

# CORRADO SEGRE

---

CORRADO SEGRE, G. LORIA

## Sur les différentes espèces de complexes du 2e degré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre

*Math. Annalen*, Vol. **23** (1883), p. 213–234

*in*: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume III, Edizione Cremonese, Roma, 1961, p. 1–24

<[http://www.bdim.eu/item?id=GM\\_Segre\\_CW\\_3\\_1](http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_3_1)>



## XLI.

# SUR LES DIFFÉRENTES ESPÈCES DE COMPLEXES DU 2° DEGRÉ DES DROITES QUI COUPENT HARMONIQUEMENT DEUX SURFACES DU SECOND ORDRE [\*]

« *Mathematische Annalen* », Band XXIII, 1883, pp. 213-234.

---

On sait qu'avant que parût dans la « *Neue Geometrie des Raumes* » la théorie de PLÜCKER du complexe général du 2° degré, M. BATTAGLINI avait déjà publié des recherches sur le complexe représentable en coordonnées plückeriennes de droites par une équation contenant seulement les carrés de ces coordonnées <sup>(1)</sup>. M. KLEIN démontra ensuite que ce complexe n'est pas le complexe le plus général du 2° degré et qu'au contraire celui-ci doit satisfaire à deux conditions pour se réduire au complexe de BATTAGLINI <sup>(2)</sup>. En même temps M. ASCHIERI montrait en deux courtes Notes <sup>(3)</sup> que ce complexe ci n'est autre chose que le complexe des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du 2° ordre, ou par lesquelles on peut mener deux couples harmoniques de plans tangents à deux surfaces de la 2° classe. On peut même en une infinité ( $\infty^1$ ) de manières construire ainsi un complexe de BATTAGLINI donné, car il existe un système du 4° ordre et de la 4° classe de  $\infty^1$  surfaces du 2° degré tel qu'à une quelconque  $S$  de ces surfaces en correspondent deux autres  $S'$ ,  $S''$ , de sorte que le complexe se compose des droites qui coupent harmoniquement  $S$  et  $S'$ , ou bien des droites par

---

[\*] In collaborazione con GINO LORIA.

<sup>(1)</sup> V. *Atti Acc. Napoli*, 1866 ; ou bien *Giornale di matem.*, 6 et 7.

<sup>(2)</sup> V. l' « *Inauguraldissertation* » n° 22 [Bonn, 1886 ; *Math. Ann.*, 23] ; et le *Mémoire* « *Zur Theorie der Complexe I. und II. Grades* » n° 24 (*Math. Ann.*, II).

<sup>(3)</sup> V. *Giornale di matem.*, 8, 1868.

lesquelles passent deux couples harmoniques de plans tangents à  $S$  et  $S''$ . Ces propriétés du complexe de BATTAGLINI avec quelques autres ont été retrouvées récemment, et presque de la même manière, par M. SCHUR dans le Mémoire « Ueber das System zweier Flächen 2. Grades » (4) (où d'ailleurs il ne s'en sert que comme point de passage pour d'autres recherches intéressantes sur une position particulière de deux surfaces du 2<sup>e</sup> degré). Cependant dans l'étude du complexe des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du 2<sup>e</sup> ordre on s'est borné jusqu'à présent, si nous ne nous trompons [pas], au cas de la position mutuelle la plus générale de ces surfaces. C'est alors que ce complexe coïncide parfaitement avec le complexe de BATTAGLINI; sa surface singulière est alors celle entre les surfaces de KUMMER du 4<sup>e</sup> ordre et de la 4<sup>e</sup> classe à 16 points et 16 plans singuliers qui a une équation contenant seulement les puissances paires des coordonnées, c'est-à-dire elle est un « tétraédroïde » de CAYLEY. Mais si l'on particularise la position mutuelle des deux surfaces du second ordre, par exemple si celles-ci viennent se toucher en un point, ou en deux, ou le long d'une droite, etc., si en même temps ces surfaces (l'une ou toutes les deux) se réduisent à des cônes, ou à des couples de plans, etc., etc., alors le complexe des droites qui les coupent harmoniquement se particularisera aussi. On ne pourra plus en général le représenter par une équation contenant seulement les carrés des coordonnées plückeriennes, de sorte que la discussion des cas que peut présenter une telle équation ne suffirait pas pour donner tous les complexes dont il s'agit. Il se présente donc la question de trouver tous les complexes du 2<sup>e</sup> degré qui peuvent être considérés comme composés des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre ayant entre elles une position convenable. C'est précisément de cette question que nous allons nous occuper.

Voici la méthode que nous suivons pour la résoudre. On connaît l'équation du complexe  $H$  des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre, dont les équations soient tout-à-fait générales. Or, que l'on prenne successivement pour cette couple d'équations toutes les couples possibles d'équations canoniques, qui résultent de la méthode des diviseurs élémentaires (Elementartheiler) de M. WEIERSTRASS et qui correspondent à toutes les particularisations projectives que peut avoir le système de deux surfaces

---

(4) Math. Ann., XXI, pp. 515-527.

du second ordre<sup>(5)</sup>. Pour chacune des équations ainsi obtenues du complexe H que l'on applique les critères de classification donnés par MM. KLEIN et WEILER<sup>(6)</sup> pour les complexes du 2<sup>e</sup> degré (critères qui s'appuient aussi sur la méthode des diviseurs élémentaires) et que l'on considère toutes les hypothèses, que l'on peut faire sur les coefficients de la couple d'équations canoniques de surfaces du second ordre, dont il s'agit, afin que le complexe H, qui lui correspond et qui appartiendra en général à une certaine classe de la classification de M. WEILER, vienne appartenir à une autre classe plus particularisée. Ces hypothèses se présentent d'elles-mêmes, lorsqu'on a trouvé les expressions des subdéterminants du discriminant de l'équation du complexe H, à laquelle l'on ait ajouté

$$2\lambda (p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23}) = 0,$$

et que l'on considère attentivement les diviseurs linéaires en  $\lambda$  de ce discriminant et ceux d'entre eux qui appartiennent aussi à tous les subdéterminants du 5<sup>e</sup> ordre, ou du 4<sup>e</sup> ordre, etc. — De cette manière l'on trouve toutes les classes de complexes du 2<sup>e</sup> degré auxquelles peut appartenir un complexe H et aussi quelle position mutuelle particulière doivent avoir les deux surfaces du second ordre afin que le complexe H qui leur correspond soit précisément d'une classe donnée.

Mais on peut aussi obtenir les mêmes résultats par une autre voie plus géométrique. En effet toutes les diverses classes de complexes du 2<sup>e</sup> degré dans la classification de KLEIN-WEILER se distinguent entre elles par le nombre et la position mutuelle de leurs droites doubles. Or il est facile de voir dans chaque cas à quelles conditions doit satisfaire une droite quelconque, afin d'être double pour le complexe H qui correspond à deux surfaces du second ordre données. Ainsi, par exemple, lorsque cette droite n'est pas une tangente dans le même point aux deux surfaces, les conditions auxquelles elle devra satisfaire seront les suivantes: 1<sup>o</sup> d'avoir la même droite polaire relativement aux deux surfaces, 2<sup>o</sup> d'appartenir au complexe, c'est-à-dire de couper harmoniquement celles-ci. Cela ré-

---

(5) V. GUNDELFINGER, Notes à l'« Analytische Geometrie des Raumes » de HESSE (3<sup>e</sup> édition, pp. 518-525), et aussi le Mémoire de M. VOSS « Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen II. Grades », Math. Ann., X, pp. 143-188.

