1}$. Così possiamo considerare sulla (A) quelle $\infty^{\alpha-1}$ linee che son toccate in ogni punto A da uno determinato dei $c-1$ piani, e le linee omologhe sulla (B), le quali godranno della stessa proprietà. Tali linee di (A) e (B) saranno di nuovo direttrici di $\infty^{\alpha-1}$ rigate sviluppabili, componenti la nostra ∞^α di rette.

Concludiamo: *Una* $\mathrm{V}_{\alpha+1}$ *rigata, tale che lungo ogni generatrice vi sia un* S_c *tangente fisso* (*ove* $2 \leq c \leq \alpha + 1$), *contiene in generale* $c-1$ *varietà* V_α *alle quali le generatrici sono tangenti.* Ognuna di queste V_α (*varietà focali*) può però essere sostituita da una varietà di minor dimensione, incontrata (senza contatto) dalle ∞^α rette.

In particolare, nel caso estremo che $c = \alpha + 1$, ritroviamo la proposizione finale del n⁰ 22.

30. Fermiamoci ora precisamente sul caso di una $V_{\alpha+1}$ rigata, la quale lungo ognuna delle sue ∞^α generatrici ammetta uno $S_{\alpha+1}$ tangente fisso: nell'ipotesi che una almeno delle α V_α focali non degeneri.

Partiamo appunto da una data V_α, *e da un sistema* ∞^α *di sue tangenti* g *(una per ciascun punto); e domandiamo quando è che la* $\mathrm{V}_{\alpha+1}$ *luogo di queste rette ammette lungo ognuna di esse un* $\mathrm{S}_{\alpha+1}$ *tangente fisso.*

Analogamente a quanto s'è fatto nei n^{i} preced., scegliamo i parametri $\tau_1 \ldots \tau_\alpha$ che determinano i punti x della V_α in modo che su questa le linee inviluppate dalle ∞^α rette g siano le linee coordinate τ_1. Allora le g stesse saranno le congiungenti dei punti x e x^1; la $V_{\alpha+1}$ sarà il luogo del punto

$$X = x + ux^1,$$

e lo $S_{\alpha+1}$ tangente ad essa in questo punto sarà lo spazio dei punti

$$x, \quad x^1, \quad x^{11}, \quad x^2 + u\, x^{12}, \ldots, x^\alpha + u\, x^{1\alpha}.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè questo $S_{\alpha+1}$ non muti al variar di u sarà: che stiano in uno stesso $S_{\alpha+1}$ i punti

$$x, \quad x^1, \quad x^2, \ldots, x^\alpha, \quad x^{11}, \quad x^{12}, \ldots, x^{1\alpha}.$$

Ciò significa che questi $2\alpha + 1$ punti son legati da $\alpha - 1$ equazioni lineari omogenee (a coefficienti funzioni dei parametri τ). *La varietà* V^α *appartiene a quelle classi speciali di cui s'è fatto cenno al* n⁰ 21 [28].

---

[28] Accenniamo un modo semplicissimo per costruire una V_α (di natura speciale) che soddisfi alle condizioni di questo n⁰ 30.

Si fissino una V_β e una V_γ, con $\beta + \gamma = \alpha$; e si consideri la $V_{\alpha+1}$ luogo delle ∞^α rette g che congiungono ogni punto B della V_β con ogni punto C della V_γ. Si riconosce subito, geometricamente come analiticamente, che lo $S_{\alpha+1}$ tangente a questa $V_{\alpha+1}$ in un punto qualunque x della retta BC sarà lo spazio congiungente quelli S_β, S_γ che son tangenti risp. in B e C alle V_β, V_γ. Per conseguenza quello $S_{\alpha+1}$ non muta, variando x sulla generatrice BC. Se su ciascuna delle ∞^α rette g si fissa un punto x generico, sì da ottenere i punti di una V_α, questa soddisferà alle condizioni volute.

