Corrado Segre

Le congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate

Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **42** (1906-07), p. 539–550

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 9–19

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_9>

XXIII.

LE CONGRUENZE RETTILINEE W ADERENTI A DUE SUPERFICIE RIGATE

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino »,
Vol. XLII, 1906-07, pp. 335-346. (*)

1. Una congruenza di rette avente per superficie focali due rigate *sghembe* G, H si dirà una *congruenza* W [1] quando la corrispondenza che essa determina fra i punti di quelle superficie (omologhi essendo due punti quando son fochi di uno stesso raggio) fa corrispondere tra loro le generatrici rettilinee.

In tale ipotesi, siano g, h due generatrici omologhe di G ed H. Consideriamo le ∞^1 rette della congruenza, i cui fochi sono rispettivamente su g, h, e che quindi toccano in questi punti le due rigate. Ognuna di esse congiunge un punto di g alla traccia del piano tangente in esso a G sulla h. Quindi, per la projettività fra punti e piani tangenti di g, quelle ∞^1 rette costituiranno una *schiera rigata*, o sistema di generatrici di una quadrica Φ, raccordata a G, H lungo g, h.

Lo stesso fatto si può presentare così. Si considerino le tangenti a G nei punti di g come quelle rette che si appoggiano a due generatrici successive g, g_1 di G. Se similmente è h_1 la generatrice di H successiva ad h, le ∞^1 rette tangenti a G, H nei punti di g, h si potran riguardare come rette appoggiate a gg_1hh_1. Formeranno dunque una *1ª schiera* di generatrici di una quadrica, la cui *2ª schiera* conterrà gg_1hh_1 e potrà quindi chiamarsi *tangente* a G, H lungo g, h.

Le ∞^1 quadriche Φ che così si ottengono ammettono una superficie inviluppo, che comprende come parti G ed H. La linea

(*) Come nel vol. 1⁰ di queste « Opere », i numeri di pagine indicati per i lavori pubblicati negli Atti della R. Accademia di Torino si riferiscono all'edizione relativa alla sola classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (N. d. R.).

(1) Veggasi alla fine il n. 10.

caratteristica su una Φ si compone di due generatrici g, h della 2ª schiera, e quindi anche (essendo l'intersezione di due Φ successive) di due generatrici p, q della 1ª schiera. Il luogo di queste sarà dato da due nuove rigate P, Q (2), che costituiranno l'ulteriore parte della superficie inviluppo.

Le generatrici della 2ª schiera della quadrica Φ saranno tangenti a P, Q nei punti di p, q, e però descriveranno una 2ª congruenza W aderente a P, Q, nello stesso modo che la 1ª schiera generava la congruenza W aderente a G, H. Queste due congruenze possono dirsi *associate* fra loro. Sono in relazione reciproca. Ognuna individua l'altra.

Consideriamo p, q come intersezioni di due quadriche Φ successive: la quadrica gg_1hh_1 e la $g_1g_2h_1h_2$ (essendo g_2, h_2 le generatrici successive di g_1, h_1 su G, H) (3). Risulta così che p e q si appoggiano a 3 generatrici successive di G e a 3 generatrici successive di H. Dunque le rigate P, Q si compongono di tangenti tripunte (o principali) comuni a G, H. Reciprocamente G, H son luoghi di tangenti tripunte comuni a P, Q. Più precisamente abbiamo che due generatrici omologhe dell'una coppia di rigate han sempre comuni due tangenti tripunte, e queste son generatrici omologhe dell'altra coppia di rigate.

2. Per lo studio di questo come di tanti altri argomenti di geometria delle rette, riesce notevolmente suggestiva la rappresentazione delle *rette* dello spazio ordinario Σ sui *punti* di una varietà quadratica generale a 4 dimensioni Γ di S_5 (4).

Alle due rigate G, H (s'intende, come sistemi di ∞^1 rette) corrispondono su Γ due curve G', H'. E il fatto che, se g e h son due generatrici omologhe delle rigate, esiste una schiera rigata

---

(2) S'intende che posson essere due falde di *una sola* rigata, cioè prolungantisi analiticamente l'una nell'altra. Analogamente per G ed H; e per altri enti che si presenteranno in seguito.