(6) V. l'Inauguraldissertation de KLEIN — et le Mémoire de WEILER: « Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades », Math. Ann., VII, pp. 145-207.

sulte immédiatement de la définition d'une droite double d'un complexe du 2<sup>e</sup> degré, et de ce que si la courbe de 2<sup>e</sup> classe, enveloppe des droites du complexe H qui appartiennent à un plan donné, c'est-à-dire des droites coupant harmoniquement les deux coniques d'intersection de ce plan avec les deux surfaces, a l'une de ses droites pour droite double (c'est-à-dire se réduit à deux points de cette droite), cette droite doit avoir le même pôle par rapport aux deux coniques. En se servant de ces propriétés caractéristiques d'une droite double d'un complexe H on peut trouver géométriquement tous les cas que peuvent présenter deux surfaces du second ordre, par rapport aux droites doubles du complexe H qui leur appartient; et puis, du nombre et de la distribution de ces droites doubles on peut déduire, au moyen de la classification de M. WEILER, la classe du complexe H que l'on a obtenu pour chaque cas. Ajoutons que c'est seulement par ces considérations géométriques que l'on se rend compte des résultats auxquels la voie analytique précédemment indiquée conduit plus méthodiquement mais aussi moins lumineusement.

Nous avons trouvé que parmi les 49 classes de complexes du 2<sup>e</sup> degré proprement dits il y en a 23 auxquelles appartiennent des complexes H. Cependant il fallait encore reconnaître pour chacune de ces classes si c'est le complexe le plus général, ou bien seulement un complexe particulier, qui est un complexe H, et dans ce dernier cas quelle est sa particularisation.

Soient, en coordonnées quelconques de droites:  $\Omega = 0$  l'équation d'un complexe quelconque du 2<sup>e</sup> degré d'une classe donnée, et  $P = 0$  l'équation du 2<sup>e</sup> degré à laquelle satisfont toutes les droites. L'on sait que dans la *caractéristique*, dont a fait usage M. WEILER pour représenter la classe de ce complexe, l'on a tous les exposants des diviseurs élémentaires du déterminant de la forme  $\lambda P + \Omega$ , étant mis entre crochets ( ) ceux qui correspondent à la même racine  $\lambda$  de ce déterminant. Or que l'on considère le groupe de toutes les racines de celui-ci: on peut démontrer que les invariants absolus de ce groupe de valeurs de  $\lambda$  forment précisément tout le système des invariants absolus indépendants de la surface singulière du complexe, tandis que si à ce groupe on adjoint la valeur  $\lambda = \infty$  le nouveau groupe aura pour invariants absolus (ceux du premier groupe plus un nouveau) précisément tout le système des invariants absolus indépendants du complexe même considéré (7). On peut même construire

---

(7) Ces propositions et celles qui suivent ont été trouvées comme cas particuliers de propositions plus générales par l'un de nous dans sa thèse pour le doc-

des formes géométriques de première espèce, dont quelques éléments forment des groupes projectifs au groupe considéré de valeurs de  $\lambda$ , et donnent ainsi par leurs invariants absolus, ou rapports anharmoniques indépendants de ces éléments, les invariants absolus de la surface singulière et de chacun des complexes qui appartiennent à celle-ci; car l'on a le théorème suivant: « Si l'on prend d'une droite quelconque  $r$  de l'espace le faisceau de complexes linéaires polaires relativement au complexe du 2<sup>e</sup> degré  $\Omega = 0$ , ces complexes linéaires correspondront d'une certaine façon projectivement aux complexes du 2<sup>e</sup> degré relatifs à la même surface singulière et il y aura dans ce faisceau pour chaque racine  $\lambda$  un complexe linéaire en involution avec tout le système de complexes linéaires fondamentaux qui correspond à cette racine<sup>(8)</sup>: or le groupe de ces éléments du faisceau correspondants aux diverses racines, auxquels on adjoint le complexe linéaire spécial qui a la droite  $r$  pour axe, est projectif au groupe de valeurs de  $\lambda$  composé respectivement de ces racines et de la valeur  $\lambda = \infty$  ». On a donc là précisément un de ces groupes d'éléments de formes géométriques de 1<sup>e</sup> espèce, dont les rapports anharmoniques indépendants (ne variant pas avec la droite  $r$ ) donnent les invariants absolus du complexe considéré et de sa surface singulière. En particulier, si dans le plan tangent en un point quelconque à la surface singulière on mène par ce point les droites qui appartiennent aux divers systèmes linéaires de complexes fondamentaux (droites qui sont en général des tangentes doubles de la surface singulière, mais qui peuvent devenir des génératrices de cette surface si elle est réglée) et la droite singulière du complexe considéré correspondante à ce point et ce plan singuliers, on aura un groupe de droites d'un faisceau, lequel donnera encore par ses rapports anharmoniques les invariants absolus du complexe et de sa surface singulière.

---

torat [Questo vol<sup>o</sup>, n<sup>o</sup> XLIII]. Elles donnent immédiatement, non seulement le moyen de reconnaître par le seul examen de la caractéristique d'une classe de complexes du 2<sup>e</sup> degré le nombre des invariants absolus qui lui correspond, mais encore la signification géométrique de ces invariants absolus.

(8) Par complexe linéaire *fondamental* d'un complexe du 2<sup>e</sup> degré (ou de sa surface singulière) nous entendons un complexe linéaire relativement auquel celui-ci correspond à soi-même. A chaque racine  $\lambda$ , à laquelle appartiennent  $h$  diviseurs élémentaires, correspond un système linéaire de  $\infty^{h-1}$  complexes fondamentaux (un seul pour  $h = 1$ ).

Ces théorèmes nous permettent de reconnaître immédiatement pour chaque complexe  $H$  que nous obtenons, par la seule inspection des valeurs correspondantes des racines  $\lambda$ : 1<sup>o</sup> si la surface singulière de ce complexe est celle du complexe le plus général de la classe qui correspond à la caractéristique trouvée, 2<sup>o</sup> si ce même complexe  $H$  est précisément le plus général des complexes qui ont la même surface singulière (c'est-à-dire si tous ces complexes-ci sont de tels complexes  $H$ ), ou bien s'il est un complexe particulier entre eux, et dans ce cas-ci combien de complexes  $H$  il y a qui appartiennent à la même surface singulière. Ajoutons que la considération des particularisations projectives des groupes d'éléments considérés, lesquelles correspondent à un complexe  $H$  donné, nous montre quelles sont les particularités géométriques de celui-ci, lorsqu'il n'est pas le plus général de sa classe. De plus nous connaissons pour chaque espèce de complexes  $H$  le nombre des invariants absolus correspondants, s'il y en a.

En suivant les méthodes indiquées nous avons obtenu les résultats qui suivent et que nous nous bornerons ici à énoncer, ce que nous avons dit en général nous paraissant suffisant pour que le lecteur puisse vérifier sans peine ces résultats, que nous exposerons d'ailleurs avec quelques détails. Nous ordonnerons les complexes  $H$  des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre à peu près dans l'ordre de classification des complexes du 2<sup>o</sup> degré, qui a été tenu par M. WEILER dans le 2<sup>o</sup> Tableau de son Mémoire, avec quelques modifications seulement qui nous semblent convenables pour notre but. Pour chaque classe successivement de complexes du 2<sup>o</sup> degré, à laquelle appartienne un complexe  $H$ , nous dirons si ce complexe est le plus général de cette classe, ou comment il est particularisé; combien de tels complexes appartiennent à une même surface singulière; et comment doivent être placées les deux surfaces du second ordre, afin que le complexe  $H$  qui leur appartient soit précisément de cette espèce. Nous montrerons aussi dans la plupart des cas comment de la considération de cette génération du complexe  $H$  l'on est conduit à la construction de ses droites doubles et de ses points et plans notables (ausgezeichnet). Pour plus de détails sur les formes de la surface singulière, dans quelques-uns des cas où celle-ci n'est pas particularisée entre celles de la même classe, on pourra recourir au Mémoire de M. WEILER. Quant aux droites singulières de chacun de nos complexes, on voit très facilement par un raisonnement géométrique qu'elles appartiennent au complexe tétraédral des droites dont les polaires par rapport aux deux

surfaces du second ordre se coupent mutuellement. Or comme l'on trouve sans difficultés les particularisations de ce complexe tétraédral qui correspondent aux divers cas que présentent ces deux surfaces, on aura en même temps pour chaque cas les particularisations que présente la congruence des droites singulières du complexe H correspondant.