Poichè il punto x e i suoi derivati primi son linearmente indipendenti, le $\alpha - 1$ equazioni si potranno risolvere rispetto ad $\alpha - 1$ degli α punti derivati secondi $x^{1\mu}$, esprimendoli come forme lineari di uno di essi (sia per esempio x^{11}) e di $x, x^1, \ldots, x^\alpha$.

Un significato geometrico di questa condizione per la varietà V_α si trae subito dal n⁰ 17 (postovi $k = \alpha$). Se un iperpiano ξ è tangente in x alla V_α, cioè passa per $x, x^1, \ldots, x^\alpha$, basterà imporgli ancora una sola condizione, per esempio il passaggio per x^{11}, perchè esso passi per tutti i punti $x^{1\mu}$, e quindi le α equazioni (16) sian soddisfatte prendendo nulle tutte le $d\tau_\lambda$ tranne $d\tau_1$. Fra gli $\infty^{n-\alpha-1}$ iperpiani tangenti in x alla V_α ve n'è (n⁰ 17) una $\infty^{n-\alpha-2}$ che dànno, in questa varietà, sezioni il cui cono quadrico tangente in x ha una retta doppia. Sono in generale gl'iperpiani tangenti al cono (GP), della fine del n⁰ 18. Orbene *nel caso attuale quella* $\infty^{n-\alpha-2}$ *d'iperpiani si spezza, contenendo come parte il sistema* $\infty^{n-\alpha-2}$ *degl'iperpiani passanti per un certo* $S_{\alpha+1}$ (che riescirà multiplo pel cono (GP)). *Le sezioni fatte sulla* V_α *da questo sistema d'iperpiani avranno in* x *coni quadrici tangenti dotati di una stessa retta doppia: la* g.

Si può anche esprimere così la stessa particolarità geometrica: il sistema lineare di coni quadrici, tangenti in x alle sezioni della V_α cogl'iperpiani che la toccano in x, è tale che una retta g della stella ha lo stesso $S_{\alpha-1}$ polare rispetto a tutti i coni.

Un altro modo di caratterizzare geometricamente la nostra V_α, e il sistema delle linee τ_1 inviluppate su essa dalle rette g, è il seguente: *la* V_α *è solcata da* $\infty^{\alpha-1}$ *linee tali che gli* S_α *tangenti ad essa nei punti di una tal linea sono gli* S_α *di una sviluppabile ordinaria* (n⁰ 5, fine: ora però includiamo anche i coni). In fatti sia data una V_α come luogo del punto $x(\tau_1 \ldots \tau_\alpha)$. Lo spazio S_α tangente in x, cioè lo S_α degli $\alpha + 1$ punti

$$x, \quad x^1, \ldots, x^\alpha,$$

quando x si muove su una linea τ_1 sarà funzione della sola τ_1. E la condizione perchè esso descriva un'ordinaria sviluppabile, vale a dire che esso stia sempre in un $S_{\alpha+1}$ col suo successivo, sarà (nⁱ 1 e 2) che siano in uno stesso $S_{\alpha+1}$ quegli $\alpha + 1$ punti coi loro derivati rispetto a τ_1, cioè $x^{11}, \ldots, x^{1\alpha}$. Ora questa è appunto la condizione che avevamo trovata al principio di questo n⁰. Vediamo pure che gli $S_{\alpha+1}$ delle sviluppabili considerate sono appunto gli $S_{\alpha+1}$ tangenti lungo le rette g alla $V_{\alpha+1}$ luogo di queste rette. Ognuno di essi congiunge in generale lo S_α tangente alla V_α in un suo punto x col piano osculatore in x alla linea τ_1.