(3) È superfluo avvertire che, qui e nel seguito, le considerazioni intuitive di generatrici successive, e così di punti successivi di una curva, ecc., si potrebbero in modo ben noto sostituire con procedimenti analitici più lunghi, ma esaurienti dal punto di vista del rigore (operazioni di limiti, derivazioni successive).

(4) È il noto concetto di Plücker e Klein. Cfr. la mia Memoria, *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*, Mem. Acc. Torino, (2) 36, 1884.

Nell'applicare quella rappresentazione, indicherò sempre coll'aggiunta di apici superiori il passaggio da enti di Σ alle loro imagini su Γ.

tangente a queste lungo g, h, si traduce nella seguente relazione [5]:

Le due curve G', H' son riferite fra loro per modo che in punti omologhi g', h' esse hanno un piano tangente comune; ossia che le tangenti alle curve in due punti omologhi qualunque s'incontrano.

Possiamo anche dire così: La retta che unisce due punti omologhi di G', H' e quella che unisce i due punti omologhi successivi son complanari, e però hanno un punto a comune.

Ne segue, mediante considerazioni che sono notissime nello spazio ordinario, e che si estendono subito agl'iperspazi (o direttamente, o per mezzo di una projezione), che la superficie rigata luogo delle rette congiungenti i punti omologhi di G', H' è *sviluppabile*, avendo per piano tangente lungo ogni generatrice $g'h'$ il suddetto piano tangente comune a G', H'.

Qui rammentiamo che, in qualsiasi spazio, una *sviluppabile* (nel senso in cui soltanto ci occorrerà questa parola) ha le generatrici rettilinee che, o escono tutte da un punto — e allora si tratta di un cono —, o son tangenti ad una linea L. *Piani della sviluppabile* diciamo quelli che posson riguardarsi come contenenti due generatrici infinitamente vicine, ossia i piani tangenti alla superficie, piani osculatori ad L. Similmente chiamiamo *spazi* S_3, S_4, ..., S_{n-1} *della sviluppabile* (supposta immersa in S_n) quelli che si posson considerare come congiungenti 3, 4, ..., $n-1$ generatrici successive, e quindi anche congiungenti 4, 5, ..., n punti successivi di L (spazi *osculatori* ad L).

Rileviamo poi, perchè ci servirà più tardi, che se una curva direttrice della sviluppabile (per esempio la G' o la H' di prima) sta in un S_k, la sviluppabile non potrà *appartenere* ad uno spazio superiore a S_{k+1}. Ciò riesce intuitivo, quando si descriva la rigata partendo da una sua generatrice. La successiva di questa, essendo incidente ad essa e alla direttrice, starà nel loro spazio congiungente (che è al più di dimensione $k+1$); e così poi starà in questo spazio la generatrice successiva della 2ª; ecc. [6].

---

(5) Ricordo che le rigate quadriche, o schiere rigate, di Σ han per imagini le coniche sezioni di Γ coi piani di S_5. Così poi le sezioni fatte su Γ dagli S_3 e dagli S_4 rappresentano le congruenze lineari ed i complessi lineari di rette di Σ.

(6) Anche la dimostrazione analitica riesce semplicissima, se si prende lo S_k della curva direttrice come uno spazio fondamentale delle coordinate.

Quindi se, nello spazio Σ, la rigata G è del 2^0 ordine, essa starà colla H in una congruenza lineare. E se G è in *una* congruenza lineare, essa ed H staranno in uno stesso complesso lineare; o in particolare H starà in quella stessa congruenza lineare.

3. È chiaro che la sviluppabile, a cui ci ha condotto la rappresentazione della congruenza W, può esser presa ad arbitrio nello S_5. Le generatrici di una sviluppabile di S_5 segano Γ secondo coppie di punti g', h' di due linee G', H', cui corrispondono in Σ due rigate G, H. E i piani della sviluppabile segheranno Γ secondo coniche, cui corrispondono in Σ schiere rigate, ognuna delle quali sarà tangente lungo due generatrici omologhe g, h a G, H. Per conseguenza le schiere rigate incidenti a queste, cioè situate sulle stesse quadriche, avran per luogo una congruenza W aderente a G, H.