$$[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1].$$

Lorsque l'on prend les deux surfaces du second ordre dans leur position la plus générale, le complexe H qui leur correspond est précisément de cette classe  $[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$  (classe la plus générale de complexes du 2<sup>e</sup> degré), qui se distingue par le manque de droites doubles. Dans les groupes, projectifs entre eux, qui donnent les invariants absolus d'un complexe H de cette classe, aux six complexes linéaires fondamentaux correspondent des éléments conjugués dans une involution (propriété qui a déjà été aperçue par M. KLEIN<sup>(9)</sup>), dont l'un des éléments doubles correspond précisément au complexe H considéré. Comme il y a deux de ces éléments doubles, il s'ensuit qu'à la surface singulière caractérisée par cette involution c'est-à-dire au *tétraédroïde*, appartiennent seulement deux complexes H, lesquels correspondront à ces deux éléments doubles. Chacun de ces deux complexes H s'obtient d'une infinité de manières comme lieu des droites coupant harmoniquement deux surfaces données du second ordre; pour l'une de ces deux surfaces on peut même prendre un cône<sup>(10)</sup>. Mais si toutes deux ces surfaces sont des cônes, l'on aura un complexe particulier entre ceux de l'espèce considérée, complexe qui sera encore de la classe  $[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$  mais qui ne dépen-

---

(9) V. KLEIN, « Zur Theorie der Complexe I. und II. Grades », n<sup>o</sup> 24.

(10) Comme les caractères, qui distinguent parmi tous les complexes  $[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$  les complexes H, correspondent par dualité à eux-mêmes, il s'ensuit que ces mêmes complexes peuvent s'obtenir d'une infinité de manières comme lieux des droites par lesquelles passent des couples harmoniques de plans tangents de deux surfaces de la 2<sup>e</sup> classe, et que pour l'une de celles-ci on peut même prendre une conique. En conséquence le complexe étudié par M. PAINVIN (Nouv. Ann. de math., 1872) des droites par lesquelles passent des plans tangents à un ellipsoïde perpendiculaires entre eux est précisément, du point de vue projectif, l'un quelconque des complexes H dont il s'agit ci-dessus. Sa surface singulière est la surface des ondes de FRESNEL. Nous aurons soin d'ailleurs d'indiquer brièvement dans des notes tous les cas particuliers remarquables du complexe de M. PAINVIN, relatifs aux différents cas particuliers métriquement des surfaces de la 2<sup>e</sup> classe.

dra plus que de 16 constantes, tandis qu'un complexe H général de cette classe dépend de 17 constantes, comme le tétraédroïde auquel il correspond.

$$[2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1].$$

Les propriétés d'un complexe H de cette classe s'obtiennent de celles d'un complexe H de la classe précédente, en supposant que deux de ses complexes linéaires fondamentaux, correspondants à deux éléments conjugués de l'involution, viennent coïncider. La surface singulière est une particulière « Complexfläche » (dépendante de 16 constantes, tandis que la « Complexfläche » la plus générale dépend de 17), qui jouit de quelques propriétés du tétraédroïde. En effet elle possède une droite double avec 4 points et 4 plans cuspidaux, et 8 points et 8 plans doubles; or non seulement ces 8 plans doubles passent 4 à 4 par chaque point double, mais il y a aussi deux autres points dans chacun desquels se coupent 4 de ces plans doubles (divers de l'un à l'autre), et analogiquement deux plans, qui ne sont point des plans doubles, mais qui contiennent chacun 4 points doubles. Une telle surface est singulière pour un seul complexe H proprement dit (qui correspond au second élément double de l'involution considérée précédemment, dont le premier élément double correspond maintenant au complexe spécial qui a pour axe la droite double). On obtient un complexe H de cette classe au moyen de deux surfaces du second ordre, qui dans leur faisceau soient conjuguées harmoniques relativement à deux cônes, c'est-à-dire deux surfaces du second ordre dont le tétraèdre fondamental ait une arête qui les coupe harmoniquement. Alors cette arête sera la droite double, et les deux sommets et les deux faces du tétraèdre qui n'appartiennent pas à cette arête seront les deux points et les deux plans dont nous parlions. On peut prendre pour l'une de ces deux surfaces du second ordre un cône; mais si pour toutes les deux l'on prend deux cônes, on obtiendra un cas particulier des complexes H de cette espèce, c'est-à-dire un cas pour lequel le seul invariant absolu de ces complexes aura une valeur numérique particulière<sup>(41)</sup>.

---

<sup>(41)</sup> C'est un complexe H de cette classe [2 1 1 1 1] celui des axes centraux d'un système de forces, que M. DARBOUX (v. Mém. de la Société des sciences phys. et nat. de Bordeaux, (2) II) a rencontré dans sa généralisation du théorème de MINDING, et que CHASLES avait entrevu (v. Aperçu historique, 2<sup>e</sup> édition, pp. 555-6). Récemment M. PADELLETTI a montré (« Sulle analogie fra la teoria della astatica e quella dei momenti d'inerzia », Rend. Acc. Napoli, Febbraio 1883,

[2 2 1 1].

La surface singulière la plus générale de cette classe appartient à deux complexes H, qui dans la série des complexes du 2<sup>e</sup> degré ayant la même surface singulière sont les éléments doubles de l'involution déterminée par les deux complexes fondamentaux non spéciaux et par les deux spéciaux, comme couples d'éléments conjugués. On obtient un complexe H de cette classe comme lieu des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre qui se touchent en un point, et dont l'une peut être un cône (n'ayant pas le sommet sur l'autre surface). Les deux droites doubles seront les deux tangentes en ce point à ces surfaces du second ordre, lesquelles appartiennent comme génératrices à la surface du second ordre conjuguée harmonique relativement à ces deux-ci de ce cône de leur faisceau, qui a le sommet au point de contact. La surface singulière et le complexe H ont un invariant absolu, qui prendra une valeur numérique particulière si pour ces deux surfaces du second ordre l'on peut prendre deux cônes.

[4 1 1].

A la surface la plus générale de cette classe <sup>(12)</sup> appartient un seul complexe H, qui est, dans la série des complexes ayant la même surface singulière, le conjugué harmonique du complexe fondamental spécial relativement aux deux autres complexes fondamentaux (ce

---

pp. 29-48) que ce complexe se compose des droites par lesquelles passent des plans tangents perpendiculaires entre eux à un certain hyperboloïde qu'il appelle « hyperboloïde central », et qui a pour l'une de ses sections principales une hyperbole équilatère. Or ce que nous avons dit ci-dessus montre qu'effectivement le complexe ainsi défini, c'est-à-dire le complexe de PAINVIN relatif à un tel hyperboloïde est un complexe H de la classe [2 1 1 1], et même le plus général de ces complexes du point de vue projectif. — Si cet hyperboloïde se réduit à une hyperbole équilatère, alors on aura un cas particulier de ces complexes pour le lieu des droites par lesquelles passent des plans tangents orthogonaux de cette hyperbole.