Enunciamo anche esplicitamente questo risultato: *Se una* $V_{\alpha+1}$ *rigata è tale che lungo ogni sua generatrice esista un* $S_{\alpha+1}$ *tangente fisso, gli* ∞^{α} $S_{\alpha+1}$ *tangenti si distribuiscono in generale (in* α *modi diversi) in* $\infty^{\alpha-1}$ *sistemi semplicemente infiniti, composti degli spazi* $S_{\alpha+1}$ *di una sviluppabile ordinaria.*

31. *Ogni* V_{n-2} *di* S_n *soddisfa alle condizioni che s'imponevano nel n° preced. alla* V_{α}. Basta porre $\alpha = n - 2$ per accertarsene. Infatti il sistema lineare di coni quadrici si ridurrà ora ad un *fascio* di coni uscenti dal punto x della V_{n-2}, e provenienti dal *fascio* degl'iperpiani che passano per lo S_{n-2} tangente in x. Fra questi iperpiani $n - 2$ daranno coni quadrici dotati di rette doppie. Son queste $n - 2$ rette uscenti da x, costituenti un $(n-2)$-spigolo autopolare rispetto a tutti i coni del fascio, che si posson prendere come rette g del n^0 preced.

Vediamo dunque che una V_{n-2} di S_n è in generale solcata da $n - 2$ sistemi ∞^{n-3} di linee, tali che le ∞^{n-2} rette tangenti alle linee di uno stesso sistema formano una V_{n-1} avente lungo ogni generatrice un iperpiano tangente fisso. Quelle ∞^{n-2} rette saranno poi tangenti, in generale, oltre che alla V_{n-2} iniziale, ad altre $n - 3$. *Così ad una* V_{n-2} *di* S_n *sono strettamente legati* $n - 2$ *gruppi di altre* $n - 3$ V_{n-2}.

§ 7.

Varietà di ∞^2 piani con carattere di sviluppabili.

32. Al n^0 25 avevamo accennato al problema generale dei sistemi ∞^{α} di S_k $(\alpha > 1, n > 2k)$ tali che due S_k infinitamente vicini sian sempre incidenti nel senso del § 1. Noi qui lo tratteremo per $\alpha = 2$, $k = 2$. Da questa trattazione si ricaveranno forse dei suggerimenti per la via da seguire nel caso generale.

Avremo così da considerare una ∞^2 di piani appartenente ad S_n, con $n \geq 5$. Ma se è $n > 5$, noi le sostituiremo una sua projezione generica su S_5. Le proprietà che otterremo in questo spazio saranno, come vedremo, tali da potersi riportare alla primitiva varietà di S_n.

Dal n^0 26 è già risolto il caso che *il punto singolare, o foco, di un piano qualunque del sistema* ∞^2 *rimanga fisso*, al mutare del piano infinitamente vicino, o della ∞^1 di piani entro quel sistema. Avremo cioè che: *o gli* ∞^2 *piani passano per un punto fisso, o son tutti* *tangenti ad una stessa curva; o infine sono i piani tangenti di una superficie.*

Supponiamo invece che *per un piano qualunque del sistema* ∞^2 *sia fisso lo* S_4 *tangente singolare* (nel senso della fine del n^0 2: cioè S_4 congiungente quel piano ad uno qualsiasi dei suoi infinitamente vicini). Allora, riducendoci, come s'è detto, allo S_5 per spazio ambiente, saremo nel caso duale entro S_5 di quello precedente. Si tratterà dunque: o di ∞^2 piani di un S_4; o di ∞^2 *piani giacenti negli* ∞^1 S_3 *di una sviluppabile ordinaria* (fine del n^0 5); od infine degli (∞^2 piani caratteristici di una ∞^2 di spazi S_4, ossia (n^0 16)) ∞^2 *piani generatori di una* V_4, *la quale lungo ciascuno di essi ha un* S_4 *tangente fisso.* Queste stesse proprietà caratteristiche varranno per le varietà di S_n, luoghi degli ∞^2 piani.