Nel caso generale, in cui è S_5 lo spazio d'immersione della sviluppabile, possiamo anche vedere di che sian le imagini gli S_3 e gli S_4 di questa. Un S_3, come spazio che contiene 3 generatrici successive, conterrà 3 punti successivi di ciascuna delle linee G', H' e quindi anche (poichè G', H' non son rette) i piani di quelle terne di punti, ossia i piani osculatori in due punti omologhi. Similmente un S_4 della sviluppabile passa per gli S_3 osculatori a G', H' in due punti omologhi. Segando con Γ, e poi trasportando in Σ, abbiamo che, come le due rigate G, H ammettono una rigata quadrica tangente lungo due generatrici omologhe qualunque g, h, così

1^0) Vi è una congruenza lineare che contiene con g le due generatrici infinitamente vicine di G, e con h le due generatrici successive di H; ossia che contiene le schiere rigate *osculatrici* a G, H in g, h. Le direttrici p, q di questa congruenza lineare saranno dunque tangenti tripunte comuni a G, H in punti di g, h. Cfr. la fine del n. 1.

2^0) Vi è un complesso lineare che passa per 4 generatrici successive qualunque di G e per le corrispondenti di H; cioè che contiene le congruenze lineari *osculatrici* (determinate da 4 generatrici infinitamente vicine) a G, H in g, h. Le due direttrici della congruenza lineare osculatrice a G in g sono le 2 tangenti quadripunte che G ammette in punti di g [7]; similmente per l'altra con-

(7) Il sig. E. J. WILCZYNSKI le chiama *flecnode tangents* nel suo libro *Projective differential Geometry of curves and ruled surfaces* (Leipzig, 1906): nel quale si trovano esposte sistematicamente, dal punto di vista della geometria della retta, quelle nozioni fondamentali sulle rigate che qui ci si presentano.

gruenza. D'altra parte si sa che le direttrici di due congruenze lineari contenute in uno stesso complesso lineare son 4 rette di una schiera. Dunque: le due tangenti quadripunte di G relative a g e quelle di H relative ad h son 4 rette di una stessa schiera rigata [8].

4. Il passaggio fatto al n. 1 dalla congruenza W aderente a G, H, a quella *associata*, aderente a P, Q, si ottiene in S_5 mediante la polarità rispetto a Γ.

Anche su ciò limitiamoci per ora al caso generale, che la sviluppabile considerata di S_r abbia questo come spazio d'immersione. Allora, polarizzando rispetto a Γ si otterrà una 2ª sviluppabile, sì che ai punti, rette, S_2, S_3, S_4 dell'una sviluppabile saran polari rispettivamente gli S_4, S_3, S_2, rette e punti dell'altra. Le ∞^1 rette della 2ª segano Γ in ∞^1 coppie di punti p', q' aventi per luoghi le linee P', Q', imagini di due rigate P, Q cui aderirà una 2ª congruenza W.

I legami di questa colla congruenza data si ritroveranno, ricordando che due piani polari rispetto a Γ han per tracce su questa le imagini delle due schiere di generatrici di una stessa quadrica; mentre le tracce su Γ di un S_3 e di una retta, fra loro polari, son le imagini di una congruenza lineare e della coppia di direttrici di questa.

Vediamo così che i piani della 2ª sviluppabile segano Γ secondo le imagini delle schiere rigate generanti la 1ª congruenza W; mentre la V_3 luogo dei piani della 1ª sviluppabile dà similmente come traccia su Γ l'imagine della 2ª congruenza W. D'altronde gli S_3 e S_1 delle due sviluppabili ci provan di nuovo che la congruenza lineare contenente le rigate quadriche osculatrici a G, H (od a P, Q) in g, h (od in p, q) ha per direttrici p, q (o g, h).