<sup>(12)</sup> Il faut noter, pour cette classe-ci et pour plusieurs de celles qui suivent, qu'une conséquence immédiate des propositions générales que nous avons données est que chaque surface singulière d'un complexe du 2<sup>e</sup> degré, auquel correspond un nombre  $< 4$  de racines différentes du discriminant (ce que l'on voit par la caractéristique) ne peut pas avoir de particularités projectives (invariants absolus), et que chaque complexe, auquel correspond un nombre de racines  $< 3$ , ne peut avoir lui-même aucune particularisation (sans changer de classe). Ces corollaires s'appliquent souvent dans notre recherche.

qui permettra de construire pour chaque point de la surface la droite singulière correspondante de ce complexe H, car elle sera parmi les tangentes en ce point la conjuguée harmonique de celle qui s'appuie sur la droite double de la surface relativement aux deux qui touchent aussi ailleurs cette surface). Deux surfaces du second ordre donnent origine à un tel complexe H si, non seulement elles se touchent, comme dans le cas précédent, mais si en outre la surface conjuguée harmonique relativement à ces deux surfaces du second ordre de ce cône de leur faisceau qui a le sommet dans leur point de contact coïncide avec l'un des deux autres cônes de leur faisceau. Effectivement la construction, que nous avons donnée dans les cas précédents, des deux droites doubles montre que lorsque cette condition est satisfaite, ces deux droites coïncident en une génératrice du second des cônes nommés, de sorte que de la classe de complexes  $[2\ 2\ 1\ 1]$  on sera passé à la classe  $[4\ 1\ 1]$ . L'une des deux surfaces auxquelles correspond le complexe H que nous considérons peut être un cône; mais la condition géométrique à laquelle elles doivent satisfaire empêche que toutes les deux soient des cônes. Ni ce complexe H, ni sa surface singulière, n'ont [pas] d'invariants absolus.

[3 3].

Chaque complexe du 2<sup>o</sup> degré de cette classe est un complexe H des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre (dont l'une peut être un cône) ayant un contact stationnaire, c'est-à-dire dont la courbe d'intersection ait un point de rebroussement. Dans ce cas la surface singulière possède deux droites de rebroussement qui sont l'intersection du plan tangent en ce point aux deux surfaces du second ordre avec la surface de leur faisceau qui est conjuguée harmonique relativement à elles du cône qui a le sommet dans le point de contact. On voit l'analogie qu'il y a avec le cas  $[2\ 2\ 1\ 1]$ .

[2 2 2].

Rappelons qu'à propos de la classe  $[2\ 2\ 1\ 1]$  nous avons dit que l'on obtient un complexe H qui lui appartient, lorsque les deux surfaces du second ordre se touchent en un point, et nous avons ajouté que l'une de ces surfaces pouvait être un cône, pourvu que le contact de ce cône avec l'autre surface ne fût pas impropre, c'est-à-dire que celle-ci ne passât pas par le sommet de ce cône. Maintenant si l'on veut précisément le complexe H des droites coupant harmoniquement un cône et une autre surface du second ordre (pouvant

aussi se réduire à un cône) quand celle-ci passe par le sommet de ce cône, ce complexe ne sera plus de la classe  $[2\ 2\ 1\ 1]$ , mais bien de la classe  $[2\ 2\ 2]$ , car il aura trois droites doubles se coupant mutuellement, c'est-à-dire les deux droites d'intersection de ce cône avec le plan tangent dans son sommet à l'autre surface du second ordre, et la droite polaire de ce plan relativement au cône. Ce sommet est un point notable pour le complexe, car toutes les droites qui passent par lui appartiennent évidemment à celui-ci; par conséquent chaque plan passant par ce sommet est un plan singulier du complexe, d'où il s'ensuit que celui-ci a une surface singulière qui se décompose en ce point comme enveloppe et en une surface du 4<sup>e</sup> ordre et de la 3<sup>e</sup> classe, ayant les trois droites doubles du complexe pour droites doubles (comme lieux de points), c'est-à-dire une *surface de STEINER*. Notre complexe H est donc un complexe  $[2\ 2\ 2]$  (B) de M. WEILER. Etant donnée une surface quelconque de STEINER, elle sera surface singulière pour trois complexes H, qui seront dans la série des complexes du 2<sup>e</sup> degré ayant cette surface pour surface singulière les conjugués harmoniques de l'un des trois complexes fondamentaux spéciaux relativement aux deux autres. Ces trois complexes H peuvent tous venir engendrés de la manière que nous avons décrite: seulement les trois droites doubles de la surface et de ces complexes permuteront leur rôle de l'un à l'autre.

Mais si dans le cas de deux surfaces du second ordre tangentes en un point, qui donnaient lieu au complexe H de la classe  $[2\ 2\ 1\ 1]$ , on suppose non plus que l'une des deux devienne un cône, mais bien qu'elles soient conjuguées harmoniques relativement à ces deux cônes de leur faisceau qui n'ont pas le sommet dans leur point de contact, c'est-à-dire que les deux couples de génératrices d'intersection de ces deux surfaces avec leur commun plan tangent en ce point soient harmoniques, alors il est clair que toutes les droites de ce plan tangent appartiendront au complexe H, de sorte que chaque point de ce plan notable sera singulier par rapport à ce complexe; de plus la droite de ce plan qui joint les sommets des deux cônes susdits sera une nouvelle droite double du complexe. Donc la surface singulière de celui-ci se décomposera en ce plan et en une surface du 3<sup>e</sup> ordre et de la 4<sup>e</sup> classe, ayant trois droites doubles comme enveloppes dans ce plan, c'est-à-dire en une surface réciproque de celle de STEINER. On obtient ainsi un complexe  $[2\ 2\ 2]$  (A) de M. WEILER. Etant donnée une surface réciproque de celle de STEINER, elle sera singulière seulement pour trois complexes H, chacun desquels fera encore, comme dans le cas précédent,

un groupe harmonique avec les trois complexes fondamentaux spéciaux. A chacun de ces complexes-là correspond l'un des trois points d'intersection des trois droites doubles comme point de contact des deux surfaces du second ordre dont il est le complexe H <sup>(13)</sup>.

[6].

Chaque complexe de cette classe est un complexe H. On peut arriver à ces complexes en partant des complexes [3 3], de la même manière qu'en partant des complexes [2 2 1 1] nous sommes arrivés aux complexes [2 2 2]. Si la courbe d'intersection des deux surfaces du second ordre, dont l'on considère le complexe H, a un point de rebroussement, et si en outre ces deux surfaces sont conjuguées harmoniques relativement aux deux cônes de leur faisceau, c'est-à-dire si les deux couples de génératrices d'intersection de ces surfaces avec le plan tangent dans leur point de contact sont harmoniques, la surface singulière se décomposera en ce plan tangent et en une surface du 3<sup>e</sup> ordre et de la 4<sup>e</sup> classe ayant une droite double comme enveloppe et ce plan-là comme plan triple, c'est-à-dire une surface du 3<sup>e</sup> ordre de la XIX espèce de SCHLÄFLI. Les complexes H ainsi obtenus sont donc les complexes [6] (A) de M. WEILER.

Si au contraire on considère le complexe H relatif à un cône et à une autre surface du second ordre (pouvant se réduire aussi à un cône) passant par le sommet de celui-ci et ayant dans ce point pour plan tangent un plan tangent au cône, on obtient le complexe [6] (B) de M. WEILER, c'est-à-dire un complexe dont la surface singulière se décompose en ce sommet, comme enveloppe de plans, et en une surface du 4<sup>e</sup> ordre et de la 3<sup>e</sup> classe, réciproque de celle de SCHLÄFLI mentionnée.