Messi così da parte questi casi [29], ci rimane come caso essenzialmente nuovo quello che per un piano generico G della ∞^2 non sian fissi nè il punto singolare nè lo S_4 tangente singolare.

Applicando (nello S_5) i concetti dei n^i 3 e 15, si ha che ognuna delle V_3 luoghi dei sistemi ∞^1 di piani, contenuti nella ∞^2 e passanti per G, produce fra i punti di G e gli ∞^2 S_3 per G, tangenti in essi alla V_3, un'omografia, la quale varia in un fascio. Noi vogliamo che questo fascio sia tutto di omografie degeneri, essendo variabile tanto il punto singolare su G quanto lo S_4 singolare per G.

33. Dobbiamo dunque fare una breve *digressione sui fasci di omografie degeneri.*

Per comodità di linguaggio sostituiremo alla forma degli ∞^2 S_3 passanti per G il sistema delle ∞^2 *rette* (non *punti* come al n^0 15) di un piano H. Si tratterà allora di un fascio di *reciprocità* degeneri tra i piani G ed H.

Ricordiamo che, considerando una reciprocità tra i due piani come un *connesso*, ossia un raggruppamento di ∞^3 coppie di punti di G, H, una reciprocità degenere (di 1^a specie) si riduce all'accoppiamento, in tutti i modi possibili, dei punti che stanno sui raggi omologhi di due fasci projettivi, i cui centri sono precisamente i punti singolari della reciprocità.

---

(29) Rientrano in essi, come facilmente si dimostra, i casi in cui qualcuna, o tutte le ∞^1 di piani passanti per un dato piano del sistema ∞^2 e contenute in questo hanno sul piano stesso, non solo un punto, ma tutta una retta singolare. Sono casi più speciali, che non condurrebbero a nulla di veramente nuovo.

Un fascio di reciprocità, considerate ancora come connessi, ha per *base* una ∞^2 di coppie di punti di G, H, *intersezione* di due connessi del fascio. I punti così accoppiati non son altro che le coppie di punti omologhi in una certa corrispondenza tra i punti di G, H, la quale è generalmente biunivoca e quadratica.

Se nel fascio vi è una reciprocità degenere, di cui siano P e P' i punti singolari, quella corrispondenza puntuale associerà in un modo determinato i punti di una retta r per P ai punti di una retta r' per P'.

Se *tutte* le reciprocità del fascio son degeneri, e i loro punti singolari P e P' son variabili risp. nei due piani, una retta generica r di G conterrà una qualche posizione di P; e quindi nella corrispondenza base del fascio avrà per corrispondente una retta r'. La corrispondenza base è dunque in tal caso una *collineazione* fra G ed H.

In conseguenza se sono A e A' i punti singolari di una reciprocità di quel fascio, B e B' quelli di un'altra, la projettività tra i fasci di rette A, A' a cui si riduce la 1ª reciprocità, e quella tra i fasci B, B' data dalla 2ª saran contenute nella corrispondenza di collineazione: sicchè in ambe le projettività la retta AB avrà per corrispondente la $A'B'$. Viceversa, se questa condizione è soddisfatta, avverrà che tutte le ∞^2 coppie costituite da un punto della retta AB e da un punto della $A'B'$, essendo comuni a quelle due reciprocità degeneri, saranno coppie di tutte le reciprocità del fascio; e però ognuna di queste sarà degenere, avendo sulle rette AB e $A'B'$ i punti singolari P, P', ed essendo sempre queste rette raggi omologhi dei due fasci projettivi P, P' costituenti la reciprocità degenere.