5. Diciamo una parola sui casi particolari in cui G ed H coincidono.

Intendiamo con ciò che coincidano sempre due generatrici omologhe g, h, e quindi anche i due fochi di un raggio generico della 1ª congruenza W. È noto che ciò avviene in due casi: cioè quando i raggi del sistema toccano G nei punti di una linea fissa (linea *singolare* o *focale* della congruenza); e quando la con-

---

(8) V. al n. 6 il luogo di questa schiera rigata.

gruenza si riduce al sistema delle tangenti principali di G (9). In questo 2^0 caso, ricorrendo alle schiere rigate costituite da tali tangenti, ne deduciamo che la congruenza W associata sarà il luogo delle schiere rigate osculatrici a G (10). Ora si osservi che, se $gg_1 g_2 \dots$ sono generatrici successive di G, una tangente quadripunta appoggiata a $gg_1 g_2 g_3$ ha per successiva una appoggiata a $g_1 g_2 g_3 g_4$; sicchè $g_1 g_2 g_3$, e però anche la schiera di rette (osculatrice a G) da esse determinata, saranno incidenti a quelle due tangenti quadripunte successive. Ne segue che la 2ª congruenza W si compone di rette tangenti a ciascuna falda della rigata luogo delle tangenti quadripunte di G: ossia ha queste due falde come focali.

6. Ritornando al caso generale, facciamo vedere come, quando due rigate distinte G, H son focali per una congruenza W, da esse derivano naturalmente, oltre a quella che abbiamo chiamato *associata*, ancora altre congruenze W aderenti a superficie rigate.

Riprendiamo in S_5 le due curve G', H', riferite fra loro per modo che le tangenti in punti omologhi g', h' s'incontrano; e consideriamo la linea luogo di questo punto d'incontro. Essa ha evidentemente per tangenti, piani osculatori, S_3 osculatori, le rette, i piani, gli S_3 d'intersezione dei piani, S_3, S_4 osculatori a G', H' in g', h'. Sicchè queste intersezioni dànno origine agli elementi di una nuova sviluppabile. E segando con Γ, come già avevamo fatto per gli elementi della 1ª sviluppabile, e poi ritornando allo spazio ordinario Σ, otteniamo le proposizioni seguenti (che, naturalmente, si posson pure ricavare subito per via diretta):

Per ogni coppia di generatrici omologhe g, h di G, H si considerino le due schiere rigate osculatrici lungo g, h. Esse han comuni

---

(9) Nello spazio S_5 la coincidenza di ogni punto g' coll'omologo h' fa sì che la 1ª sviluppabile da noi considerata si componga di rette tangenti a Γ. Ciò può avvenire in due modi. 1^0) Queste tangenti *non* sono le tangenti di G'. Allora in ogni punto g' di G' il piano tangente alla sviluppabile, contenendo due diverse tangenti di Γ, sarà esso stesso tangente a Γ. Lo stesso accadrà quindi del suo piano polare. Ne deriva che le rigate quadriche costituenti le due congruenze W associate si spezzano in fasci di rette: donde l'esistenza della linea singolare o focale. — 2^0) La sviluppabile si compone delle tangenti di G' (e dei piani, S_3, S_4 osculatori). Allora la 2ª sviluppabile sarà inviluppata dagli S_4 tangenti a Γ nei punti di G', ed anche i suoi S_3 (non i piani, nè le rette) saranno quindi tangenti a Γ. Si ritrovan subito le proprietà che sopra vengon esposte per questo 2^0 caso.

(10) Ossia quella che il sig. WILCZYNSKI nel libro citato studia sotto il nome di «*flecnode congruence*». Il ragionamento che sopra si fa per ottenerne le superficie focali è affine alle considerazioni svolte alla p. 187 di quel libro.

due rette r, s, le quali generano due rigate R, S, focali per una 3ª *congruenza* W (11). Le congruenze lineari osculatrici a G, H lungo g, h han comune una schiera di rette: la schiera incidente a questa, vale a dire (n. 3) la schiera che contiene le due coppie di tangenti quadripunte a G, H in g, h, genera questa 3ª congruenza W.