Comme on voit, l'on peut aussi obtenir fort aisément les propriétés de ces deux espèces de complexes [6] de celles des deux espèces de complexes [2 2 2] en supposant que les trois droites doubles de ceux-ci viennent coïncider en une seule. On s'explique aussi de cette manière pourquoi tous les  $\infty^1$  complexes qui appartiennent à une surface singulière [6] sont des complexes H, tandis qu'à une

---

<sup>(13)</sup> Le complexe des droites par lesquelles passent des couples de plans tangents orthogonaux à un parabolôïde ou à une parabole est un complexe de cette espèce. Sa surface singulière se décompose dans le plan à l'infini et une surface du 3<sup>e</sup> ordre et de la 4<sup>e</sup> classe ayant ce plan pour plan tritangent.

surface singulière [2 2 2] appartiennent seulement trois complexes H; car si dans un groupe harmonique de 4 éléments 3 d'entre eux viennent coïncider, le quatrième devient indéterminé.

$$[(1\ 1)\ 1\ 1\ 1\ 1].$$

On obtient un complexe H de cette classe comme lieu des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre, qui soient dans leur faisceau les éléments doubles d'une involution dont les quatre cônes forment deux couples d'éléments conjugués; ou, en d'autres termes, ces deux surfaces du second ordre doivent être telles que deux arêtes opposées de leur tétraèdre fondamental les coupent harmoniquement. Ces deux arêtes seront les deux droites doubles du complexe et de la surface singulière, qui sera une surface réglée du 4<sup>e</sup> degré de l'espèce XI de CREMONA. Cependant elle ne sera pas la plus générale, car dans les groupes d'éléments de formes de première espèce qui donnent les invariants absolus de cette surface et des complexes dont elle est la surface singulière, les éléments qui correspondent aux exposants isolés 1 de la caractéristique déterminent une involution dont un élément double est celui qui correspond à (1 1), et l'autre élément double correspond au complexe H. On trouve effectivement que la surface [(1 1) 1 1 1 1] lorsqu'elle est singulière pour un complexe H a pour chaque droite double les 4 points et les 4 plans de rebroussement coïncidant deux-à-deux<sup>(14)</sup>. On voit aussi qu'une telle surface est singulière pour un seul complexe H, qui dans la série des complexes ayant la même surface singulière se détermine de la manière dite.

$$[(1\ 1)\ 2\ 1\ 1].$$

Contrairement au cas précédent, *chaque* surface de la classe [(1 1) 2 1 1], c'est-à-dire chaque surface réglée du 4<sup>e</sup> degré de l'espèce V de CREMONA, est surface singulière de deux complexes H. Ceux-ci correspondent aux éléments doubles de l'involution dans laquelle sont conjugués les éléments qui correspondent aux deux exposants isolés 1 et ceux qui correspondent à (1 1) et 2. Un complexe H de cette classe est le complexe des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre qui ont une génératrice commune. Celle-ci est évidemment une droite double du complexe: c'est celle

---

<sup>(14)</sup> M. WEILER mentionne ce cas particulier de la surface [(1 1) 1 1 1 1] à la fin du n<sup>o</sup> 1 de son Mémoire.

qui correspond à l'exposant 2. Les deux autres droites doubles, correspondantes à (1 1), passent par les deux points de contact des deux surfaces du second ordre et sont respectivement génératrices de ces deux surfaces de leur faisceau qui sont relativement à celles-là les conjuguées harmoniques des deux cônes ayant en ces points respectivement leurs sommets.

[(3 1) 1 1].

A la surface singulière générale de cette classe, c'est-à-dire à la surface générale de l'espèce X de CREMONA, appartient un complexe H, qui correspond à l'élément conjugué harmonique de celui qui correspond à (3 1) relativement à ceux qui correspondent aux deux exposants isolés 1. Ce cas dérive du précédent en faisant coïncider dans celui-ci les deux racines qui correspondent à 2 et à (1 1). On obtient un tel complexe H en supposant non seulement que les deux surfaces du second ordre aient une droite commune, comme dans le cas précédent, mais encore qu'elles soient conjuguées harmoniques relativement aux deux cônes de leur faisceau. Effectivement alors les deux droites doubles qui correspondaient à (1 1) viennent coïncider avec celle qui correspondait à 2, c'est-à-dire avec cette droite commune aux surfaces du second ordre.

[(2 1) 3].

Tous les complexes qui appartiennent à cette classe, c'est-à-dire qui ont pour surface singulière une surface de l'espèce VI de CREMONA avec une génératrice de rebroussement, sont des complexes H. Les deux surfaces du second ordre qui ont un tel complexe pour complexe H doivent non seulement avoir une droite commune, comme pour les complexes H de la classe [(1 1) 2 1 1], mais il faut encore que cette droite touche la cubique gauche, dans laquelle se coupent aussi ces deux surfaces. Quand cela arrive, les deux directrices de la surface réglée [(1 1) 2 1 1], lesquelles passaient précisément par les deux points d'intersection de cette cubique avec cette droite, et dont nous avons donné la construction, coïncideront dans la directrice unique de la surface réglée [(2 1) 3], tandis que la droite commune aux deux surfaces du second ordre deviendra la génératrice de rebroussement de cette surface réglée.

[(1 1) 2 2].

Une surface singulière de cette classe se compose d'une surface réglée générale du troisième degré avec un point (comme enveloppe) de sa directrice double et le plan (comme lieu) qui le joint à la

directrice simple. Or une telle surface est singulière pour des complexes H de deux espèces bien différentes. Un complexe de la 1<sup>e</sup> espèce est le complexe H qui appartient à un cône et à une autre surface du second ordre passant par son sommet, comme dans le cas [2 2 2] (B), mais tels en outre que ces deux surfaces soient conjuguées harmoniques relativement aux deux autres cônes de leur faisceau. Cette dernière condition est précisément celle qui caractérisait le cas [2 2 2] (A), de sorte que le complexe H, dont il s'agit, jouit des propriétés relatives à ces deux cas déjà rencontrés ; et l'on déduit de ce que nous avons dit à propos de ceux-ci la manière de déterminer les 4 droites doubles<sup>(15)</sup>. — Un complexe H de la 2<sup>e</sup> espèce appartenant encore à la classe [(1 1) 2 2] est le complexe H qui correspond à un cône et à une autre surface du second ordre qui en contient une génératrice. On peut donc obtenir ce cas-ci par la combinaison des deux cas déjà étudiés [2 2 2] (B) et [(1 1) 2 1 1].

---

<sup>(15)</sup> Ce complexe H de la classe [(1 1) 2 2] et de la 1<sup>e</sup> espèce est projectivement le même que le complexe du 2<sup>e</sup> degré rencontré par M. BALL (*The Theory of Screws*, Dublin 1876, pp. 21 et suiv. et 95) comme ayant pour surface singulière un cylindroïde, et qui peut être défini comme le lieu des axes des complexes du 1<sup>er</sup> degré d'une série linéaire triplement infinie (tandis que les axes des complexes du 1<sup>er</sup> degré du faisceau en involution avec cette série ont précisément pour lieu ce cylindroïde). On peut en effet vérifier directement que ce complexe de BALL est le lieu des droites par lesquelles passent des plans tangents perpendiculaires d'un parabolôïde orthogonal, qui a l'axe du cylindroïde pour axe de symétrie, contient les deux génératrices principales de celui-ci et a avec lui le même paramètre. — Si l'on considère une détermination métrique non plus parabolique, mais générale ou non-euclidienne, c'est-à-dire ayant une surface générale du second degré pour absolu, alors le lieu des couples d'axes des complexes du 1<sup>er</sup> degré d'une série linéaire triplement infinie est un complexe du 2<sup>e</sup> degré de la classe [(1 1) 1 1 1 1], qui est encore, comme précédemment, un de nos complexes H. Sa surface singulière est le lieu des couples d'axes des complexes du faisceau en involution avec cette série. M. LINDEMANN dans le Mémoire « Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner Massbestimmung » (*Math. Ann.*, VII, à la p. 136) rencontre aussi le lieu des couples d'axes des complexes linéaires d'un faisceau et remarque qu'ils forment une surface réglée de l'espèce XI de CREMONA. Cependant il faut ajouter qu'elle n'est pas la surface la plus générale de cette espèce : les points de rebroussement de ses droites doubles coïncident par couples, puisqu'elle est la surface singulière d'un des complexes H de la classe [(1 1) 1 1 1 1], complexes que nous avons déjà examinés.