34. Ritorniamo ora alla ∞^2 di piani di S_5 che dirò Σ, nelle ipotesi della fine del n⁰ 32.

Ciò che adesso abbiamo visto si traduce così: Su ogni piano G di Σ vi sarà una retta g (la retta AB di poc'anzi) luogo dei punti singolari; mentre gli ∞^1 S_4 tangenti singolari relativi a G, corrispondenti a quei punti singolari, passeranno tutti per un S_3 fisso che dirò Γ (come i punti P' avevan per luogo la retta $A'B'$). Presa entro Σ una qualsiasi ∞^1 di piani, sempre sarà Γ lo S_3 tangente alla V_3 da essi costituita, in tutti i punti generici di g (perchè le rette AB, $A'B'$ si corrispondevano in tutte le ∞^1 projettività di fasci di raggi).

Ne segue che, se sulla V_4 luogo dei piani di Σ tiriamo per un punto P di g una linea, in modo che vi passi regolarmente e che incontri ∞^1 piani generatori, Γ sarà sempre tangente in P (alla varietà luogo di quegli ∞^1 piani, e quindi anche) a questa linea. Dunque: *la* V_3 (*) *luogo delle* ∞^2 *rette* g *è singolare sulla* V_4 *luogo degli* ∞^2 *piani, in quanto che le tangenti in un punto di quella* V_3 *alle linee della* V_4 *che vi passano regolarmente generano un* S_3 (cioè il corrispondente Γ), *anzi che un* S_4. Limitandoci poi alle linee tracciate sulla V_3 singolare, abbiamo: *la* V_3 *luogo delle* ∞^2 *rette* g *è tale che lungo ognuna di queste rette ammette un* S_3 *tangente fisso* (cioè ancora il Γ).

Dallo spazio S_5 si ritorni a S_n $(n \geq 5)$. Di nuovo si abbia un sistema ∞^2 di piani, tale che ogni piano G sia incidente a ciascun piano infinitamente vicino, senza che sia fisso nè il punto singolare di G nè lo S_4 tangente singolare. Colla projezione in S_5 e applicazione dei risultati ivi ottenuti, deduciamo: che ancora su G gli ∞^1 punti singolari avranno per luogo una retta g, e che la V_3 luogo di queste rette g gode della proprietà ultimamente enunciata.

Viceversa: *partiamo* (in S_n) *da una* V_3 *rigata, avente lungo ogni generatrice* g *un* S_3 *tangente fisso* Γ; *e prendiamo una* ∞^2 *di piani* G *tangenti ad essa lungo le sue generatrici*: tiriamo cioè per ogni g un piano G entro al relativo spazio Γ. Dico che *una tale* ∞^2 *di piani* G *risponde al nostro problema del* n° 32: vale a dire che una generica ∞^1 di piani, presa entro quella ∞^2, ha in ciascun piano un foco sulla rispettiva retta g. Per dimostrare ciò basterà (n° 3) provare che la V_3 luogo di quegli ∞^1 piani ha in tutti i punti P della g di ciascun suo piano G uno stesso S_3 tangente. E in fatti lo S_3 tangente in P a questa V_3 deve contenere il piano G, ed anche il piano tangente in P (piano che è diverso in generale da G) alla rigata luogo delle ∞^1 rette g degli ∞^1 piani. Ora appunto lo S_3 Γ tangente in P alla varietà luogo di tutte le ∞^2 rette g contiene entrambi quei piani; esso è dunque lo S_3 cercato, e, per ipotesi, non muta se P si muove sulla sua retta g.

35. In conclusione, per costruire in S_n la ∞^2 di piani cercata si dovrà ricorrere ai risultati dei n^i 29 e 30, in cui si ponga $\alpha = 2$, sulle V_3 rigate dotate di soli ∞^2 S_3 tangenti.

(*) Se le ∞^2 rette non formassero una V_3, ma invece un piano, si otterrebbe il sistema Σ composto di piani che tagliano un piano fisso secondo rette (cfr. la nota (25) a p. 102). Questo caso va aggiunto a quelli del testo (N. d. R., desunta da una nota manoscritta apposta da CORRADO SEGRE in un esemplare, di questo lavoro, di Sua proprietà).