Invece la schiera di rette prima nominata, cioè quella che è incidente alle dette tangenti quadripunte di G, H, genera una 4ª *congruenza* W: l'associata della 3ª. La congruenza lineare intersezione dei complessi lineari osculatori a G, H in g, h ha per direttrici due rette u, v, generatrici omologhe sulle rigate U, V focali per quella 4ª congruenza. Le rette u, v saranno incidenti a quella schiera, cioè staranno nella schiera determinata dalle tangenti quadripunte di G, H relative a g, h.

Come dalla congruenza $W(G, H)$ abbiam dedotto le due, fra loro associate, (R, S) e (U, V); così dalla (P, Q) si dedurrà in generale un'*altra* coppia (12) di congruenze W associate. E così si potrebbe proseguire.

7. Data comunque la rigata G, come si può costruire nel modo più generale una congruenza W ad essa aderente (nel senso detto in principio), cioè l'altra rigata H e la corrispondenza fra le generatrici di G e di H?

Vorrà dire: data su Γ la curva G', costruire nel modo più generale una sviluppabile passante per G'.

Escludiamo per ora il caso che G stia in una congruenza lineare, ossia G' in un S_3. Allora gli ∞^1 S_4 della sviluppabile dovranno passare rispettivamente per gli ∞^1 S_3 osculatori di G'; e si potranno assumere ad arbitrio fra gli spazi passanti per questi (ben inteso in modo continuo, anzi tale che la funzione che li determina ammetta le derivate necessarie). In fatti una ∞^1 di S_4 così costituita ammetterà come inviluppo (luogo delle rette d'intersezione di 4 spazi successivi) una superficie sviluppabile contenente G' (13).

---

(11) S'intende che r, s saranno generatrici omologhe nella corrispondenza definita da questa congruenza. Esse saranno incidenti alle due schiere costituite rispettivamente dalle tangenti tripunte di G, H lungo g, h; in particolare a p, q.

(12) Non la stessa coppia (R, S) e (U, V)! In fatti si tratta di scambiare (G, H) con (P, Q). Ora, mentre r, s sono incidenti a p, q, non sono nè r, s nè u, v (in generale) incidenti a g, h.

(13) Se $a a_1 a_2 \ldots$ son punti successivi di G', vi saranno per ipotesi quattro S_4 successivi di quella ∞^1 passanti rispettivamente per $a a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_2 a_3 a_4$, $a_2 a_3 a_4 a_5$, $a_3 a_4 a_5 a_6$; e la retta di loro intersezione passerà dunque per a_3.

In conseguenza la costruzione da farsi in Σ sarà la seguente:

Per le congruenze lineari osculatrici a G nelle sue ∞^1 generatrici si tiri una ∞^1 di complessi lineari (continua, con derivate); e si determinino le congruenze lineari, schiere rigate, coppie di rette, che sono rispettivamente i limiti delle intersezioni di 2, 3, 4 di quei complessi infinitamente vicini. Il luogo delle dette coppie di rette g, h si comporrà risp. di G e dell'altra rigata H. Quello delle schiere rigate sarà una congruenza W aderente alle due rigate P, Q che son costituite dalle direttrici p, q delle ∞^1 congruenze lineari; mentre la congruenza W aderente a G, H sarà il luogo delle schiere di rette incidenti a quelle.

Questa costruzione si traduce immediatamente in un semplice calcolo; poichè si sanno rappresentare le congruenze lineari osculatrici a G nelle varie generatrici, e le operazioni di limiti da eseguire si faranno come nell'ordinaria teoria degl'*inviluppi.* Si vede che, data G, per ottenere H, o la congruenza W ad esse aderente, si dispone di una funzione arbitraria di una variabile; dovendosi per ciascuna generatrice di G (ossia pel corrispondente valore del parametro che determina le generatrici) fissare un complesso lineare entro un determinato fascio (Cfr. n. 10).

8. Consideriamo ora i casi, che in qualche momento avevamo esclusi, in cui G ed H stanno in *uno* stesso complesso lineare di rette, od in una stessa congruenza lineare.