A une surface singulière de la classe considérée  $[(1\ 1)\ 2\ 2]$  appartiennent trois complexes  $H$ , dont un de la 1<sup>e</sup> espèce, qui correspond à l'élément conjugué harmonique de celui qui correspond à  $(1\ 1)$  relativement à ceux qui correspondent aux deux exposants 2, et deux de la 2<sup>e</sup> espèce qui correspondent aux conjugués harmoniques de chacun de ces deux derniers éléments relativement à l'autre et à celui qui correspond à  $(1\ 1)$ .

$[(5\ 1)]$ .

Chaque complexe de cette classe est un complexe  $H$ , qui appartient à un cône et une autre surface du second ordre se coupant mutuellement en une cubique gauche avec une de ses droites tangentes. La surface singulière se décompose en une surface réglée du 3<sup>e</sup> degré dont les directrices coïncident en une même droite, et le point et le plan cuspidaux de cette droite. Celle-ci est précisément la droite commune aux deux surfaces du second ordre, tandis que ce point et ce plan sont leur point et leur plan de contact; toutes les droites qui passent par ce point ou qui appartiennent à ce plan sont évidemment des droites du complexe. On peut déduire les propriétés du complexe  $H$  de cette classe de celles du complexe de la classe  $[(2\ 1)\ 3]$  en supposant que l'une des deux surfaces du second ordre, auxquelles celui-ci appartient comme complexe  $H$ , s'approche indéfiniment du seul cône de leur faisceau.

$[(1\ 1)\ (1\ 1)\ 1\ 1]$ .

L'on sait qu'une surface singulière de cette classe se compose de deux surfaces du second degré  $F_1, F_2$  se coupant mutuellement dans le quadrilatère gauche des droites doubles. Parmi les  $\infty^1$  complexes du 2<sup>e</sup> degré qui lui appartiennent il y en a toujours et seulement deux qui soient des complexes  $H$ ; ils correspondent aux éléments doubles de l'involution, qui a pour couples d'éléments conjugués les éléments correspondants aux deux  $(1\ 1)$  et aux deux exposants 1 de la caractéristique. Un complexe  $H$  de cette classe est le complexe des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre, lorsque celles-ci se coupent mutuellement en une couple de coniques (l'une de ces deux surfaces pouvant alors être un cône), dont l'une ou même toutes les deux peuvent se décomposer en deux droites. Il y a une infinité de manières d'obtenir ainsi ce même complexe; les plans des coniques, où les deux surfaces du second ordre, dont il est le complexe  $H$ , se coupent, doivent passer tous les deux par l'une ou l'autre de deux droites fixes, qui sont

les diagonales du quadrilatère gauche des droites doubles, et ces coniques mêmes appartiendront à l'une ou à l'autre des deux surfaces  $F_1, F_2$ . Si  $r', r''$  sont ces deux diagonales du quadrilatère gauche d'intersection de  $F_1, F_2$ , on voit facilement que les droites singulières d'un tel complexe H sont les droites qui s'appuient à l'une de ces  $r', r''$  et touchent l'une de ces deux surfaces singulières  $F_1, F_2$ , et les droites qui s'appuient à l'autre de ces diagonales et touchent l'autre de ces surfaces. Pour les deux complexes H qui appartiennent à ces mêmes surfaces singulières on obtient les droites singulières en établissant des deux manières possibles la correspondance entre  $F_1, F_2$  et  $r', r''$  <sup>(16)</sup>. Si l'on considère le plan tangent à  $F_1$  en un point quelconque  $P$ , et parmi toutes les droites qui dans ce plan passent par  $P$  on prend les rayons doubles de l'involution dans laquelle sont conjuguées les deux génératrices de  $F_1$  et les deux tangentes de  $F_2$  qui appartiennent à ce faisceau, ces deux rayons seront, d'après ce que nous avons dit au commencement, les droites singulières (correspondantes à  $P$ ) des deux seuls complexes H qui appartiennent à ces surfaces singulières. Or l'on voit bien que ces droites iront couper respectivement les deux diagonales  $r', r''$ : de sorte que l'on a ainsi une confirmation de nos énoncés. — M. WEILER a remarqué que les droites singulières d'un complexe quelconque ayant pour surface singulière l'ensemble des deux surfaces  $F_1, F_2$  forment deux congruences du 2<sup>e</sup> degré de tangentes communes à ces surfaces et respectivement à deux autres surfaces de leur faisceau. Or nous pouvons ajouter que parmi tous ces complexes les deux complexes H se distinguent par ce que ces deux autres surfaces se réduisent aux deux couples de plans, c'est-à-dire par ce que ces congruences singulières du 2<sup>e</sup> degré acquièrent deux droites focales  $r', r''$ .

---

(16) Les complexes H de cette classe [(11)(11)11] peuvent se transformer projectivement dans le complexe des droites qui coupent harmoniquement deux sphères. La surface singulière de ce complexe se compose d'une sphère du faisceau de celles-ci, et d'un hyperboloïde de révolution ayant pour foyers les centres des deux sphères et qui n'est autre chose que l'enveloppe des plans qui coupent les deux sphères en deux cercles mutuellement orthogonaux. Les deux droites  $r', r''$  deviennent ainsi celle qui joint les centres des deux sphères et la droite à l'infini du plan radical de celles-ci; relativement au complexe H considéré la première correspond à l'hyperboloïde singulier, la seconde à la sphère singulière. — On obtient aussi ce complexe comme l'ensemble des droites par lesquelles passent des plans tangents orthogonaux à une surface du 2<sup>e</sup> degré (à centre) de révolution. Si celle-ci se réduit à un cercle on a un cas particulier projectivement du complexe H de la classe considérée.

Le système des deux surfaces  $F_1, F_2$ , et chaque complexe  $H$ , dont elles forment la surface singulière, ont un invariant absolu. Celui-ci prend une valeur particulière lorsque pour les deux surfaces du second ordre (se coupant en deux coniques), dont ce complexe est le lieu des droites qui les coupent harmoniquement, on peut prendre deux cônes.

$$[(1\ 1)\ (1\ 1)\ 2].$$

Une surface singulière de cette classe se compose d'une surface du second degré  $F$ , avec deux de ses plans tangents  $\pi_1, \pi_2$  et les deux points  $P', P''$  dans lesquels la droite d'intersection de  $\pi_1, \pi_2$  coupe la surface  $F$ . Or il arrive pour cette classe de surfaces singulières la même chose que pour la classe  $[(1\ 1)\ 2\ 2]$ , dont on peut d'ailleurs dire qu'elle dérive; c'est-à-dire à une surface singulière de cette classe appartiennent trois complexes  $H$ , dont deux correspondent aux éléments conjugués harmoniques de l'un des éléments qui correspondent à  $(1\ 1)$  relativement à l'autre et à celui qui correspond à  $2$ , tandis que l'autre complexe  $H$  correspond au conjugué harmonique de l'élément représenté par  $2$  relativement aux deux éléments représentés par  $(1\ 1)$ ; et les deux premiers complexes  $H$  sont projectivement de nature différente de celle du dernier. Un complexe  $H$  de la première espèce est en effet l'ensemble des droites coupant harmoniquement deux cônes qui ont une génératrice commune: les sommets de ces cônes sont les points  $P', P''$  et les plans tangents aux cônes le long de la génératrice commune  $P'P''$  sont les plans  $\pi_1, \pi_2$ . Chacun de ces deux plans coupe le cône auquel il n'est pas tangent en une autre droite et a relativement au même cône pour polaire une droite de l'autre plan: les deux couples de droites ainsi construites sont, comme l'on voit facilement, les 4 droites doubles, que le complexe considéré a, outre la droite  $P'P''$ . Les deux complexes  $H$  de cette espèce, que nous avons dit appartenir à la même surface singulière, font correspondre ainsi de deux manières diverses les points  $P', P''$  et les plans  $\pi_1, \pi_2$ .