Per esempio, in base alla nota ([28]), si fissino comunque due curve; e per ogni retta appoggiata ad esse si tiri un piano entro lo S_3 che contiene le tangenti a quelle curve nei due punti d'appoggio. Si otterrà un sistema di ∞^2 piani che soddisfa alle condizioni volute.

Se invece escludiamo i sistemi di piani con curve direttrici, dovremo (n⁰ 30 per $\alpha = 2$) ricorrere ad una superficie Φ di quella classe che è citata in ([13]), e ad un suo sistema di *linee caratteristiche*. Non è privo d'interesse il verificare analiticamente in questo caso il risultato finale del n⁰ preced.

La superficie Φ sia luogo del punto $x(\tau_1 \tau_2)$, e sian linee caratteristiche le τ_1, come al n⁰ 30: cosicchè si abbia un'equazione lineare omogenea fra i punti

$$x, \quad x^1, \quad x^2, \quad x^{11}, \quad x^{12}, \tag{30}$$

vale a dire questi punti stiano in un S_3 (che sarà il Γ del n⁰ preced.). Entro questo spazio, per la retta g tangente in x alla linea τ_1, cioè per la retta dei punti x, x^1, dovremo tirare un piano G. Poichè questo incontrerà la retta dei due punti (di Γ) x^2, x^{11}, possiamo individuarlo coi tre punti

$$x, \quad x^1, \quad x^2 + \Theta x^{11}, \tag{31}$$

ove Θ sia una funzione di τ_1, τ_2. Fissando (ad arbitrio) questa funzione, verremo a fissare un sistema di ∞^2 piani G. Vogliamo verificare che esso è tale che ogni ∞^1 di piani suoi ha carattere di sviluppabile (nel senso più generale del n⁰ 5), il punto singolare di ogni piano G essendo un punto variabile della retta g (di x, x^1).

Perciò, applicando al caso attuale le considerazioni dei nⁱ 2 e 6, formiamo le derivate rispetto a τ_1 e τ_2 del punto variabile di G

$$X = u_0 x + u_1 x^1 + u_2 (x^2 + \Theta x^{11})$$

e combiniamole linearmente così:

$$\begin{aligned} Y = v_1 &\left[u_0 x^1 + u_1 x^{11} + u_2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} (x^2 + \Theta x^{11}) \right] \\ + v_2 &\left[u_0 x^2 + u_1 x^{12} + u_2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} (x^2 + \Theta x^{11}) \right]. \end{aligned}$$

Si tratterà di riconoscere che, qualunque siano v_1 e v_2 (il cui rapporto è da porsi $= d\tau_1 : d\tau_2$ calcolato per la ∞^1 di piani G da considerare), sempre vi sarà sulla retta g un punto X, ossia valori delle u con $u_2 = 0$, sì che il corrispondente punto Y, il quale allora si riduce a

$$Y = u_0 v_1 x^1 + u_0 v_2 x^2 + u_1 v_1 x^{11} + u_1 v_2 x^{12},$$

starà su G, cioè sarà combinazione lineare dei punti (31). A questo scopo basta profittare della relazione lineare fra i punti (30), ricavandone per esempio x^{12} e sostituendolo in questa espressione di Y, con che essa diventa una combinazione lineare di

$$x\,,\quad x^1\,,\quad x^2\,,\quad x^{11}\,,$$

a coefficienti bilineari in $u_0 u_1$ e $v_1 v_2$ (oltre che funzioni delle τ). Vi sarà solo da scrivere che in questa espressione i coefficienti di x^2 e x^{11} hanno per rapporto Θ. Con ciò si porrà un'equazione bilineare tra $u_0 u_1$ e $v_1 v_2$, la quale determinerà, per ogni ∞^1 di piani passante per un G assegnato (cioè per dati valori delle τ e di $v_1 : v_2$), il corrispondente foco $u_0 x + u_1 x^1$ di questo piano.

Torino, 22 Marzo 1910.