La prima ipotesi equivale a dire che lo spazio cui appartengono le linee G', H' è un S_4. In questo sarà dunque immersa la 1ª sviluppabile. Perciò la 2ª sarà un cono, col centro nel polo dello S_4 rispetto a Γ: sicchè P' e Q' si corrisponderanno nella omologia armonica per cui quel polo e l'S_4 sono fondamentali. Ossia: le rigate P e Q saranno coniugate rispetto al complesso lineare che contiene G ed H.

Data comunque una rigata P, essa e la sua coniugata Q rispetto ad un complesso lineare saranno focali per una congruenza W contenuta in questo complesso. Invece la congruenza W associata, cioè la (G, H), si compone di coppie di rette coniugate rispetto al complesso lineare che contiene le sue rigate focali.

Se G' è data in un S_4, e in questo si vuol cercare la H', si dovrà costruire nell'S_4 una sviluppabile passante per G'. Ciò si farà semplificando lievemente la costruzione generale del n. 7, colla riduzione di 1 unità subìta dalla dimensione dello spazio ambiente. Entro l'S_4 gli S_3 della sviluppabile si potran condurre ad arbitrio pei piani osculatori di G'. Passando allo spazio Σ si ha:

Data la rigata G entro un complesso lineare, volendo che anche H stia in questo la si potrà costruire così. Per ogni generatrice g di G si prenda la schiera rigata osculatrice in essa, e si tiri per questa schiera entro al complesso una congruenza lineare: cioè si fissi ad arbitrio nella schiera incidente (delle tangenti principali di G relative a g) una coppia p, q di rette coniugate armoniche rispetto alle due rette del complesso lineare che stanno in questa schiera. I luoghi di p, q (scelte con continuità, ecc.) saran le rigate P, Q; e il luogo delle tangenti tripunte comuni a P, Q in generatrici omologhe p, q, saranno la data rigata G e la H cercata.

Se G è in *una* congruenza lineare, sappiamo (v. la fine del n. 2) che essa dovrà stare con H in uno stesso complesso lineare. Si fisserà questo ad arbitrio fra quelli che passan per la data congruenza lineare; e poi si applicherà la costruzione esposta.

9. Passiamo al 2^0 caso, più particolare, che G ed H stiano in una stessa congruenza lineare.

Sono allora G' e H' in un S_3. E comunque si prendano, sulla quadrica intersezione dello S_3 con Γ, due curve G', H', *sempre* esisteranno delle sviluppabili che le contengono. Basterà in fatti, entro l'S_3, tirare per una tangente di G' uno dei piani tangenti ad H', e poi farlo variare con continuità, al variare di quella tangente.

Trasportandoci in Σ abbiamo:

Le congruenze di rette, che hanno per superficie focali due rigate G, H, prese ad arbitrio entro una medesima congruenza lineare Λ, sono sempre congruenze W. Per ogni generatrice g di G, si cerchi nel fascio delle rigate quadriche di Λ tangenti (raccordate) in g a G, rigate che avranno comuni con H un certo numero di generatrici, una per cui due di queste rette coincidano; e sia h tale generatrice. Variando g ed h con continuità, si ha su G ed H la corrispondenza determinata da una congruenza W aderente ad esse. Le schiere rigate di questa congruenza contengono le due direttrici di Λ, e sono le schiere incidenti alle rigate quadriche prima nominate, le quali generano invece Λ. Così la congruenza W associata alla 1^a si riduce alla congruenza lineare Λ. E le sue rigate focali (che nel caso generale indicavamo con P, Q) si riducono a due sole rette: le direttrici di Λ [14].

---

[14] Si potrebbe, anche in questo caso, associare alla 1^a congruenza W una congruenza W diversa da Λ nel seguente modo. Della 1^a sviluppabile, che ora è data entro l'S_3, si prenda la polare, non più rispetto a Γ, bensì rispetto alla

Se è data come rigata G una schiera di generatrici di una quadrica, H sarà con G (n. 2) in una congruenza lineare. Si potran dunque fissare ad arbitrio due rette nell'altra schiera di quella quadrica, e prendere come H una qualsiasi rigata che le abbia per direttrici.