Le complexe  $H$  de la même classe, mais de la deuxième espèce, est au contraire l'ensemble des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre, dont l'intersection se compose de deux coniques, mais qui soient en outre conjuguées harmoniques relativement aux deux cônes de leur faisceau; cependant on peut, sans changer le complexe, faire en sorte que ceux-ci, et avec eux l'une de ces deux surfaces, viennent coïncider, de sorte que ce complexe sera le complexe  $H$  correspondant à une surface du second ordre

et un cône qui en contient deux génératrices. On peut aussi le considérer comme composé des droites qui coupent harmoniquement une couple de plans ( $\pi_1$  et  $\pi_2$ ) et une surface du second ordre, qui coupera la droite commune à ces plans dans les points  $P'$ ,  $P''$ , et que l'on peut réduire à un cône, ou bien à une surface qui touche les deux plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$  et les coupe en conséquence suivant les 4 droites doubles du complexe autres que la droite  $P'P''$  <sup>(17)</sup>. Seulement ce complexe-ci (et non pas ceux de la première espèce) peut être considéré comme cas particulier du complexe H de la classe précédente  $[(1\ 1)(1\ 1)1\ 1]$ . Les droites singulières de ce complexe, autres que les droites contenues dans les plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$ , ou qui passent par les points  $P'$ ,  $P''$ , sont les droites tangentes de la surface  $F$  du second ordre, qui s'appuient sur la droite polaire de  $P'P''$  relativement à la même surface (car il résulte de ce que nous avons dit que, parmi toutes les tangentes en un point à cette surface, la tangente qui est droite singulière du complexe H considéré sera la conjuguée harmonique de celle qui coupe  $P'P''$  relativement aux deux génératrices de  $F$ ). Pour les autres complexes qui ont la même surface singulière les droites singulières vont toucher aussi une autre surface du 2<sup>e</sup> degré, de sorte que cette propriété des droites singulières de notre complexe H sert à le caractériser parmi tous ceux de la même série; précisément comme nous avons vu être caractérisés les complexes H de la classe précédente  $[(1\ 1)(1\ 1)1\ 1]$  parmi tous ceux qui ont la même surface singulière <sup>(18)</sup>.

---

(17) On voit par les différentes constructions que nous avons ainsi données de ce complexe qu'il est une transformation projective du complexe des droites par lesquelles passent des plans tangents orthogonaux à un parabolôide de révolution, ou bien du complexe des droites telles que les plans qui les joignent à deux points fixes sont perpendiculaires entr'eux.

(18) M. HIRST dans le Mémoire « On the complexes generated by two correlative planes » (Coll. math. in mem. CHELINI, pp. 51-73) a étudié les complexes de la classe  $[(1\ 1)(1\ 1)2]$  comme composés des droites qui joignent les points conjugués de deux plans corrélatifs et a trouvé effectivement, par une voie tout-à-fait différente de la nôtre, que dans une série de complexes de cette classe ayant la même surface singulière il y a un seul complexe (c'est le complexe qu'il représente par  $C_3\ V$ , p. 62) jouissant par rapport aux droites singulières de la propriété caractéristique dont nous parlons ci-dessus; c'est là précisément le complexe H de deuxième espèce, que nous avons dit appartenir toujours à une telle série. M. HIRST ne rencontre pas les deux complexes H de première espèce, qui appartiennent aussi à la même série; pour ceux-ci les droites singulières ne jouissent plus de la propriété dont il s'agit.

[(2 1) (2 1)].

Une surface singulière de cette classe se compose de deux surfaces du second degré raccordées le long de deux génératrices, droites doubles des complexes. Chaque complexe qui a une telle surface singulière est un complexe H des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre, qui se coupent mutuellement en deux coniques tangentes (dont l'une peut se décomposer en une couple de droites). Les deux droites doubles se construisent facilement, car elles passent par le point de contact de ces coniques et sont des génératrices de la surface conjuguée harmonique relativement à ces deux surfaces du second ordre de la couple de plans de leur faisceau.

[(2 2) 1 1].

La surface singulière d'un complexe de cette classe se compose d'un cône du second degré, d'une conique (comme enveloppe de plans) et du sommet de ce cône avec le plan de cette conique (respectivement comme enveloppe de plans et comme lieu de points). Or dans la série des complexes qui ont cette surface singulière il y en a un qui est un complexe H : c'est celui qui correspond à l'élément conjugué harmonique de celui représenté par (2 2) relativement aux deux représentés par 1. Ce complexe H est le complexe des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre, lorsque celles-ci se coupent en deux coniques et sont conjuguées harmoniques relativement à la couple de plans et à l'un des deux cônes de leur faisceau. Ce cône sera précisément une partie de la surface singulière ; tous les plans qui passent par son sommet seront des plans singuliers et le plan, qui joint ce sommet à la droite d'intersection de la couple de plans, formera, compté deux fois, l'autre partie de la surface singulière comme lieu. Les droites de ce plan qui passent par le sommet du cône sont, comme on voit facilement, des droites doubles du complexe, et la surface singulière se composera encore (comme enveloppe de plans) d'une conique placée dans ce plan. Les droites singulières de ce complexe H sont les droites qui coupent cette conique et la droite polaire de son plan relativement au cône, et les droites qui touchent ce cône et coupent la polaire de son sommet relativement à la conique ; parmi les complexes qui ont la même surface singulière cette propriété des droites singulières d'avoir deux droites focales caractérise le complexe H <sup>(19)</sup>.

---

(19) Ce complexe est projectivement le même que le complexe des droites par lesquelles passent des plans tangents orthogonaux à la surface provenant de la

[(4 2)].

Chaque complexe de cette classe est un complexe H. Mais il y en a deux espèces, réciproques l'une de l'autre. — Un complexe [(4 2)] (A) de M. WEILER est le complexe des droites qui coupent harmoniquement une surface du second ordre (qui peut se réduire à un cône) et une couple de plans menés par l'une de ses tangentes. Il est clair que la surface singulière de ce complexe se composera, comme lieu, de ces deux plans (dont les droites appartiennent au complexe) et du plan tangent à la surface du second ordre dans le point de contact avec la droite d'intersection de ces plans, compté deux fois, car les droites de ce plan qui passent par ce point sont des droites doubles du complexe. Comme enveloppe la surface singulière se compose de ce point, compté deux fois, et d'une conique placée dans ce plan tangent.