10. Il nome di *congruenze* W è stato dato dal signor BIANCHI ([15]) a quelle congruenze di rette, sulle cui falde focali si corrispondono le linee asintotiche, ossia i sistemi coniugati.

Poichè sulle due superficie focali di ogni congruenza vi son già sempre due sistemi coniugati omologhi, cioè quelli segnati dalle sviluppabili della congruenza, basterà che, oltre ad essi, si corrispondano sulle due falde le asintotiche di *un* sistema perchè si corrispondano anche le asintotiche dell'altro sistema ([16]).

Ne segue che, se le due falde focali di una congruenza son rigate, basta l'ipotesi da cui noi siam partiti (n. 1), che si corrispondano le generatrici rettilinee, perchè si corrispondano anche le asintotiche del 2^0 sistema ([17]), ossia perchè si tratti di congruenze W nel senso usato dal BIANCHI (*).

Le formole generali con cui, data una superficie *qualunque* G, si determinano tutte le congruenze W che l'hanno come falda focale, furon pubblicate, com'è noto, nel 1890 dal sig. GUICHARD ([18]). Esse si basano sulla integrazione di un'equazione (di MOUTARD)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta\,.$$

---

quadrica sezione di Γ con quello spazio. Si vede allora, passando a Σ, che la nuova congruenza W associata alla (G, H) ha le rigate focali P, Q (contenute pure in Λ) tali che: due loro generatrici omologhe p, q, con due omologhe g, h di G, H, e colle due direttrici di Λ, dan le 3 coppie di spigoli opposti di un tetraedro.

([15]) *Lezioni di geometria differenziale*, 1ª ediz. (1894), p. 299; 2ª ediz., vol. II (1903), p. 51.

([16]) Questa osservazione, col corollario successivo, si trova già nel § 24 della *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde*, del BIANCHI (Mem. soc. dei XL, (3) 14, 1905).

([17]) La cosa, in questo caso, può anche dimostrarsi direttamente ricorrendo alle quadriche osculatrici alle rigate lungo due generatrici omologhe.

(*) Intorno alla possibilità dell'esistenza di congruenze W con falde focali rigate in condizioni diverse da quelle qui considerate, vedi più avanti la Nota XXIX a p. 119 di questo volume (N. d. R.).

([18]) *Détermination des congruences, telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale*, Comptes rendus, 110, p. 126.

Questa determinazione equivale, come il BIANCHI rilevò esplicitamente, alla risoluzione del problema delle deformazioni infinitesime della superficie G (flessibile ed inestendibile). Si consideri una deformazione infinitesima qualunque di G, e per ogni punto di questa superficie nel piano tangente si conduca il raggio perpendicolare alla direzione dello spostamento subìto dal punto: la congruenza così costruita è una congruenza W ([19]).

In particolare, se G è rigata, e si considerano solo quelle deformazioni infinitesime che la conservano rigata, il BIANCHI ha trovato recentemente ([20]) che la congruenza W ottenuta con quella costruzione è la più generale fra quelle per cui anche la 2ª falda focale è rigata. Sono dunque le congruenze W studiate in questa Nota ([21]).

Ma qui la costruzione di queste congruenze W, quando è data una falda focale rigata G, è fatta *direttamente* (nⁱ 7-9). Quindi da essa si potrebbe dedurre la costruzione geometrica di quelle deformazioni infinitesime di una data superficie rigata, che la conservano rigata.

([19]) BIANCHI, *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali,* Ann. mat., (2) 18, 1890; v. p. 328. Cfr. le *Lezioni* citate, 2ª ediz., vol. II, p. 52.

([20]) *Sur la déformation d'une quadrique,* Comptes rendus, 143, octobre 1906; v. p. 635.

([21]) Anche il BIANCHI osserva che, data G, quelle congruenze dipendono da una funzione arbitraria di una variabile. Cfr. qui la fine del n. 7.