Un complexe [(4 2)] (B) se compose des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre, lesquelles se coupent en deux coniques tangentes et soient en outre conjuguées harmoniques relativement au cône et à la couple de plans de leur faisceau. Ce cône et le plan tangent aux deux surfaces dans leur point de contact, compté doublement, formeront la surface singulière comme lieu de points; tandis que, comme enveloppe de plans, elle se compose du sommet du cône, compté doublement, et de deux autres points placés sur la génératrice de contact du cône avec le plan tangent commun. Mais on peut aussi obtenir ce même complexe [(4 2)] (B) comme le complexe des droites coupant harmoniquement deux cônes qui se touchent le long d'une génératrice et qui par conséquent se coupent encore en une conique ayant un point commun avec cette génératrice; si l'on prend alors sur celle-ci le point conjugué harmonique de ce point relativement aux sommets des deux cônes, le cône qui a ce nouveau point pour sommet et qui appartient au faisceau de ceux-ci sera une partie de la surface singulière, qui sera complétée par le plan tangent commun et par les sommets des deux cônes donnés.

---

rotation d'une hyperbole équilatère autour de l'un de ses axes. Il est aussi le même que le complexe des droites qui ont un même moment donné relativement à une droite fixe: la surface singulière de ce dernier complexe se décompose en un cylindre de révolution, ayant cette droite pour axe et ce moment pour rayon, et en le cercle imaginaire à l'infini comme enveloppe de plans.

$$[(1\ 1\ 1)\ (2\ 1)].$$

Chaque complexe de cette classe est le complexe des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre raccordées suivant une génératrice. L'on voit très facilement que la surface singulière est la surface du second ordre, comptée deux fois, qui dans le faisceau de ces deux surfaces données est la conjuguée harmonique relativement à elles de la couple de plans qui appartient au même faisceau. On voit aussi que le complexe a pour droites doubles la génératrice de raccordement des surfaces et toutes les génératrices de l'autre système de la surface singulière; et pour droites singulières les tangentes à cette surface dans les points de la génératrice de raccordement.

$$[(1\ 1\ 1)\ (1\ 1\ 1)].$$

Les droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre, qui se touchent le long d'une conique, forment un complexe de cette classe, c'est-à-dire le complexe des droites tangentes à une autre surface du second degré. Cette surface se détermine facilement, car elle appartient au faisceau des deux surfaces données et est la conjuguée harmonique relativement à celles-ci du plan double qui appartient à ce faisceau<sup>(20)</sup>.

$$[(2\ 2\ 2)].$$

Cette classe de complexes comprend deux espèces: A. le complexe des droites qui coupent une conique; B. celui des droites qui touchent un cône. Il est évident qu'on les obtient comme complexes H, c'est-à-dire comme complexes des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre, en prenant dans le cas A. pour l'une de ces deux surfaces un plan double, et dans le cas B. pour les deux surfaces deux surfaces qui, non seulement se touchent le long d'une conique, mais encore soient conjuguées harmoniques relativement au cône et au plan double de leur faisceau, c'est-à-dire qui se correspondent dans une homologie harmonique (les droites du complexe touchent alors précisément ce cône du faisceau); ou bien encore en prenant pour les deux surfaces deux cônes

---

<sup>(20)</sup> Comme cas particulier de la proposition corrélatrice on a que les intersections des plans tangents orthogonaux d'une sphère forment le complexe des droites tangentes d'une autre sphère, ce qui est évident.

ayant le même sommet : dans ce cas le cône touché par les droites du complexe aura aussi évidemment le même sommet, et sera l'enveloppe des plans qui coupent les deux cônes donnés suivant des couples harmoniques de génératrices.

$$[(1\ 1)\ (1\ 1)\ (1\ 1)].$$

On obtient le complexe tétraédral dont le rapport anharmonique est  $-1$  comme le complexe H des droites coupant harmoniquement une surface du second ordre et une couple de plans conjugués relativement à elle : le tétraèdre singulier se composera de ces deux plans et des deux plans tangents à la surface donnée dans les points d'intersection avec la droite commune à ceux-ci. La surface peut se réduire à un cône, dont le sommet soit dans l'un des deux plans, ou même à une seconde couple quelconque de plans, ce qui nous ramène à la génération ordinaire du complexe tétraédral. — On voit que dans une série de complexes ayant la même surface singulière et appartenant à la classe  $[(1\ 1)(1\ 1)(1\ 1)]$  il y en a trois qui soient des complexes H, précisément comme il arrivait pour ceux des classes  $[2\ 2\ 2]$ ,  $[(1\ 1)\ 2\ 2]$  et  $[(1\ 1)(1\ 1)\ 2]$ .

$$[(3\ 3)].$$

C'est le complexe des droites qui coupent harmoniquement une surface du second ordre et deux plans conjugués relativement à elle, mais dont l'un lui soit tangent (de sorte que l'autre passera par le point de contact). La surface singulière se compose de ces deux plans, dont celui tangent compté trois fois, et de deux points, c'est-à-dire le point de contact compté trois fois et le pôle du second plan par rapport à la surface, puisque toutes les droites qui passent par ce pôle appartiennent au complexe. Au lieu de la surface du second ordre on peut prendre un cône tangent au plan triple.

---

Enfin, pour considérer aussi les complexes H qui se décomposent en deux complexes linéaires, nous pouvons ajouter que le complexe du 2<sup>e</sup> degré des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre se décompose en deux complexes linéaires dans les cas principaux suivants : 1<sup>o</sup> en deux complexes linéaires en involution lorsque dans le faisceau déterminé par ces deux surfaces il y a deux couples de plans conjugués harmoniques relativement à celles-ci. 2<sup>o</sup> en deux complexes linéaires en involution dont l'un spécial, lorsque

l'une des surfaces est une couple de plans passants par une même génératrice de l'autre. 3<sup>o</sup> en deux complexes linéaires spéciaux en involution, lorsque les deux surfaces sont des cônes (pouvant se réduire à des couples de plans) ayant le même sommet et conjugués harmoniques relativement à deux couples de plans de leur faisceau.

Ajoutons encore que, bien que nous ayons classifié seulement les complexes des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre, nos résultats prouvent que ces mêmes complexes se composent des droites par lesquelles passent des couples harmoniques de plans tangents à deux surfaces de la seconde classe, car la plupart des complexes, que nous avons obtenus, correspondent par dualité à eux-mêmes, et les autres ont aussi leurs réciproques parmi ceux que nous [avons] trouvés <sup>(21)</sup>.

Juillet 1883.

---

(21) Nous ne pouvons pas développer ici avec plus de détails les propriétés des diverses espèces de complexes, que nous avons rencontrées, propriétés qui peuvent toutes s'obtenir en partant de la définition commune de ces complexes (comme complexes H ou réciproques). Cependant nous énoncerons encore un mode général de génération, qui nous paraît remarquable, des surfaces singulières de tous ces complexes, lequel découle aussi immédiatement de la définition de ceux-ci ; on a le théorème suivant :

Si dans un système linéaire de surfaces de la 2<sup>e</sup> classe (inscrites dans la même développable de la 4<sup>e</sup> classe) l'on a une involution, le lieu des courbes d'intersection des surfaces conjuguées dans cette involution est une surface du 4<sup>e</sup> ordre et de la 4<sup>e</sup> classe, qui est la surface singulière du complexe du 2<sup>e</sup> degré des droites par lesquelles passent des couples harmoniques de plans tangents aux deux surfaces doubles de cette involution (tandis que le lieu des tangentes communes aux surfaces conjuguées de l'involution est précisément ce complexe).

En particulier, si l'on suppose que ce système soit une série homofocale de surfaces du 2<sup>e</sup> degré et que l'un des éléments doubles de l'involution soit le cercle imaginaire à l'infini, on voit que la surface des ondes (et plus en général la surface singulière du complexe des droites par lesquelles passent des couples de plans tangents à une quadrique quelconque perpendiculaires entre eux) contient une infinité de lignes de courbure d'une série de surfaces homofocales du 2<sup>e</sup> degré, propriété qui a été trouvée récemment par M. BÖKLEN (« Ueber die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle », Zeitschrift für Math. u. Ph., 27, pp. 160-175).